С. А. Назаров, А. Л. Крылов, А. Е. Лифшиц, В. А. Васильев, А. В. Михайлов, Б. А. Дубровин, Заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики, *УМН*, 1984, том 39, выпуск 2, 217–221

1984 г. март—апрель *т. 39, вып. 2(236)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 26 октября 1983 г.

1. С. А. Назаров (Ленинград) «Эллиптические краевые задачи с сингулярными возмущениями».

Рассмотрены следующие классы эллиптических краевых задач с параметром: 1) задачи с малым параметром при старших производных в областях с коническими точками; 2) задачи с малыми возмущениями области вблизи конических или изолированных точек границы; 3) задачи в «длинных» цилиндрических областях или областях с периодически изменяющимся сечением; 4) задачи в тонких областях (или с малым параметром при одной из старших производных). Изложен единый метод построения асимптотических разложений решений перечисленных задач, а также определения асимптотики элементов ядер и коядер, собственных чисел и функций соответствующих операторов (для классов 1)—3)). Этот метод основывается на процедуре перераспределения невязок [1], [2], которая на каждом шаге итерационного процесса дает возможность решать предельные задачи в одних и тех же функциональных пространствах. Последнее обстоятельство позволяет построить аналог [3] классической теории возмущений для тех сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач, все предельные задачи которых являются нётеровыми. Оправдание асимптотических разложений основывается на нескольких (постулируемых в общей схеме и проверенных для перечисленных классов задач) предположениях о свойствах исходной и предельных задач.

Решен ряд конкретных задач математической физики, в основном механики деформируемого твердого тела. К первому классу относятся задачи микрополярной теории упругости; здесь удается найти явную априорную асимптотическую связь между характеристиками (коэффициентами интенсивности напряжений, энергией и т. п.) задач в моментной и классической постановках. Второй класс содержит задачи о малых включениях или отверстиях, узких щелях или полостях; «сглаживании» угловых точек или ребер; приближении трещины к границе тела или другим трещинам и т. д. Третий и четвертый классы связаны с теориями пластин, стержней и оболочек; тел с тонкими покрытиями или окаймлениями; материалов с сильной анизотропией. Приведем типичный пример асимптотической формулы для важнейшей характеристики напряженно-деформированного состояния в рамках теории хрупкого разрушения — коэффициента интенсивности. Пусть $Q_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2: b_- < x_1 < b_+, \ |x_2| < \varepsilon/2\}$, $M = \{x \in \mathbb{R}^2: a_- < x_1 < a_+, \ x_2 = 0\}$, где $b_- < a_- < a_+ < b_+$, ε — малый положительный параметр. Рассмотрим задачу об антиплоском сдвиге узкого прямоугольника Q_ε с продольным разрезом M. Предположим, что массовые силы отсутствуют, берега $M^\pm$ разреза и малые стороны $\Gamma_\varepsilon^\pm$ прямоугольника Q_ε свободны от напряжений, а на больших сторонах заданы сдвиговые усилия интенсивности $\tau(x_1)$. В этом случае депланация $u(\varepsilon, x)$ является гармонической в $Q_\varepsilon \setminus M$ функцией, имеющей нулевые данные Неймана на $M^\pm \cup \Gamma_\varepsilon^\pm$ и удовлетворяющей граничным условиям $(\partial u/\partial x_2)(\varepsilon, x_1, \pm\varepsilon/2) = \tau(x_1)/\mu$ при $b_- < x_1 < b_+$ (μ — модуль сдвига), и справедливы представления $u(\varepsilon, x) = \mathrm{const} + C_\pm(\varepsilon)\sqrt{r_\pm}\cos(\theta_\pm/2) + O(r_\pm)$, где $(r_\pm, \theta_\pm)$ — полярные координаты с центром $(a_\pm, 0)$ и полярной осью, направленной вдоль M. Асимптотика коэффициентов интенсивности $C_\pm$ имеет вид

$$C_\pm(\varepsilon) = -\sqrt{\frac{8}{\pi\varepsilon}}\,\frac{\mu^{-1}}{a_+ - a_-}\int_{a_-}^{a_+} |y - a_\pm|\,\tau(y)\,dy + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Назаров. Метод Вишика — Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 2. Задача в ограниченной области.— СМЖ, 1981, **22**:5, с. 132—152.

