S. S. Barsov, V. V. Ulyanov, Estimates for the closeness of Gaussian measures,
*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Volume 291, Number 2, 273–277

УДК 519.22 **МАТЕМАТИКА**

С.С. БАРСОВ, В.В. УЛЬЯНОВ

# ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ ГАУССОВСКИХ МЕР

*(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 6 VI 1985)*

Пусть $H$ – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Через $N_A^a$ обозначаем гауссовскую меру на $H$ со средним значением $a$ и корреляционным оператором $A$.

Согласно теореме Фельдмана–Гаека (см., например, [1, стр. 101]) две гауссовские меры на $H$ либо эквивалентны, либо ортогональны.

Из теорем 1 и 2 работы вытекают двусторонние оценки для вариации разности двух эквивалентных гауссовских мер. В теоремах 3–5 приведены оценки близости гауссовских мер, равномерные по классу всех шаров в $H$ с фиксированным центром (теоремы 3 и 4) и с произвольным центром (теорема 5), для общего случая, когда гауссовские меры могут быть ортогональными.

Через $\|M\|$ обозначаем вариацию обобщенной меры $M$. Поскольку $\|N_A^a - N_B^b\| = \|N_A^{a-b} - N_B^0\|$, при нахождении оценок близости по вариации эквивалентных мер можно считать, что среднее значение одной из мер нулевое. Всюду ниже $N_B = N_B^0$.

Известно (см. [1, стр. 101]), что меры $N_A^a$ и $N_A$ эквивалентны, если и только если $a \in A^{1/2}(H)$, где $A^{1/2}$ означает положительный квадратный корень из оператора $A$.

Т е о р е м а 1. *Если меры $N_A^a$ и $N_A$ эквивалентны, то $\|N_A^a - N_A\| = 2\varphi(|h|)$, где $h = A^{-1/2}a$ и $\varphi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-u/2}^{u/2} \exp(-t^2/2)\,dt$ для $u \geqslant 0$.*

При доказательстве теоремы 1 используем известное равенство (см., например, [1, стр. 101])

$$\frac{dN_A^a}{dN_A}(x) = \exp\{(A^{-1/2}x, h) - |h|^2/2\},$$

из которого вытекает, что

$$\|N_A^a - N_A\| = 2E(\exp(Y - |h|^2/2) - 1) \cdot 1_{\{Y \geqslant |h|^2/2\}},$$

где $1_{\{D\}}$ – индикатор множества $D$ и случайная величина (с.в.) $Y$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $|h|^2$.

С л е д с т в и е 1. *Если меры $N_A^a$ и $N_A$ эквивалентны, то*

$$8\sqrt{2}\,|h|/(\sqrt{\pi}(8 + |h|^2)) \leqslant \|N_A^a - N_A\| \leqslant \sqrt{2}\,|h|/\sqrt{\pi}.$$

Известно (см., например, [2, стр. 580]), что меры $N_A$ и $N_B$ эквивалентны, если и только если $B = A^{1/2}TA^{1/2}$, где $T$ – положительно-определенный оператор такой, что $T - I$ есть оператор Гильберта–Шмидта; здесь $I$ – единичный оператор.

Т е о р е м а 2. *Если меры $N_A$ и $N_B$ эквивалентны, то*

$$\|N_A - N_B\| = \tfrac{1}{2}E|Y| + R,$$

*где $Y = \sum_1^\infty d_i Y_i$, $(d_i)_1^\infty$ – собственные значения оператора $T - I$, $Y_i = X_i^2 - 1$, $i = 1, 2, \ldots$, $(X_i)_1^\infty$ – независимые нормально распределенные с.в. со средним 0 и* *и дисперсией* 1. *При этом, если*

$$d=\left(\sum_1^\infty d_i^2\right)^{1/2}<1,$$

*то остаток* $R$ *допускает оценки*

$$(1)\qquad -d^2\ln d^{-1}-4d^2-\sqrt{2}\,qd/4\leqslant R\leqslant q,$$

*где* $q=\sum\limits_1^\infty (d_i-\ln(1+d_i))$.

