A. A. Slavnov, S. A. Frolov, Quantization of non-Abelian antisymmetric tensor field,
TMF, 1988, Volume 75, Number 2, 201–211

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 75, № 2
май, 1988

КВАНТОВАНИЕ НЕАБЕЛЕВА АНТИСИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ

Славнов А. А., Фролов С. А.

Исходя из канонической процедуры квантования получено явно лоренц-инвариантное выражение для матрицы рассеяния антисимметричного тензорного поля. На квантовом уровне доказана эквивалентность этой теории нелинейной сигма-модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе рассматривается вопрос о квантовании систем с функционально зависимыми связями. Простейшим и одним из наиболее важных примеров таких систем является антисимметричное тензорное поле, участвующее в моделях супергравитации, релятивистских струн и т. д. [1–6]. Лагранжиан взаимодействующего тензорного поля был впервые выписан в работе [7], где была показана на классическом уровне его эквивалентность нелинейной сигма-модели. Процедура квантования калибровочных полей, отработанная на примере теории Янга – Миллса, нуждается в этом случае в модификации. Каноническое квантование свободного антисимметричного тензорного поля было проведено в работе [8], а общий случай системы с линейно зависимыми связями был рассмотрен в работе [9]. Однако попытки перехода к ковариантным калибровкам сталкиваются в этом случае с трудностями, которые обсуждались в работах [10–11]. Одним из возможных путей обхода этих трудностей является метод квантования Бекки – Рюэ – Стора – Тютина (БРСТ). Свободное тензорное поле было проквантовано в рамках этого метода в работе [12]. Взаимодействующее поле рассматривалось в работе [13], а общий случай систем с линейно зависимыми связями – в работе [14]. Однако в этих работах не исследовался вопрос о физической унитарности теории и о связи полученного релятивистски-инвариантного результата с каноническим квантованием.

В данной работе мы получим явно ковариантное выражение для матрицы рассеяния исходя из канонической процедуры квантования, что гарантирует унитарность S-матрицы. Полученный нами результат расходится с результатом работы [13], из чего мы делаем вывод, что предложенная в этой работе S-матрица не унитарна в пространстве физических состояний.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАВИСИМЫМИ СВЯЗЯМИ

Поскольку исходным пунктом в нашем потроении явно ковариантной S-матрицы будет канонический формализм, мы изложим здесь процедуру квантования систем с зависимыми связями в удобном для нас виде. Эта формулировка является прямым обобщением метода, описанного в монографии [15].

Рассмотрим обобщенную гамильтонову систему с n степенями свободы, которая описывается лагранжианом

$$(2.1)\qquad \mathscr{L}=p_i\dot{q}_i-h(p,\ q)+\lambda_a\varphi_a(p,\ q);\ a=1,\ldots,l.$$

В формуле (2.1) p_i, q_i — канонические переменные, $\varphi_a(p,\ q)$ — связи, λ_a — множители Лагранжа. Не все связи φ_a независимы. Не ограничивая общности, можно считать, что независимы первые m связей φ_α $(m<n)$. В дальнейшем всегда индексы i, j, k пробегают значения $1,\ 2,\ldots,n$, а индексы a, b, $c=1,\ldots,l$; α, β, $\gamma=1,\ldots,m$. Связи φ_α удовлетворяют условиям

$$(2.2)\qquad \{h,\ \varphi_a\}=A_{ab}(p,\ q)\varphi_b;\quad \{\varphi_a,\ \varphi_b\}=A_{abc}\varphi_c$$

с некоторыми коэффициентами A_{ab} и A_{abc}, которые могут зависеть от p и q.

Эта система эквивалентна обычной гамильтоновой системе с $n-m$ степенями свободы. Фазовое пространство $\Gamma^{*\,2(n-m)}$ обычной гамильтоновой системы является подпространством фазового пространства Γ^{2n} нашей системы и может быть реализовано следующим образом [15]. Введем m дополнительных условий χ_α, которые удовлетворяют требованиям

$$(2.3)\qquad \det\{\chi_\alpha,\ \varphi_\beta\}\neq 0,$$

$$(2.4)\qquad \{\chi_\alpha,\ \chi_\beta\}=0.$$

Тогда фазовое пространство $\Gamma^{*\,2(n-m)}$ определяется системой уравнений

$$(2.5)\qquad \varphi_\alpha(p,\ q)=0,\quad \chi_\alpha(p,\ q)=0,\quad \alpha=1,\ldots,m.$$