[2] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области.— Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.

[3] С. А. Назаров. К вопросу о формализме построения и обоснования асимптотик решений нерегулярно возмущенных эллиптических краевых задач.— УМН, 1982, **37**: 4, с. 102.

Заседание 2 ноября 1983 г.

1. А. Л. Крылов, А. Е. Лифшиц «Задачи с непрерывным спектром в теории неоднородной плазмы».

1°. Рассмотрим холодную плазму плотности $\rho(\mathbf{r})$, находящуюся в положении равновесия в потенциальном магнитном поле $\mathbf{B} = -\nabla F(r)$, $\Delta F = 0$ и занимающую ограниченный объем Ω с идеально проводящими стенками Γ. Ее малые колебания относительно этого положения равновесия описываются уравнением и краевыми условиями

$$(1)\qquad L\mathbf{E} = (\mathrm{rot\,rot})_\perp\mathbf{E} = \omega^2 a^{-2}\mathbf{E} \equiv M\mathbf{E};\quad \mathbf{E}^t|_\Gamma = 0;$$

здесь $\mathbf{E}$ — двухкомпонентное векторное поле такое, что $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$, a — альвеновская скорость. Задача (1) имеет вид $L\mathbf{E} = \omega^2\mathrm{M}\mathbf{E}$, где L, M — самосопряженные операторы, $L \geqslant 0$, $M > 0$.

Теорема [1]. *Предельный спектр задачи* (1) *содержит бесконечно-кратные зоны, которые определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений на силовых линиях*

$$(d_s^2 \pm \delta k\, d_s + \omega^2 a^{-2})\,u_\pm = 0;\qquad u_\pm|_{0,S} = 0;$$

здесь s — длина вдоль силовой линии, S — ее общая длина, δk — разность главных кривизн поверхностей $F = \mathrm{const}$.

Поведение собственных функций предельного спектра удается изучить при наличии той или иной групповой симметрии задачи (1). Ниже предполагается, что $\Omega \equiv I^3$ — куб со стороной $I = [0, \pi]$, а $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$.

2°. Коэффициенты (1) постоянны. На подпространстве $H_n = \{f(x, y), g(x, y)\}\sin nz$ предельный спектр состоит из одной бесконечнократной точки $\omega = na$, ей отвечают собственные функции вида $(\Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\sin nz$, где Φ — произвольная финитная обобщенная функция.

3°. Коэффициенты (1) зависят только от x. На подпространстве $H_n^m = \{f(x)\sin my, g(x)\cos my\}\sin nz$ предельный спектр состоит из одной зоны $\Lambda_n = U_x na(x)$. Собственные функции являются обобщенными и имеют особенности при $x = x_\omega$ таком, что $na(x_\omega) = \omega$, которые находятся методом Фробениуса. Справедлива теорема о разложении по этим собственным функциям [1]. Одномерная задача является частным случаем теории систем с нераспространяющимися возмущениями, которая описывает также аналогичные задачи гидродинамики, теории оболочек [2] и других одномерно неоднородных сред с сильной анизотропией [3].

Случай коэффициентов, зависящих от x, z, рассматривается аналогично [4].

4°. Коэффициенты (1) зависят от x, y. На H_n предельный спектр состоит из одной зоны $\Lambda_n = U_{x,\,y\in I}\, na(x, y)$ и является бесконечнократным. Если зависимость от x, y слабая, то потенциальная часть Φ поля $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению и краевым условиям

$$(2)\qquad L\Phi = \mathrm{div}\,(n^2 - \omega^2 a^{-2})\,\mathrm{grad}\,\Phi = 0;\qquad \Phi|_{\partial I^2} = 0.$$

