

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК, А. Г. ГОРШКОВ,
Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ГИДРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЫ

При исследовании взаимодействия слабых ударных волн с упругими телами, погруженными в жидкость, представляют интерес задачи, где движение тела описывается уравнениями линейной теории упругости. Применительно к объектам сферической формы эти задачи рассматривались в (1-3). В (1, 2) решение проводилось при помощи преобразования Лапласа по времени, в (1) обратный переход выполнялся численно, а в (2) найдено асимптотическое поведение решения, справедливое для начальных моментов времени. В (3) дана общая постановка задачи дифракции акустической волны на толстостенной упругой сфере и определены гидродинамические силы взаимодействия. Здесь исследуются радиальные колебания упругой сферы, погруженной в акустическую среду, при действии давления, внезапно приложенного к ее внешней поверхности.

Рассмотрим однородную изотропную толстостенную упругую сферическую оболочку с внешним радиусом $R=b$ и внутренним $R=a$. В начальный момент времени $t=0$ система находится в покое, а затем к внешней поверхности сферы прикладывается равномерно распределенное давление $p(t)$. Внутренняя поверхность считается свободной от напряжений.

Тогда для определения движения сферы будем иметь следующую краевую задачу (3):

$$\begin{aligned} \gamma^2 \partial^2 u / \partial \tau^2 &= \partial^2 u / \partial r^2 + (2/r) \partial u / \partial r - 2u/r^2, \\ \sigma_r(1, \tau) &= \partial u / \partial r + 2\kappa u/r \Big|_{r=1} = -p(\tau) - p_1(\tau), \\ \sigma_r(1-\delta, \tau) &= \partial u / \partial r + 2\kappa u/r \Big|_{r=1-\delta} = 0, \\ u(r, 0) &= \partial u(r, 0) / \partial \tau = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь r, τ, u, σ_r, p — безразмерные радиус, время, радиальные перемещение и напряжение, давление в жидкости, причем (штрих здесь и далее означает размерную величину)

$$\begin{aligned} r &= R/b, \quad \tau = c_0 t/b, \quad u = u'/b, \quad \sigma = \sigma' / (\lambda + 2\mu), \\ p &= p' / (\lambda + 2\mu), \quad \gamma = c_0 / c_1, \quad \delta = (b-a)/b, \quad \kappa = \lambda / (\lambda + 2\mu), \end{aligned}$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе, c_0 — скорость звука в жидкости, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho_1}$ — скорость распространения волн растяжения — сжатия в упругом материале, ρ_1 — плотность материала сферы.

Давление излучения $p(\tau)$ определяется формулой (4)

$$p_1(\tau) = -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} (1, \tau) * \chi_0(\tau) \right], \quad \beta = \frac{\rho_0 c_0}{\lambda + 2\mu}, \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность жидкости, $\chi_0 = \exp(-\tau)$ — переходная функция (4).

Учитывая известное представление решения уравнения (1) в виде суммы сходящихся и расходящихся сферических волн (5, 6) и то, что решение ищется на конечном отрезке $r \in [1-\delta, 1]$, представим перемещение u

в виде

$$u(r, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \{u_{0k}H[\tau - \gamma(1-r+2k\delta)] + u_{1k}H[\tau - \gamma(r-1+2(k+1)\delta)]\},$$

$$u_{0k} = f_{0k}'[\tau - \gamma(1-r+2k\delta)]/r - f_{0k}[\tau - \gamma(1-r+2k\delta)]/\gamma r^2,$$

$$u_{1k} = f_{1k}[\tau - \gamma(r-1+2(k+1)\delta)]/r + f_{1k}'[\tau - \gamma(r-1+2(k+1)\delta)]/\gamma r^2,$$
(3)

где f_{0k} , f_{1k} , $k=0, 1, \dots$, — произвольные функции, $H(x)$ — единичная функция Хевисайда.