Найдем канонические переменные системы $\Gamma^{*\,2(n-m)}$. Условие (2.4) показывает, что канонические переменные обобщенной гамильтоновой системы можно выбрать так, что первые m координат совпадут с дополнительными условиями $\chi_\alpha : q=(\chi_\alpha,\ q^*)$. Если $p=(p_\alpha,\ p^*)$ — соответствующие сопряженные импульсы, то в силу условия (2.3) и уравнений связи переменные p_α можно выразить через p^* и q^*. В этом случае фазовое пространство $\Gamma^{*\,2(n-m)}$ является подпространством в Γ^{2n}, задаваемым уравнениями

$$(2.6)\qquad \chi_\alpha=q_\alpha=0;\quad p_\alpha=p_\alpha(p^*,\ q^*),$$

и переменные p^* и q^* — канонические переменные системы $\Gamma^{*\,2(n-m)}$. Гамильтониан этой системы равен

$$(2.7)\qquad h^*(p^*,\ q^*)=h(p,\ q)\,|_{\varphi=0,\ \chi=0}.$$

Система Γ^{2n} эквивалентна системе $\Gamma^{*\,2(n-m)}$, т. к. уравнения движения для переменных p и q обобщенной гамильтоновой системы совпадают с гамильтоновыми уравнениями для переменных p^* и q^*, если в качестве гамильтониана выбрана функция $h^*(p^*, q^*)$. Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет соответствующее доказательство для обобщенной гамильтоновой системы с независимыми связями [12] и здесь приводиться не будет.

При переходе к квантовой теории канонические перестановочные соотношения накладываются на переменные p^* и q^*. Оператор эволюции дается обычной формулой

$$(2.8)\qquad U=\int dp^*\,dq^*\exp\left\{i\int(p^*\dot{q}^*-h^*(p^*,q^*))\,dt\right\}.$$

Вводя в эту формулу интегрирование по p_α, q_α, λ_α, получаем

$$(2.9)\qquad U=\int dp\,dq\,d\lambda\,\delta(\chi_\alpha)\prod_{a=m+1}^{l}\delta(\lambda_a)\det\{\varphi_\alpha,\chi_\beta\}\exp\left\{i\int(p_i\dot{q}_i-h(p,q)+\right.$$
$$\left.+\lambda_a\varphi_a)\,dt\right\}.$$

3. КВАНТОВАНИЕ АНТИСИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ ВТОРОГО РАНГА

Применим описанную выше схему для квантования антисимметричного тензорного поля второго ранга $B_{\mu\nu}$. Калибровочно-инвариантный лагранжиан антисимметричного тензорного поля имеет вид [7]

$$(3.1)\qquad \mathcal{L}={}^1/_4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}{}^aB_{\rho\sigma}{}^a+{}^1/_2(H_\mu{}^a)^2,$$
$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu H_\nu-\partial_\nu H_\mu-[H_\mu,\ H_\nu].$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$(3.2)\qquad \delta H_\mu=0,\quad \delta B_{\mu\nu}=\nabla_\mu\xi_\nu-\nabla_\nu\xi_\mu,$$

где $\nabla_\mu=\partial_\mu-[H_\mu,\ \cdot\,]$ — ковариантная производная, поля $B_{\mu\nu}$, H_μ и ξ_μ принимают значения в присоединенном представлении алгебры Ли компактной простой группы Ω. Лагранжиан (3.1), как было показано в работе [7], в классической теории эквивалентен нелинейной сигма-модели, а линеаризованный лагранжиан после интегрирования по H_μ сводится к лагранжиану свободного антисимметричного тензорного поля $B_{\mu\nu}$.

Перейдем к гамильтоновой форме теории. Исключая переменные H_0 с помощью уравнений, не содержащих производных по времени, перепишем действие, отвечающее (3.1), в гамильтоновой форме

$$(3.3)\qquad \int\mathcal{L}(x)\,dx=\int\left(H_i{}^a\partial_0B_i{}^a-\frac{1}{2}(H_i{}^a)^2-\frac{1}{2}((\nabla_iB_i)^a)^2+B_{i0}{}^aC_i{}^a\right)dx,$$

где $B_i={}^1/_2\varepsilon_{ijk}B_{jk}$; $C_k=-{}^1/_2\varepsilon_{ijk}F_{ij}$; i, j, $k=1$, 2, 3. Из этой формулы видно, что H_i и B_i — канонические переменные, $h={}^1/_2(H_i{}^a)^2+{}^1/_2((\nabla_iB_i)^a)^2$ — гамильтониан, B_{i0} — множители Лагранжа, а C_i — связи на канонические переменные. Из трех связей C_i только две независимы, т. к. связи C_i удовлетворяют тождеству

$$(3.4)\qquad \nabla_iC_i\equiv0.$$

Таким образом, лагранжиан (3.1) описывает систему из N скалярных частиц, где N — размерность присоединенного представления алгебры Ли калибровочной группы.

В качестве независимых связей мы выберем две первые связи C_r, а в качестве дополнительного условия — калибровку $\partial_k B_{kr}=0$ (эта калибровка аналогична кулоновской калибровке в теории Янга — Миллса). В дальнейшем индекс r пробегает значения 1, 2. В терминах переменных B_i условие калибровки имеет вид

$$\varepsilon_{ikr}\partial_k B_i=0. \tag{3.5}$$

Разбивая B на продольную и поперечную части (B_i^L и B_i^T), убеждаемся, что условие (3.5) означает равенство нулю поперечных компонент B_k^T. Таким образом, истинными переменными нашей системы являются продольные компоненты полей B_i и H_i. Детерминант Фаддеева — Попова в рамках теории возмущений обратим и его удобно записать в виде

$$(\det M_c)^{-1}=\int d\xi_i\delta(\partial_k\nabla_k\xi_r-\partial_k\nabla_r\xi_k)\,\delta(\xi_3). \tag{3.6}$$

Используя формулу (2.9), получаем следующее выражение для S-матрицы:

$$S=\int dH_\mu\, dB_{\mu\nu}\delta(\partial_k B_{kr})\,\delta(B_{30})\det M_c\exp\left\{i\int dx\mathscr{L}(x)\right\}, \tag{3.7}$$

где подразумеваются фейнмановские граничные условия для продольных компонент B и H.