При $\omega \in \Lambda_n$ существует линия параболичности l_ω, которую мы параметризуем параметром μ, разделяющая I^2 на односвязные области эллиптичности $I^2_\pm$ для (2). Уравнение (2) следует рассматривать отдельно в I^2_+ и I^2_-. Можно показать, что существуют такие координаты $(x', y')_\pm$, что в них $L_\pm$ являются цилиндрическими частями эллиптических операторов $M_\pm$ с гёльдеровыми коэффициентами, что позволяет искать обобщенное решение (2) в виде $\Phi_\mu = \{\Phi_{\mu+}, x, y \in I^2_+; \Phi_{\mu-}, x, y \in I^2_-\}$, где $\Phi_{\mu\pm}$ — цилиндрически симметричные фундаментальные решения операторов $M_\pm$, записанные в координатах (x, y): $\Phi_{\mu\pm} = r_\pm^{-1}(x, y; x(\mu), y(\mu)) + g_{\mu\pm}(x, y)$.

Теорема [5]. *Инвариантное подпространство, отвечающее* $\omega \in \Lambda_n$, *состоит из обобщенных функций, имеющих вид* $\Phi_\varphi = \int\limits_{l_\omega} \Phi_\mu \varphi(\mu) d\mu$, *где* φ — *произвольная обобщенная функция* μ.

Пример: при $a^{-2}(x, y) = x + c$ уравнение (2) имеет частное решение вида $(x_1^2 + (y - \mu)^2)^{-1/2}$, где $x_1 = x + c - n^2\omega^{-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Крылов, А. Е. Лифшиц, Е. Н. Фёдоров. О резонансных свойствах магнитосферы.— Изв. АН, сер. Физика Земли, 1981, № 6, с. 49—58.

[2] А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. Свободные колебания тонких упругих оболочек.— М.: Наука, 1979.

[3] А. Л. Крылов, А. Е. Лифшиц. О гиперболических системах с нераспространяющимися возмущениями.— ДАН, 1980, **252**:5, с. 1048—1051.

[4] C. E. Kieras, J. A. Tataronis. The shear Alfven continuous spectrum.— J. Plasma Phys., 1982, **28**:3, p. 395—414.

[5] А. Л. Крылов, А. Е. Лифшиц. Ленгмюровские колебания трехмерно неоднородной плазмы.— ДАН, 1984.

Заседание 16 ноября 1983 г.

1. М. В. Федорюк «Дифракция на вытянутых телах вращения».

Содержание доклада опубликовано в статье:

М. В. Федорюк. Дифракция плоской волны на вытянутом теле вращения.— ДАН, 1983, **272** : 3, с. 587—590.

Заседание 23 ноября 1983 г.

1. В. А. Васильев «Локальное условие Петровского и теория Пикара — Лефшеца».

Как известно (см., например, [1]), фундаментальное решение E задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ голоморфно вне волнового фронта этого уравнения. Условие регулярного поведения («резкости») решения E при приближении к фронту тесно связано с некоторым топологическим условием — локальным условием Петровского (л.у.). Согласно [1], л.у. является достаточным, а вблизи неособых точек фронта — и необходимым условием резкости.

Было рассказано доказательство того, что и для любой точки фронта почти любого гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами л.у. эквивалентно резкости. Дадим точные формулировки. Пусть $A \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ — проективизация конуса нулей характеристического полинома нашего уравнения.

Определение. Точка $y \neq 0$ волнового фронта определяет дискретную мультиособенность, если гиперплоскость $Y \subset \mathbb{C}P^{n-1}$, ортогональная вектору y, трансверсальна хотя бы одной стратификации Уитни поверхности A всюду, за исключением конечного числа неособых точек A .

Теорема 1. *Для любой точки* $y \neq 0$, *определяющей дискретную мультиособенность, и для любой достаточно близкой к* y *точки* x *дополнения к фронту, л.у. в точке* x *эквивалентно резкости* E *со стороны содержащей* x *компоненты дополнения к фронту.*

Удобным средством при проверке л.у. является *локальный класс Петровского*, в простейшем случае определяемый следующим образом. Пусть a — единственная точка касания Y и A, причем a вещественна; $D \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ — маленький шарик с центром в a. Для близкой к y точки x дополнения к фронту цикл Петровского (см., например, [1]) определяет класс в группе $H_{n-2}(X - A)$ (где $X = x^{\perp} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$), а следовательно, и в $\widetilde{H}^{n-3}(X \cap A \cap D) \cong H_{n-2}(X \cap D - A, \partial D)$ (где $\cong$ — это композиция изоморфизма Пуанкаре и оператора взятия трубки). Локальный класс Петровского $\Pi(x)$ — это образ цикла Петровского в $\widetilde{H}^{n-3}(X \cap A \cap D)$. (В общем случае $\Pi(x)$ — это класс в когомологиях некоторого пучка с носителем в множестве касания A и Y.)