Очевидно, начальные условия задачи (1) будут удовлетворены, если положить

$$f_{0k}^{(i)}(0) = f_{1k}^{(i)}(0) = 0, \quad i=0, 1, 2. \quad (4)$$

Используя выражение радиальных напряжений через перемещения, найдем

$$\sigma_r(r, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\sigma_{0k}H[\tau - \gamma(1-r+2k\delta)] + \sigma_{1k}H[\tau - \gamma(r-1+2(k+1)\delta)]\},$$

$$\sigma_{0k} = \gamma f_{0k}''[\tau - \gamma(1-r+2k\delta)]/r - 2(1-\kappa)u_{0k}/r,$$

$$\sigma_{1k} = -\gamma f_{1k}''[\tau - \gamma(r-1+2(k+1)\delta)]/r - 2(1-\kappa)u_{1k}/r.$$
(5)

Из граничных условий задачи (1) с учетом выражений (3) и (5) получим рекуррентную систему для определения функций f_{0k} и f_{1k}

$$\sigma_{00}|_{r=1} = -p(\tau) - \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u_{00}}{\partial \tau} \Big|_{r=1} * \chi_0(\tau) \right],$$

$$\sigma_{1k}|_{r=1-\delta} + \sigma_{0k}|_{r=1-\delta} = 0, \quad k=0, 1, \dots,$$

$$\sigma_{0,k+1}|_{r=1} + \sigma_{1k}|_{r=1} = -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial (u_{0,k+1} + u_{1k})}{\partial \tau} \Big|_{r=1} * \chi_0(\tau) \right].$$
(6)

Применим к (6) преобразование Лапласа по времени τ , принимая во внимание (2)–(6). В результате будем иметь (прописными буквами обозначены трансформанты соответствующих функций):

$$F_{00}(s) = -(1+s)P(s)/L_0(s),$$

$$F_{1k}(s) = \frac{N_0(s)}{N_1(s)} F_{0k}(s), \quad F_{0,k+1}(s) = \frac{L_1(s)}{L_0(s)} F_{1k}(s);$$

$$N_0(s) = a_0 s^2 - a_1 s + a_2, \quad N_1(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2; \quad (7)$$

$$L_0(s) = d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3, \quad L_1(s) = h_0 s^3 + h_1 s^2 + h_2 s + h_3;$$

$$a_0 = \gamma^2(1-\delta)^2, \quad a_1 = 2\gamma(1-\kappa)(1-\delta), \quad a_2 = d_3 = h_3 = 2(1-\kappa);$$

$$d_0 = \gamma(\gamma + \beta), \quad d_1 = \gamma[\gamma - 2(1-\kappa)] - \beta, \quad d_2 = 2(1-\kappa)(1-\gamma);$$

$$h_0 = \gamma(\gamma - \beta), \quad h_1 = \gamma[\gamma + 2(1-\kappa)] - \beta, \quad h_2 = 2(1-\kappa)(1+\gamma),$$

где s — параметр преобразования Лапласа.

Решая рекуррентную систему (7) и учитывая (3) и (5), получим формулы для перемещений $U(r, s)$ и радиальных напряжений $S_r(r, s)$ в поле изображений

$$U(r, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \{U_{0k} \exp[-\gamma s(1-r+2k\delta)] + U_{1k} \exp[-\gamma s(r-1+2(k+1)\delta)]\},$$

$$S_r(r, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \{S_{0k} \exp[-\gamma s(1-r+2k\delta)] + S_{1k} \exp[-\gamma s(r-1+2(k+1)\delta)]\} -$$

$$-2(1-\kappa)U(r, s)/r,$$

$$\begin{aligned}
U_{0k} &= -P(s)(1+s)(\gamma rs - 1)N^k(s)L^k(s)/r^2L_0(s), \\
U_{1k} &= -P(s)(1+s)(\gamma rs + 1)N^{k+1}(s)L^k(s)/r^2L_0(s), \\
S_{0k} &= -P(s)\gamma^2s^2(1+s)N^k(s)L^k(s)/rL_0(s), \\
S_{1k} &= -P(s)\gamma^2s^2(1+s)N^{k+1}(s)L^k(s)/rL_0(s), \\
N(s) &= N_0(s)/N_1(s), \quad L(s) = L_1(s)/L_0(s).
\end{aligned} \tag{8}$$