Для построения теории возмущений удобно перейти к релятивистски-инвариантной калибровке, например лоренцевой калибровке $\partial_\mu B_{\mu\nu}$, или к ковариантной калибровке $\nabla_\mu B_{\mu\nu}$. Непосредственное применение трюка Фаддеева — Попова оказывается невозможным, т. к. соответствующий детерминант

$$(\det M')^{-1}=\int d\xi_\mu\delta((\partial_\rho\nabla_\rho g_{\mu\nu}-\partial_\nu\nabla_\mu)\,\xi_\nu) \tag{3.8}$$

вырожден. В свободном случае ($\nabla_\mu\equiv\partial_\mu$) эту трудность можно преодолеть, воспользовавшись тем, что подынтегральное выражение в (3.8) инвариантно относительно калибровочного преобразования $\xi_\mu\to\xi_\mu+\partial_\mu\varphi$. Поэтому к $\det M'$ можно еще раз применить трюк Фаддеева — Попова, в результате чего вырождение будет снято, и появятся дополнительные скалярные духовые поля. Подобная конструкция получила название «духи для духов». Однако в случае взаимодействующей теории подынтегральное выражение в (3.8) не обладает калибровочной инвариантностью, и прямое применение указанной процедуры невозможно.

Чтобы обойти эту трудность, мы вводим дополнительное поле λ_μ и постулируем следующий закон калибровочного преобразования:

$$\lambda_\mu^\xi=\lambda_\mu+\beta\partial_\mu\partial_\rho\xi_\rho,\quad B_{\mu\nu}^\xi=B_{\mu\nu}+\nabla_\mu\xi_\nu-\nabla_\nu\xi_\mu. \tag{3.9}$$

Условие лоренцевой калибровки заменим условием

$$\partial_\mu B_{\mu\nu}+\lambda_\nu=0 \tag{3.10}$$

и для перехода к новой калибровке умножим интеграл (3.7) на «единицу»

$$1=\Delta\int d\xi_\mu\, d\lambda_\mu\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\int\lambda_\mu^2\,dx\right\}\delta(\partial_\mu B_{\mu\nu}^\xi+\lambda_\nu^\xi), \tag{3.11}$$

где

$$(3.12)\qquad \Delta=\det M=\det(\partial_\rho\nabla_\rho g_{\mu\nu}-\partial_\nu\nabla_\mu+\beta\partial_\mu\partial_\nu).$$

Детерминант Δ в теории возмущений обратим.

Делая замену переменных $B^\xi\to B$, $\lambda^\xi\to\lambda$, $\xi\to-\xi$ и выполняя явно интегрирование по λ, получаем

$$(3.13)\qquad S=\int dH_\mu\, dB_{\mu\nu}\, d\xi_\mu\delta(\partial_k B_{kr}{}^\xi)\,\delta(B_{30}{}^\xi)\det M_c\Delta\times$$
$$\times\exp\left\{i\int dx\left(\frac{1}{2}\alpha\beta^2\partial_\mu\xi_\mu\Box\partial_\nu\xi_\nu+\mathscr{L}-\frac{\alpha}{2}(\partial_\mu B_{\mu\nu})^2\right)\right\}.$$

Покажем теперь, что в результате интегрирования по ξ возникает множитель $\tilde\Delta$, где

$$(3.14)\qquad (\tilde\Delta)^{-1}=\int d\xi_\mu\delta(\partial_k B_{kr}{}^\xi)\,\delta(B_{30}{}^\xi)\exp\left\{\frac{i\alpha\beta^2}{2}\int dx\,\partial_\mu\xi_\mu\Box\partial_\nu\xi_\nu\right\}$$

— компенсирующий нековариантный фактор $\det M_c$, и S-матрица записывается в явно ковариантном виде. С этой целью заметим, что множитель $\det M_c$, входящий в подынтегральное выражение (3.13), можно преобразовать к виду

$$(3.15)\qquad \det M_c=\tilde\Delta(\det\partial_\mu\nabla_\mu)^{-1}(\det\Box)^{-1/2}.$$

Равенство (3.15) имеет место при условии $F_{\mu\nu}=0$, которое выполняется в кулоновской калибровке. Чтобы убедиться в этом, в формуле (3.9) для S-матрицы в кулоновской калибровке выполним интегрирование по полям $B_{\mu\nu}$:

$$(3.16)\qquad S=\int dH_\mu\delta(C_r)\,\delta(\partial_k F_{k0})\det M_c\exp\left\{i\int dx\frac{1}{2}(H_\mu)^2\right\}.$$

Здесь δ-функция от $\partial_k F_{k0}$ появилась из-за интегрирования по продольной компоненте поля B_i. Если считать, что поперечные компоненты H_μ стремятся к нулю при $|t|\to\infty$, что допустимо, т. к. физической компонентой поля H_μ является его продольная часть, то условия $C_r=0$ и $\partial_k F_{k0}=0$ эквивалентны условию $F_{\mu\nu}=0$.