При доказательстве теоремы 2, используя равенство (см. [2, стр. 580])

$$\frac{dN_A}{dN_B}(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty ((A^{-1/2}x,e_i)^2 d_i(1+d_i)^{-1}-\ln(1+d_i))\right\},$$

где $e_i$ – собственные векторы оператора $T-I$, отвечающие собственным значениям $d_i$, имеем

$$\|N_A-N_B\|=2E(1-\exp(-(Y+q)/2))\cdot 1_{\{Y+q>0\}}.$$

Отсюда легко выводится оценка сверху для $R$ в (1). Оценка снизу для $R$ в (1) вытекает из соотношений

$$\|N_A-N_B\|\geqslant 2E(1-\exp(-(Y+q)/2))\cdot 1_{\{q<Y+q<q-2\sqrt{2}d\ln d\}}\geqslant$$

$$\geqslant E(Y+q)\exp(-(q-2\sqrt{2}d\ln d)/2)\cdot 1_{\{0<Y<-2\sqrt{2}d\ln d\}}$$

и неравенства Чебышева.

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим $\sqrt{2/15}\,d\leqslant E|Y|\leqslant\sqrt{2}\,d$, поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Если* $d\leqslant 0{,}02$, *то* $0{,}02d\leqslant\|N_A-N_B\|\leqslant d$.

Объединение теорем 1 и 2 приводит к оценкам в общем случае для $\|N_A^a-N_B^b\|$. В частности, можно уточнить оценки близости гауссовских мер на классе выпуклых борелевских множеств в $k$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$, полученные в [3].

Следствие 3. *Пусть меры* $N_A^a$ *и* $N_B^b$ *на* $\mathbf{R}^k$ *имеют невырожденные ковариационные матрицы соответственно* $A$ *и* $B$. *Если существует* $\epsilon$, $0<\epsilon<1$, *для которого* $|(Bx,x)-(Ax,x)|\leqslant\epsilon(Ax,x)$ *при всех* $x\in\mathbf{R}^k$, *то*

$$(2)\qquad \|N_A^a-N_B^b\|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,|A^{-1/2}(a-b)|+1{,}82k^{1/2}\epsilon(1-\epsilon)^{-1/2}.$$

Замечание. Из следствия 2 вытекает, что в оценке (2) нельзя уменьшить показатель степени у $k$.

Перейдем к оценке близости мер $N_A^a$ и $N_B^b$ на шарах

$$S_r(d)=\{x\in H:\ |x-d|<r,\ \ d\in H,\ r>0\}.$$

Поскольку

$$(3)\qquad N_A^a(S_r(d))=N_A^{a-d}(S_r(0)),$$

в случае $a\neq b$, $A=B$ достаточно ограничиться шарами с нулевым центром. Ниже $S_r=S_r(0)$.

Теорема 3. *Существует абсолютная постоянная* $c$, *при которой*

$$|(N_A^a-N_A^b)(S_r)|\leqslant cc(A)((\operatorname{tr}A)^{1/2}+|a|+|b|)\,|a-b|,$$

*где* $\mathrm{tr}A$ *есть след оператора* $A$,

$$c(A)=\min\left\{a_1^{-1}a_2^{-1},\left(\prod_1^3 f_i(A)\right)^{-2/3}\right\},$$

$f_j^4(A)=\sum_{i\geqslant j} a_i^4$ *для* $j=1,2,\ldots$ *и* $a_1^2\geqslant a_2^2\geqslant\ldots$ *суть собственные значения оператора* $A$.

Для доказательства теоремы 3 следует заметить, что

$$|(N_A^a-N_A^b)(S_r)|\leqslant(N_A^a+N_A^b)(S_{r+|a-b|}\setminus S_r),$$

и затем построить оценки плотности с.в. $|Y|$ для случайного элемента $Y$, имеющего гауссовское распределение $N_A^a$. Для этого следует воспользоваться леммой 6 из [4], формулой обращения и равенством (см. [5, стр. 82])

$$E\exp\{it|Y|^2\}=\exp\{it(R_A a,a)\}\prod_1^\infty(1-2ita_j^2)^{-1/2}, \tag{4}$$

где $R_A=(I-2itA)^{-1}$.