Теорема 2. $\Pi(x) = 0 \Longleftrightarrow$ *выполнено л.у.*

Пусть $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}$ — линейные вещественные координаты некоторой аффинной карты в $\mathbb{C}P^{n-1}$ с центром в a, причем $Y = \{\eta = 0\}$. Тогда A локально задано некоторым уравнением $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2})$, X — уравнением $\eta = x_0 + \sum x_i\xi_i$, а следовательно, $X \cap A$ — уравнением $f^{(x)} \equiv f - x_0 - \sum x_i\xi_i = 0$. Семейство функций $f^{(x)}$ является деформацией функции f. В этой деформации плотны морсовские функции, а следовательно, к исследованию множеств $X \cap A \cap D$ применимы методы локальной теории Пикара — Лефшеца, см., например, [2]; именно эти методы позволяют доказать теорему 1 и следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть A и Y касаются по единственной вещественной точке a и особенность соответствующей функции f имеет один из типов A_k, D_k, E_k. Тогда:* 1) *для любой морсовизации $f^{(x)}$ класс $\Pi(x)$ явно выражается через диаграмму Дынкина особенности f и индексы Морса вещественных особых точек функции $f^{(x)}$;* 2) *если наш гиперболический оператор — общего положения, то число $\varkappa(a)$ локальных компонент дополнения к фронту, со стороны которых E резко, удовлетворяет следующим условиям:* а) $\varkappa(a) \leqslant 3$; б) *n четно* $\Longrightarrow (\varkappa(a) \geqslant 1 \Longleftrightarrow f$ *локально диффеоморфна функции* $\varphi + \xi_3^2 + \ldots + \xi_l^2 - \xi_{l+1}^2 - \ldots - \xi_{n-2}^2$, *где либо l четно*, $\varphi = \pm(\xi_1^{2p} + \xi_2^2)$, *либо l нечетно*, $\varphi = \xi_1^2\xi_2 - \xi_2^{2p-1})$; в) *$n$ нечетно* $\Longrightarrow (\varkappa(a) = 0 \Longleftrightarrow \varkappa(a) \neq 1 \Longleftrightarrow f$ *диффеоморфна* $(\xi_1^{2k+1} + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{2l}^2 - \xi_{2l-1}^2 - \xi_n^2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. F. Atiyah, R. Bott, L. Garding. Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients.— Acta Math., 1973, **131**, p. 145—206.

[2] С. М. Гусейн-Заде. Группы монодромии изолированных особенностей гиперповерхностей.— УМН, 1977, **32**: 2, с. 23—65.

Заседание 30 ноября 1983 г.

1. А. В. Михайлов (Черноголовка) «Алгебраическая структура пар Лакса и метод преобразования Римана».

Заседание 7 декабря 1983 г.

1. Б. А. Дубровин «Спектр матричных конечнозонных операторов».

Развитие методов интегрирования периодической задачи для уравнений теории солитонов (см. [1], гл. II) требует исследования спектра несамосопряженных операторов порядка выше второго с периодическими коэффициентами. Центральное место в таком исследовании занимает изучение характерных свойств спектра конечнозонных операторов, проводимое в рамках теории вещественных римановых поверхностей.