Перейдем теперь к доказательству равенства (3.14). При нулевых граничных условиях $\det M_c$ можно переписать в виде

$$(3.17)\qquad (\det M_c)^{-1}=\int d\xi_\mu\delta(\partial_k\nabla_k\xi_r-\partial_k\nabla_r\xi_k)\,\delta(\nabla_0\xi_3-\nabla_3\xi_0)\,\delta(\xi_0).$$

Подынтегральное выражение в этой формуле при условии $F_{\mu\nu}=0$ представляет собой калибровочно-инвариантный функционал на поверхности $\xi_0=0$. Поэтому для его преобразования можно опять-таки воспользоваться трюком Фаддеева — Попова. Вводя под интеграл в формуле (3.17) выражение

$$(3.18)\qquad 1=\int d\varphi\exp\left\{\frac{i\alpha\beta^2}{2}\int dx\,\partial_\mu(\xi_\mu+\nabla_\mu\varphi)\Box\partial_\nu(\xi_\nu+\nabla_\nu\varphi)\right\}\times$$
$$\times\det(\partial_\mu\nabla_\mu)\,(\det\Box)^{1/2},$$

делая замену переменных $\xi_\mu \to \xi_\mu - \nabla_\mu \varphi$ и интегрируя по φ, получим

$$(3.19) \qquad (\det M_c)^{-1} = \int d\xi_\mu \delta(\partial_k \nabla_k \xi_r - \partial_k \nabla_r \xi_k) \delta(\nabla_0 \xi_3 - \nabla_3 \xi_0) \times \\ \times \exp\left\{ \frac{i\alpha\beta^2}{2} \int dx\, \partial_\mu \xi_\mu \Box \partial_\nu \xi_\nu \right\} \det(\partial_\mu \nabla_\mu) (\det \Box)^{1/2}.$$

Сравнивая формулы (3.19) и (3.15), мы видим, что они совпадают, если положить в формуле (3.14), определяющей $\tilde{\Delta}$, $B_{\mu\nu}=0$. Нетрудно видеть, однако, что функционал $\tilde{\Delta}$ в действительности не зависит от $B_{\mu\nu}$. Это следует из представления $\tilde{\Delta}$ в виде

$$(3.20) \qquad (\tilde{\Delta})^{-1} = \int d\xi_\mu\, dc \delta(c - \partial_\mu \xi_\mu) \delta(\partial_k B_{kr}{}^\xi) \delta(B_{30}{}^\xi) \times \\ \times \exp\left\{ \frac{i\alpha\beta^2}{2} \int dx\, c \Box c \right\}.$$

Тем самым равенство (3.15) доказано.

Подставляя (3.15) в выражение (3.13) для S-матрицы, получаем окончательное выражение для матрицы рассеяния в ковариантной калибровке:

$$(3.21) \qquad S = \int dH_\mu\, dB_{\mu\nu} \Delta (\det \partial_\mu \nabla_\mu)^{-1} (\det \Box)^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{ i \int dx \left(\mathscr{L} - \frac{\alpha}{2} (\partial_\mu B_{\mu\nu})^2 \right) \right\}.$$

Множитель $(\det \Box)^{-1/2}$ представляет собой тривиальную константу, которую, разумеется, можно опустить. Мы выписали ее явно в формуле (3.21), чтобы сделать наглядным подсчет числа физических степеней свободы: $6-8+2+1=1$ (множитель $(\det \Box)^{-1/2}$ соответствует одному свободному духовому полю).

Вводя явно духовые поля и необходимые множители Лагранжа, формулу (3.21) для S-матрицы можно записать в виде континуального интеграла от локального эффективного действия:

$$(3.22) \qquad S = \int dH_\mu\, dB_{\mu\nu}\, d\bar{c}_\mu\, dc_\mu\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \exp\left\{ i \int dx\, \mathscr{L}_{\text{eff}} \right\},$$

где $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ — эффективный лагранжиан,

$$(3.23) \qquad \mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L} - {}^1\!/_2 \alpha (\partial_\mu B_{\mu\nu})^2 + \bar{c}_\mu (\partial_\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu \nabla_\nu + \beta \partial_\mu \partial_\nu) c_\nu + \varphi_1 \partial_\mu \nabla_\mu \varphi_2.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для S-матрицы в ковариантной калибровке, например $\nabla_\mu B_{\mu\nu}$. Для этого достаточно в формуле (3.11) заменить $\partial_\mu B_{\mu\nu}$ на $\nabla_\mu B_{\mu\nu}$, калибровочное преобразование λ_μ выбрать в виде

$$(3.24) \qquad \lambda_\mu{}^\xi = \lambda_\mu + \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\nu,$$

а детерминант Δ заменить на

$$(3.25) \qquad \Delta' = \det(\nabla^2 g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu + \beta \nabla_\mu \nabla_\nu).$$