Можно показать, что кольцевые напряжения σ_i выражаются следующим образом:

$$\sigma_i = \kappa \sigma_\tau + (1 + \kappa - 2\kappa^2)u/r. \tag{9}$$

Оригиналы искомым функций в (8) определяются при помощи вычетов. Покажем, например, возможный путь точного обращения выражения для U_{0k} .

Из (8) следует рекуррентное соотношение

$$U_{0, k+1} = U_{0k}N(s)L(s). \tag{10}$$

Найдем вычет $U_{0, k+1} \exp(s\tau)$ в точке $s=s_0$, где $N_1(s_0)=0$. Очевидно, $s=s_0$ является полюсом кратности $k+1$. Тогда

$$\operatorname{res}_{s_0} U_{0, k+1} \exp(s\tau) = \sum_{i=0}^k \tau^i \exp(s_0\tau) V_{0, k+1}^{(k-i)}(s_0)/i!,$$

$$V_{0, k+1}^{(j)}(s_0) = [(s-s_0)^{k+1}U_{0, k+1}]_{s=s_0}^{(j)}/j!,$$

Для отыскания совокупности производных $V_{0, k+1}^{(j)}$, $j=0, \dots, k$, из (10) получим следующие рекуррентные формулы:

$$V_{0, k+1}^{(j)} = \sum_{p=0}^j V_{0k} H_0^{(j-p)}$$

$$H_0^{(j-p)} = [(s-s_0)N(s)L(s)]^{(j-p)}/(j-p)!,$$

последовательно применяя которые при известных производных функций V_{00} и H_0 , найдем производные для любой из функций V_{0k} .

Функции V_{00} и H_0 являются рациональными функциями типа $R(s) = Q_1(s)(s-s_0)/Q_2(s)$, где $Q_1(s)$ и $Q_2(s)$ — полиномы, а s_0 — ноль функции $Q_2(s)$. Производные этих функций можно вычислять по следующим рекуррентным формулам, которые вытекают из формулы Лейбница:

$$R^{(l)}(s_0) = Q_1^{(l)}(s_0)/Q_2'(s_0) - \sum_{m=1}^l R^{(l-m)}(s_0)Q_2^{(m+1)}(s_0)/Q_2'(s_0),$$

$$R^{(l)} = \frac{1}{l!} \frac{d^{(l)}R}{ds^l}, \quad Q_i = \frac{1}{l!} \frac{d^{(l)}Q_i}{ds^l}, \quad i=1, 2.$$

Итак, формулы (8), (9) в совокупности с приведенным алгоритмом обращения дают полное решение исходной задачи.

В качестве примера рассмотрим стальную сферическую оболочку, погруженную в воду ($\kappa=0,393$; $\gamma=0,252$; $\beta=0,00862$). Пусть давление $p(\tau)$ изменяется по закону $p(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \Delta\tau)$.

Результаты расчетов приведены на рис. 1–3. Кривые 1–3 на рис. 1 демонстрируют влияние толщины сферы на перемещения, точками 5 показаны значения, соответствующие случаю $\beta=0$. Из сравнения 5 с графиком 1 видно, что наличие жидкости оказывает демпфирующее влияние.

Для толщины $\delta=0,05$ по методике (7) было построено решение аналогичной задачи для сферы, движение которой описывается уравнениями теории тонких оболочек. Различие по максимальным перемещениям для двух типов решения составило $\approx 11,8\%$, а по кольцевым напряжениям $\approx 9,4\%$.