В случае, когда совпадают средние значения мер, в силу (3) можем считать, что средние значения мер нулевые, но будем рассматривать шары с ненулевым центром. Введем следующие обозначения:

$$D=A-B,\ |A|=\sup_{|x|=1}|Ax|,\quad c_i(A)=\left(\prod_1^i f_j(A)\right)^{(1-i)/i},$$

$$c_i=(|A|+|B|)^{(i-1)/2}(c_i(A)+c_i(B))$$

для $i=3,5,7,9$, где величины $f_j(A)$ те же, что в теореме 3,

$$T=((|A|+|B|)^2+(Aa,a)+(Ba,a))^{-1/2}.$$

Теорема 4. а) *Существует постоянная* $c$ *такая, что*

$$\Delta(a)=\sup_{r>0}|(N_A-N_B)(S_r(a))|\leqslant$$

$$\leqslant c(c_9(T|D|)^{1/2}+c_3T\,\mathrm{tr}(D^2)^{1/2}+c_5T^2|(Da,a)|).$$

б) *Если* $AB=BA$, *то*

$$\Delta(a)\leqslant c(c_7T|D|+c_3T\mathrm{tr}(D^2)^{1/2}+c_5T^2|(Da,a)|).$$

При доказательстве теоремы 4, используя дифференцируемость по $s\in[0,1]$ функции $g(s,t)=E\exp\{it|X-a|^2\}$, где случайный элемент $X$ имеет распределение $N_V$ с $V=A+s(B-A)$, неравенство Эссеена и представление (4), получаем

$$2\pi\Delta(a)\leqslant\int_0^1\int_{-\infty}^\infty|g(s,t)|\cdot|2it(R_VDR_Va,a)+\mathrm{tr}(DR_V)|\,dt\,ds.$$

Далее,

$$|g(s,t)|\leqslant f(t)\exp\{-2t^2(Va,a)/(1+4t^2|V|^2)\},$$

где $f(t)=\prod_1^\infty(1+4t^2v_j^4)^{-1/4}$ и $v_1^2\geqslant v_2^2\geqslant\ldots$ суть собственные значения оператора $V$. Поскольку $R_V=I+2itVR_V$, имеем

$$|(R_VDR_Va,a)|\leqslant|(Da,a)|+4|t|\,|DV|^{1/2}((A+B)a,a)+4t^2|DV|(Va,a).$$

Если $AB=BA$, то

$$|(R_VDR_Va,a)|=|(R_V^2Da,a)|\leqslant|(Da,a)|+4|t|\cdot|D|(Va,a).$$

З а м е ч а н и е. Для любого единичного вектора $e \in H$: $(Ae,e) + (Be,e) > 0$, существует постоянная $c$ такая, что (см. [6])

$$\sup_{r>0} |(N_A - N_B) \ x \in H: \{(x,e) < r\}| \leqslant c|(De,e)|/((A+B)e,e).$$

Оценку такого же вида можно вывести из теоремы 4, воспользовавшись соотношением (см. [5, стр. 70])

$$(5) \qquad \{x: (x,e) < r\} = \bigcup_{1}^{\infty} \{x: |x + (n-r)e| < n\}.$$

Если известна дополнительная информация о связи между $A$ и $B$, то можно получить более точные, чем в теореме 4, оценки.

Т е о р е м а 5. а) *Если ядра операторов $A$ и $B$ совпадают, т.е.* $\ker A = \ker B$, *то*

$$\Delta = \sup_{a \in H} \Delta(a) \leqslant \frac{5}{8} (3c_5 + \operatorname{tr}(A+B)(c_3(A) + c_3(B)))|A^{-1/2}BA^{-1/2} - I|.$$

б) *Если* $\ker A \neq \ker B$, *то* $\Delta \geqslant 1/2$.

Теорема 5а) доказывается аналогично теореме 4. Пусть $V$ и $R_V$ те же, что и выше, и $d = |A^{-1/2}BA^{-1/2} - I|$. Не ограничивая общности, считаем $d < 1$. Легко показать, что для $G = V^{-1/2}DV^{-1/2}$ имеем $|G| \leqslant d/(1-d)$. Поэтому $|(R_V DR_V a, a)| = |(R_V GR_V V^{1/2}a, V^{1/2}a)| \leqslant d(Va,a)/(1-d)$ и $|\operatorname{tr}(DR_V)| \leqslant |G| \operatorname{tr} V \leqslant d \operatorname{tr} V/(1-d)$.

Теорема 5б) вытекает из соотношения (5), в котором следует взять $r = 0$ и вектор $e$, принадлежащий только одному из пространств $\ker A$ и $\ker B$.