Дальнейшие преобразования практически дословно повторяют соответствующие выкладки в случае нековариантной калибровки. В результате мы получаем следующее выражение для S-матрицы:

$$S=\int dH_\mu dB_{\mu\nu}\Delta(\det\nabla^2)^{-3/2}\times \tag{3.26}$$
$$\times\exp\left\{i\int dx\left(\mathscr{L}-\frac{\alpha}{2}((\nabla_\mu B_{\mu\nu})^2+\nabla_\mu\nabla_\nu B_{\mu\nu}\nabla^{-2}\nabla_\rho\nabla_\sigma B_{\rho\sigma})\right)\right\}.$$

Сравним формулу (3.26) с аналогичным выражением, полученным в работе [13] методом БРСТ-квантования. Легко видеть, что соответствующие формулы отличаются множителем $\det\nabla^2$, т. е. содержат различное число духовых полей. Подсчет числа степеней свободы в нашем случае дает: шесть бозонных степеней свободы антисимметричного тензорного поля $B_{\mu\nu}$, восемь фермионных степеней свободы духов Фаддеева — Попова и три бозонных степени свободы, связанные с $(\det\nabla^2)^{3/2}$. Следовательно, полное число физических степеней свободы равно $6-8+3=1$, что находится в соответствии с подсчетом числа степеней свободы в лоренцевой калибровке и совпадает с числом степеней свободы в нелинейной σ-модели. Поэтому мы делаем вывод, что результат работы [13] неверен, что связано, по-видимому, с некорректным применением процедуры БРСТ-квантования.

В заключение этого раздела мы докажем эквивалентность квантовой версии теории антисимметричного тензорного поля, изложенной выше, нелинейной сигма-модели.

Мы исходим из формул (3.21) для S-матрицы, которую можно записать в терминах переменных A_μ, B_μ, где

$$A_\mu=\Box^{-1}\partial_\nu B_{\nu\mu};\qquad \partial_\mu A_\mu=0;\qquad B_\mu=\Box^{-1}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu B_{\rho\sigma};\qquad \partial_\mu B_\mu=0. \tag{3.27}$$

В этих переменных формула (3.21) переписывается в виде

$$S=\int dH_\mu dA_\mu dB_\mu\delta(\partial_\mu A_\mu)\delta(\partial_\mu B_\mu)\Delta(\det\partial_\mu\nabla_\mu)^{-1}\times \tag{3.28}$$
$$\times\exp\left\{i\int dx\left(\frac{1}{2}A_\rho^a\partial_\sigma\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^a+\frac{1}{2}B_\mu^a\partial_\nu F_{\mu\nu}^a+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(H_\mu^a)^2-\frac{1}{2}\Box A_\mu^a(g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu\Box^{-1})\Box A_\nu^a\right)\right\}.$$

Представляя δ-функцию от $\partial_\mu B_\mu$ в виде $\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,\gamma\partial_\mu B_\mu\right\}d\gamma$ и интегрируя по B_μ, получаем

$$S=\int dH_\mu dA_\mu d\gamma\delta(\partial_\mu A_\mu)\delta(\partial_\mu\gamma+\partial_\nu F_{\nu\mu})\Delta(\det\partial_\mu\nabla_\mu)^{-1}\times \tag{3.29}$$
$$\times\exp\left\{i\int dx\left(\frac{1}{2}A_\rho^a\partial_\sigma\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^a+\frac{1}{2}(H_\mu^a)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\Box A_\mu^a(\Box g_{\mu\nu}-\partial_\nu\partial_\mu)A_\nu^a\right)\right\}.$$

В этой формуле можно считать, что лагранжев множитель γ и поперечные компоненты полей H_μ стремятся к нулю при $|t|\to\infty$. При этих условиях уравнение

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}-\partial_\mu\gamma=0 \tag{3.30}$$

имеет единственное решение $\gamma=0$, $F_{\mu\nu}=0$. Поэтому в показателе экспоненты (3.29) зависимость от $F_{\mu\nu}$ исчезает, и, выполняя гауссово интегрирование по A_μ, получаем

$$(3.31) \qquad S=\int dH_\mu\, d\gamma\,\delta(\partial_\mu\gamma-\partial_\nu F_{\mu\nu})\,\Delta(\det\partial_\mu\nabla_\mu)^{-1}\exp\left\{\frac{i}{2}\int H_\mu^2\,dx\right\}.$$

Интеграл (3.31) удобно переписать в переменных H и h_μ, где

$$(3.32) \qquad H_\mu=\partial_\mu H+h_\mu,\quad \partial_\mu h_\mu=0.$$

Используя эти переменные, (3.31) можно представить в виде

$$(3.33) \qquad S=\int dH\,dh_\mu\,d\gamma\,\delta(\partial_\mu h_\mu)\,\Delta(\det\partial_\mu\nabla_\mu)^{-1}\times$$

$$\times\delta(\partial_\mu\gamma^a-\partial_\nu(\partial_\mu h_\nu^a-\partial_\nu h_\mu^a-f^{abc}H_\mu^b H_\nu^c-\beta\partial_\mu h_\nu^a))\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,(H_\mu^a)^2\right\}.$$

В результате интегрирования по h_μ возникает якобиан, в точности сокращающий множитель Δ, и для S-матрицы получаем

$$(3.34) \qquad S=\int dH\,(\det\partial_\mu\nabla_\mu)^{-1}\exp\left\{\frac{i}{2}\int (H_\mu^a(H))^2\,dx\right\}.$$