Мы рассматриваем J-самосопряженные $n \times n$-операторные пучки

$$(1)\qquad L(\lambda) = i\partial_x + \lambda A - U(x), \quad A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n), \quad U^* = JUJ,$$

где $J = \operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, λ — спектральный параметр. Пучок $L(\lambda)$ конечнозонный, если существует матричный полином $M(x, \lambda)$, коммутирующий с $L(\lambda)$. Коэффициенты оператора $L(\lambda)$ тогда периодические или почти периодические, и риманова поверхность Γ его блоховской функции имеет вид

$$(2)\qquad R(\lambda, \nu) = \det | \nu \cdot 1 - M(x, \lambda) | = 0.$$

Можно считать, что полином $M(x, \lambda)$ также удовлетворяет условию J-самосопряженности $(M(x, \bar{\lambda}))^* = JM(x, \lambda)J$. Риманова поверхность Γ блоховской функции является вещественной, т. е. допускает антиголоморфную инволюцию τ: $(\lambda, \nu) \mapsto (\bar{\lambda}, \bar{\nu})$. Неподвижные овалы инволюции τ являются разрешенными зонами спектра пучка $L(\lambda)$. Других разрешенных зон нет, если выполнено условие самосопряженности $JA > 0$. Основной проблемой спектральной теории матричных конечнозонных операторных пучков $L(\lambda)$ является описание класса вещественных римановых поверхностей (Γ, τ), на которых задана еще мероморфная функция степени n — спектральный параметр λ, где $\tau^*\lambda = \bar{\lambda}$, являющихся римановыми поверхностями блоховских функций J-самосопряженных операторных пучков вида (1). Это описание, фактически полученное в [2], таково:

1) Бесконечноудаленные точки $\lambda^{-1}(\infty)$ поверхности Γ неподвижны относительно τ.

2) Вещественная часть Γ_{Re} разделяет поверхность Γ на две половины Γ_+ и Γ_-, $\tau\Gamma_+ = \Gamma_-$.

3) Ориентируем Γ_{Re} как край одной из половин (скажем, Γ_+). Тогда степень отображения λ: $\Gamma_{\mathrm{Re}} \to RP^1$ равна сигнатуре матрицы J (с точностью до знака).

Свойства 2), 3) доказаны при дополнительном предположении компактности изоспектрального класса пучка $L(\lambda)$ с данным спектром Γ, справедливым, по-видимому, для пучков общего положения.

Дальнейшая классификация спектра (Γ, τ, λ) при $J \neq 1$ приводит к задачам вещественной алгебраической геометрии, сводящимся в простейшем случае $\deg M(x, \lambda) = 1$ к описанию расположений на RP^2 троек (Γ, P_0, l), где Γ — плоская вещественная комплексно-ориентируемая кривая степени n, $P_0 \notin \Gamma$ — точка в RP^2, l — прямая на RP^2, проходящая через P_0 и пересекающая Γ в n точках.

Укажем спектральную интерпретацию ориентации на Γ_{Re}, полезную, в частности, для сопоставления с результатами М. Г. Крейна и Г. Я. Любарского [3]. Пусть коэффициенты оператора (1) периодические с периодом T, и выполнено условие самосопряженности $JA > 0$. В этом случае мультипликаторы $\mu(P)$ оператора $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda) \times \times \bar{\psi}^t(x, P) = 0$, $\psi(x + T, P) = \mu(P)\psi(x, P)$, $P = (\lambda, \nu)$, на вещественной части Γ_{Re} поверхности Γ унимодулярны (т. е. Γ_{Re} — совокупность разрешенных зон спектра). Тогда указанной выше ориентации на Γ_{Re} отвечает направление возрастания аргумента мультипликатора $\mu(P)$, $P \in \Gamma_{\mathrm{Re}}$. В точках $P \in \Gamma_{\mathrm{Re}}$, где $\deg \lambda = \pm 1$, мультипликаторы $\mu(P)$ являются, соответственно, мультипликаторами 1-го и 2-го рода в смысле [3], т. е. $\operatorname{sign} \bar{\psi}^t J\psi = \pm 1$ (фактически это доказано в [3]).

Интересно отметить, что для другого естественного класса операторов $L(\lambda)$, где $\mathrm{Re}\, U = 0$, вещественная риманова поверхность Γ вида (2) всегда имеет максимально возможное число овалов (на единицу превышающее род).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Теория солитонов/Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.

[2] Б. А. Дубровин. Матричные конечнозонные операторы.— В сб.: Современные проблемы математики, ВИНИТИ, 1983, **23**, с. 33—78.

[3] М. Г. Крейн, Г. Я. Любарский. Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа.— Изв. АН, сер. матем., 1962, **26**: 4, с. 542—572.