С л е д с т в и е 4. *Если $B = \lambda A$ и $\lambda > 1$, то*

$$\Delta \leqslant (15{,}9|A|^2 c_5(A) + 2{,}6 \operatorname{tr}(A) c_3(A))(\lambda - 1).$$

З а м е ч а н и я. 1. Нетрудно показать, что если $B = \lambda A$ и $0 < \lambda - 1 < \epsilon$, то для всех достаточно малых $\epsilon$ существует постоянная $c$, при которой $\Delta \geqslant c(\lambda - 1)$.

2. Следствие 4 применялось в [7] при исследовании оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм случайного числа случайных элементов в $H$.

3. В ряде задач используются характеристики близости гауссовских мер, отличные от рассмотренных в настоящей работе (см., например, [8]). Результаты из [8] применялись в [9] при построении оценок близости гауссовских мер на шарах в $H$. В оценках в [9] не указана явная зависимость постоянных, определяемых корреляционными операторами мер, от спектра этих операторов. Оценки в [9] уступают также оценкам настоящей работы по зависимости от центра шара $a$.

Содержание работы частично докладывалось на III Ферганской конференции по предельным теоремам в 1983 г. и на Коллоквиуме по критериям согласия в Дебрецене, Венгрия, в июне 1984 г.

Авторы признательны проф. В.В. Сазонову за внимание к работе.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
18 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979. 2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. 3. *Бикялис А* .– Лит. матем. сб., 1971, т. 11, № 1, с. 27–58. 4. *Нагаев С.В.* – Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, № 1, с. 19–32. 5. *Sazonov V.V.* Normal approximation – some recent advances, Lecture Notes in Math., vol. 879. B.; Heidelberg: Springer-Verlag, 1981. 6. *Колмогоров А.Н.* – Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 4, с. 426–436. 7. *Барсов С.С.* – Там же, 1985, т. 30, № 2, с. 361–364. 8. *Островский Е.И.* – Там же, 1975, т. 20, № 2, с. 447–450. 9. *Бернотас В.* – Лит. матем. сб., 1977, т. 7, № 3, с. 17–28.

УДК 515.162+514.174 МАТЕМАТИКА

**Н.П. ДОЛБИЛИН, М.А. ШТАНЬКО, М.И. ШТОГРИН**

# КУБИЧЕСКИЕ ПОДКОМПЛЕКСЫ В ПРАВИЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ

*(Представлено академиком С.П. Новиковым 22 V 1985)*

К у б и ч е с к и м   к о м п л е к с о м называется полиэдр, разбитый на семейство замкнутых кубов всевозможных размерностей $i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, так что вместе с каждым кубом это семейство содержит все его грани и пересечение двух кубов есть конечный набор кубов этого семейства. Кубический комплекс, в котором пересечение двух кубов совпадает с их общей гранью, назовем с т а н д а р т н ы м.

Через $R_c^n$ будем обозначать $n$-мерное евклидово пространство, стандартным образом превращенное в кубический комплекс с помощью правильной кубической решетки. Поверхность, превращенную в кубический комплекс, назовем к в а д р и л ь я ж е м поверхности.

З а д а ч а   Н о в и к о в а. 1) Исследовать отображения (в частности, вложения) квадрильяжей поверхностей в $R_c^n$, при которых каждый квадрат отображается изоморфно на некоторую двумерную грань в $R_c^n$.

2) Пусть в $R_c^3$ задан двумерный цикл $\mathrm{mod}\,2$. Классифицировать параметризации этого цикла, т.е. отображения квадрильяжей поверхностей на цикл, при которых никакие два квадрата квадрильяжа не отображаются на один квадрат цикла.

Эта задача, как сообщил С.П. Новиков, возникает при исследовании трехмерной модели Изинга.

В настоящей работе дается полный ответ на первый вопрос задачи Новикова для отображения квадрильяжей сферы $S^2$ в $R_c^n$.

Комбинаторное строение квадрильяжа поверхности удовлетворяет следующим условиям:

1) каждая двумерная клетка есть квадрат;

2) каждое ребро какого-либо квадрата является вместе с тем ребром одного и только одного другого квадрата;

3) совокупность всех квадратов, примыкающих к данной вершине, образует последовательность квадратов, циклически склеенных по смежным сторонам, сходящимся в данной вершине;

4) склеивание вершин и ребер одного и того же квадрата не допускается;

5) допускается склеивание двух квадратов по более чем одной вершине и по более чем одной стороне.