Здесь $H_\mu(H)$ — решение уравнения $\partial_\mu F_{\mu\nu}=0$, параметризованное продольной частью $H_\mu^L=\partial_\mu H$. Чтобы перейти к нелинейной сигма-модели в обычной форме, нужно ввести групповые переменные

$$(3.35) \qquad H_\mu(H)=\partial_\mu\omega(\varphi)\,\omega^{-1}(\varphi),$$

где $\omega(\varphi)$ — элемент группы Ω, а φ — координаты на группе. Якобиан этой замены равен $\det(\partial_\mu\nabla_\mu)(\det g)^{1/2}$, где g_{ab} — риманова метрика на группе. В итоге получаем известное выражение для S-матрицы нелинейной сигма-модели:

$$(3.36) \qquad S=\int d\varphi\,(\det g)^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,(\partial_\mu\omega\cdot\omega^{-1})^2\right\}.$$

4. АНТИСИММЕТРИЧНОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ РАНГА $d-2$ В d-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изложенная выше схема квантования может быть непосредственно применена для квантования антисимметричного тензорного поля ранга $d-2$ в d-мерном пространстве.

Лагранжиан этой модели можно записать в виде

$$(4.1) \qquad \mathcal{L}=\frac{1}{2\cdot(d-2)!}\,\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}F^a_{\mu_1\mu_2}B^a_{\mu_3\ldots\mu_d}+\frac{1}{2}(H_\mu^a)^2.$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно следующих калибровочных преобразований:

$$(4.2) \qquad \delta B_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}=\frac{1}{(d-3)!}\,\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_{d-2}}_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}\nabla_{\nu_1}\xi_{\nu_2\ldots\nu_{d-2}},$$

$$\delta H_\mu=0;\quad \mu,\ \nu=0,1,\ldots,d-1,$$

где $\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_{d-2}}_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}$ — антисимметричный тензор Кронекера. После интегрирования по H_0 лагранжиан (4.1) переписывается в виде

$$(4.3) \qquad \mathcal{L}=H_i^a\partial_0 B_i^a-{}^1/_2(H_i^a)^2-{}^1/_2((\nabla_i B_i)^a)^2+$$

$$+C^a_{i_1\ldots i_{d-3}}B^a_{i_1\ldots i_{d-3},0};\quad i=1,2,\ldots,d-1,$$

где

$$(4.4)\qquad B_i = \frac{(-1)^d}{(d-2)!}\,\varepsilon_{ii_1\ldots i_{d-2}} B_{i_1\ldots i_{d-2}},$$

$$C_{i_1\ldots i_{d-3}} = \frac{(-1)^{d+1}}{2\cdot(d-3)!}\,\varepsilon_{iji_1\ldots i_{d-3}} F_{ij}.$$

Из формулы (4.3) видно, что H_i и B_i — канонические переменные, $h = {}^1/_2(H_i^a)^2 + {}^1/_2((\nabla_i B_i)^a)^2$ — гамильтониан, $C_{i_1\ldots i_{d-3}}$ — связи, $B_{i_1\ldots i_{d-3},0}$ — множители Лагранжа. Из $C_{d-1}^{d-3} = {}^1/_2(d-1)(d-2)$ связей независимы только $d-2$, поэтому лагранжиан (4.1) описывает систему из N скалярных частиц, где N — размерность присоединенного представления алгебры Ли калибровочной группы.

В качестве независимых выберем связи $C_{r_1\ldots r_{d-3}}$, где $r=1,\ldots,d-2$. Калибровка $\partial_k B_{kr_1\ldots r_{d-3}}=0$ записывается с использованием формул (4.4) в виде

$$(4.5)\qquad \varepsilon_{ikr_1\ldots r_{d-3}}\partial_k B_i = 0.$$

Так же как и в случае тензорного поля второго ранга, убеждаемся, что истинными динамическими переменными нашей системы являются продольные компоненты полей B_i и H_i.

Детерминант Фаддеева — Попова удобно представить в виде

$$(4.6)\qquad (\det M_c)^{-1} = \int d\xi_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}\,\delta\left(\partial_k \varepsilon_{kr_1\ldots r_{d-3}}^{\mu_1\ldots\mu_{d-2}} \nabla_{\mu_1}\xi_{\mu_2\ldots\mu_{d-2}}\right)\times$$
$$\times\,\delta\left(\varepsilon_{d-1,r_1\ldots r_{d-4},0}^{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}\nabla_{\mu_1}\xi_{\mu_2\ldots\mu_{d-2}}\right)\delta\left(\dot\xi_{0i_1\ldots i_{d-4}}\right).$$

Используя формулы (2.9), получаем следующее выражение для S-матрицы:

$$(4.7)\qquad S = \int dH_\mu dB_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}\,\delta\left(\partial_k B_{kr_1\ldots r_{d-3}}\right)\times$$
$$\times\,\delta\left(B_{d-1,r_1\ldots r_{d-4},0}\right)\det M_c \exp\left\{i\int \mathscr{L}(x)\,dx\right\}.$$