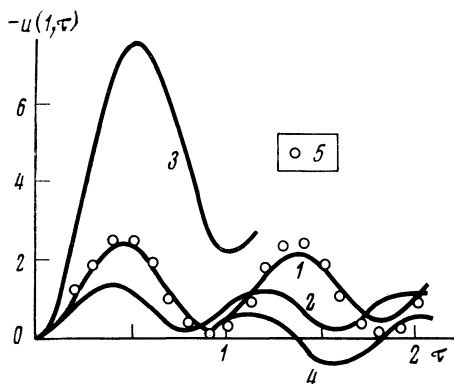


Рис. 1

Рис. 1. Радиальные перемещения на внешней поверхности сферы. 1 - $\beta = \Delta\tau = \infty$, $1 - \delta = 0,3$; 2 - $\delta = 0,5$; 3 - $\delta = 0,1$; 4 - $\delta = 0,3$; $\Delta\tau = 1$; 5 - $\delta = 0,3$; $\Delta\tau = \infty$, $\beta = 0$

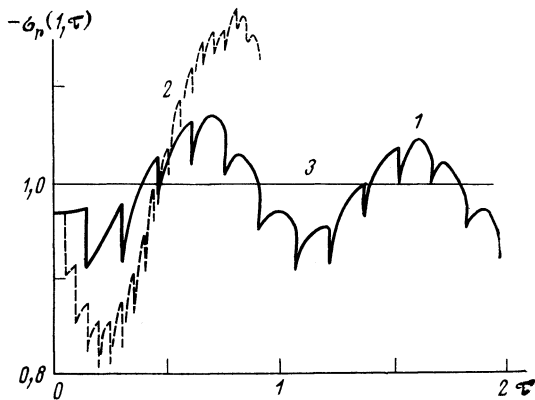


Рис. 2

Рис. 2. Изменение радиальных напряжений во времени ($r=1$, $\Delta\tau = \infty$). 1 - $\delta = 0,3$; 2 - $\delta = 0,1$; 3 - статическое решение

Рис. 3. Распространение волны кольцевых напряжений ($\delta = 0,5$, $\Delta\tau = \infty$). 1 - $\tau = 0,05$; 2 - $\tau = 0,1$; 3 - $\tau = 0,15$; 4 - $\tau = 0,25$

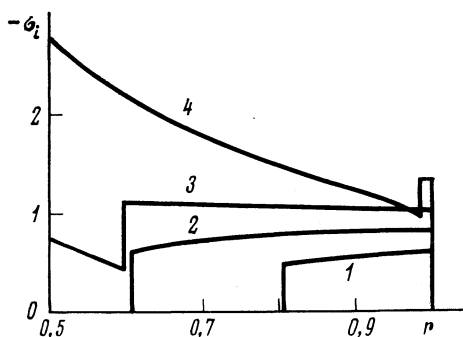


Рис. 3

На рис. 2 показан разрывный характер изменения радиальных напряжений (3 - решение задачи Ламе при $\delta = 0,3$). Моменты возникновения разрывов соответствуют времени прихода в данную точку элементарных волн. В отличие от тонких оболочек давление на внешней поверхности сферы в начальный момент времени отлично от единицы, $p(1, 0) = -\sigma_r(1, 0) = (\gamma - \beta) / (\gamma + \beta)$, что соответствует (2).

Характер распространения волны кольцевых напряжений σ_θ по толщине оболочки представлен на рис. 3, причем кривые 1, 2 соответствуют первой сходящейся волне, а 3, 4 - первой расходящейся волне.

Институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ B. S. Berger, Trans. ASME, E 36, № 2, 342 (1969). ² Н. Д. Векслер, Акустический журнал, т. 21, в. 5, 694 (1975). ³ Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский, ДАН, т. 230, № 1, 60 (1976). ⁴ Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков, Нестационарная гидроупругость оболочек, Л., «Судостроение», 1974. ⁵ С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер, Теория упругости, М., «Наука», 1975. ⁶ L. Wheeler, J. Acoust. Soc. Am., v. 53, № 2, 521 (1973). ⁷ M. J. Forrestal, M. J. Sagarz, Trans. ASME, E 38, № 4, 1057 (1971).