Переход к лоренцевой калибровке осуществляется аналогично четырехмерному случаю. Введем дополнительное антисимметричное поле $\lambda_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}$ и умножим (4.7) на «единицу»

$$(4.8)\qquad 1 = \Delta\int d\xi_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}\,d\lambda_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\int dx\,(\lambda_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}})^2\right\}\times$$
$$\times\,\delta\left(\partial_{\mu_1}B^{\xi}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{d-2}} + \lambda^{\xi}_{\mu_2\ldots\mu_{d-2}}\right),$$

где

$$(4.9)\qquad \lambda^{\xi}_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} = \lambda_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} + \frac{\beta}{(d-4)!}\,\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}^{\nu_1\ldots\nu_{d-3}}\partial_{\nu_1}\partial_\rho\xi_{\rho\nu_2\ldots\nu_{d-3}},$$

$$\Delta = \det M_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{d-3}}^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{d-3}} \equiv M_{d-3},$$

$$M_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}^{\nu_1\ldots\nu_{d-3}} = \frac{1}{(d-3)!}\,\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}}^{\nu_1\ldots\nu_{d-3}}\partial_\rho\nabla_\rho -$$
$$-\frac{1}{(d-4)!}\,\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{d-3}}^{\rho\nu_2\ldots\nu_{d-3}}\left(\partial_{\nu_1}\nabla_\rho - \beta\partial_\rho\partial_{\nu_1}\right).$$

Замена переменных $B^\xi \to B$, $\lambda^\xi \to \lambda$, $\xi \to -\xi$ и интегрирование по λ приводит S-матрицу к виду

$$(4.10)\qquad S = \int dH_\mu \, dB_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}} (\widetilde{\Delta})^{-1} \det M_c M_{d-3} \times \\ \times \exp\left\{ i \int dx \left(\mathscr{L} - \frac{\alpha}{2} (\partial_{\mu_1} B_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{d-2}})^2 \right) \right\},$$

где

$$(4.11)\qquad (\widetilde{\Delta})^{-1} = \int d\xi_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} \delta (\partial_k B^\xi_{kr_1\ldots r_{d-3}}) \, \delta (B^\xi_{d-1, r_1, \ldots, r_{d-4}, 0}) \times \\ \times \exp\left\{ \frac{1}{2} i\alpha\beta^2 (d-3) \int dx \partial_\rho \xi_{\rho\nu_2\ldots\nu_{d-3}} \Box \partial_\sigma \xi_{\sigma\nu_2\ldots\nu_{d-3}} \right\}.$$

Так же как и в случае $d=4$, можно доказать, что $\tilde{\Delta}$ не зависит от B_μ, и его можно представить в виде

$$(4.12)\qquad (\widetilde{\Delta})^{-1} = \int d\xi_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} \delta (\partial_k \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}_{kr_1\ldots r_{d-3}} \times \\ \times \nabla_{\mu_1} \xi_{\mu_2\ldots\mu_{d-2}}) \, \delta (\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{d-2}}_{d-1, r_1\ldots r_{d-4}, 0} \nabla_{\mu_1} \xi_{\mu_2\ldots\mu_{d-2}}) \times \\ \times \exp\left\{ \frac{i\alpha\beta^2 (d-3)}{2} \int dx \partial_\rho \xi_{\rho\nu_2\ldots\nu_{d-3}} \Box \partial_\sigma \xi_{\sigma\nu_2\ldots\nu_{d-3}} \right\}.$$

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, легко показать, что на поверхности $F_{\mu\nu}=0$ имеет место равенство

$$(4.13)\qquad (\widetilde{\Delta})^{-1} = (\det M_c)^{-1}) \, (M_{d-4} (\det \Box)^{1/2 C_d^{d-4}})^{-1} \times \\ \times (M_{d-5} (\det \Box)^{C_d^{d-5}}) \ldots M_0 (\det \Box)^{1/2(d-3)},$$

если d нечетное,

$$(4.14)\qquad (\widetilde{\Delta})^{-1} = \frac{(\det M_c)^{-1}}{M_{d-4} (\det \Box)^{1/2 C_d^{d-4}}} \cdots \frac{M_1 (\det \Box)^{1/2 (d-4) C^1{}_d}}{M_0 (\det \Box)^{1/2(d-3)}},$$

если d четное. В формулах (4.13)—(4.14) детерминант M_{d-3-k} получается из детерминанта M_{d-3} заменой $d \to d-k$ и $\beta \to \beta_k$, где β, β_k — произвольные числа. Детерминант M_0 равен $\det \partial_\mu \nabla_\mu$. Формулы (4.10), (4.13), (4.14) приводят к правильному числу физических степеней свободы

$$(4.15)\qquad C_d^{d-2} - 2C_d^{d-3} + 3C_d^{d-4} - \ldots + (-1)^d (d-1) = 1,$$

а также к правильному спектру генерируемых духов.

Учитывая, что $\det \Box$ представляет собой тривиальную константу, S-матрицу можно записать в виде

$$(4.16)\qquad S = \int dH_\mu \, dB_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}} M_{d-3} M^{-1}_{d-4} M_{d-5} \ldots M_0^{\pm 1} \times \\ \times \exp\left\{ i \int dx \left(\mathscr{L} - \frac{\alpha}{2} (\partial_{\mu_1} B_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}})^2 \right) \right\},$$

где знак $+$ берется, если d нечетное, а знак $-$, если d четное.

Анализ формулы (4.16) показывает, что для написания эффективного лагранжиана можно использовать следующий простой рецепт. На первом этапе к классическому лагранжиану добавляется фиксирующий калибровку член $-\frac{\alpha}{2} (\partial_{\mu_1} B_{\mu_1\ldots\mu_{d-2}})^2$ и лагранжиан духов Фаддеева — Попова

$$(4.17)\qquad \bar{c}_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} \left(\frac{1}{(d-3)!} \varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_{d-3}}_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} - \frac{1}{(d-4)!} \varepsilon^{\rho\nu_2\ldots\nu_{d-3}}_{\mu_1\ldots\mu_{d-3}} \partial_{\nu_1} \nabla_\rho \right) c_{\nu_1\ldots\nu_{d-3}}.$$

Затем к полученному лагранжиану добавляется член, фиксирующий калибровку духов $c_{\mu_1 \ldots \mu_{d-3}}$, $\bar{c}_{\mu_1 \ldots \mu_{d-3}}$,

$$-\beta (d-3)\, \partial_\rho \bar{c}_{\rho\mu_2 \ldots \mu_{d-3}} \partial_\sigma c_{\sigma\mu_2 \ldots \mu_{d-3}} \tag{4.18}$$

и лагранжиан вторичных духов, который получается из (4.17) заменой $d \to d-1$, $\beta \to \beta_1$ и является лагранжианом духов Фаддеева — Попова для лоренцевой калибровки $\partial_{\mu_1} c_{\mu_1 \ldots \mu_{d-3}} = 0$ и следующего преобразования:

$$c^{\xi}_{\mu_1 \ldots \mu_{d-3}} = c_{\mu_1 \ldots \mu_{d-3}} + \frac{1}{(d-4)!} \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{d-3}}^{\nu_1 \ldots \nu_{d-3}} \nabla_{\nu_1} \xi_{\nu_2 \ldots \nu_{d-3}}. \tag{4.19}$$

Эта процедура продолжается до тех пор, пока мы не придем к невырожденному лагранжиану скалярных духов $\bar{c} \partial_\mu \nabla_\mu c$. Заметим, что столь простой ответ получается только в лоренцевой калибровке. В ковариантных калибровках типа $\nabla_{\mu_1} B_{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{d-2}}$ лагранжиан выглядит более сложно.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы провели подробный вывод ковариантного выражения для S-матрицы антисимметричного тензорного поля исходя из канонической формулировки теории. В этом выводе существенным техническим моментом было введение дополнительного калибровочного поля с подходящим законом преобразования. Аналогичный прием может быть использован и в других теориях с функционально зависимыми связями, в частности, как мы надеемся, во вторично квантованных моделях релятивистских струн. Наше рассмотрение показывает также, что использование метода БРСТ-квантования требует обязательной проверки выполнения всех физических условий, т. к. при этом может быть потеряна физическая унитарность теории.

Литература

[1] *Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В.* // ЯФ. 1967. Т. 4. № 1. С. 156–165.
[2] *Kalb M., Ramond P.* // Phys. Rev. 1974. V. D9. № 8. P. 2273–2284.
[3] *Cremmer E., Scherk J.* // Nucl. Phys. 1974. V. B72. № 1. P. 117–124.
[4] *Cremmer E., Julia B.* // Nucl. Phys. 1979. V. B159. № 1. P. 141–212.
[5] *Sezgin E., van Niewenhuizen P.* // Phys. Rev. 1980. V. D22. № 2. P. 301–307.
[6] *Teitelboim C.* // Phys. Lett. 1986. V. 167B. № 1. P. 69–72.
[7] *Freedman D. Z., Townsend P. K.* // Nucl. Phys. 1981. V. B177. № 2. P. 282–291.
[8] *Kaul R. K.* // Phys. Rev. 1978. V. D18. № 4. P. 1127–1137.
[9] *Batalin I. A., Fradkin E. S.* // Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 38. № 11. P. 393–401.
[10] *Townsend P. K.* // Phys. Lett. 1979. V. 88B. № 1. P. 97–100.
[11] *Siegel W.* // Phys. Lett. 1980. V. 93B. № 1. P. 170–173.
[12] *Kimura T.* // Progr. Theor. Phys. 1980. V. 64. № 1. P. 357–360. V. 65. № 1. P. 338–351.
[13] *Baulieu L., Thierry-Mieg J.* // Nucl. Phys. 1983. V. B228. № 2. P. 259–285.
[14] *Batalin I. A., Fradkin E. S.* // Phys. Lett. 1983. V. 122B. № 2. P. 157–164.
[15] *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14.I.1987 г.

QUANTIZATION OF THE NONABELIAN ANTISYMMETRIC TENSOR FIELD

Slavnov A. A., Frolov S. A.

Starting with the canonical quantization procedure, one obtains the explicitely Lorentz-covariant expression for the scattering matrix of antisymmetric tensor field. On the quantum level the equivalence of this theory to the nonlinear σ-model is established.