12. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1947.
13. Юмагулов М. Г. // Докл. АН ТаджССР. 1982. Т. 25, № 11. С. 648—650.
14. Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев, 1975.
15. Чебан Д. Н. Теория линейных дифференциальных уравнений (избр. гл.). Кишинев, 1980.

Отдел генетики растений АН МССР

Поступила в редакцию 5 февраля 1985 г.

УДК 517.977

Т. Ф. ФИЛИППОВА

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ПУЧКЕ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассматривается задача управления динамической системой при неполной информации о начальных состояниях и текущих значениях фазовых скоростей системы. Предполагаются заданными лишь допустимые области изменения соответствующих параметров системы. Каждое программное управление порождает в силу динамической системы ансамбль (пучок или трубку) траекторий системы. Исследуется задача на программный минимум интегрального функционала, определенного на сечениях ансамблей траекторий в предписанный момент времени. Приводятся необходимые условия оптимальности. В идейном плане работа опирается на исследования [1, 2] и продолжает [3, 4].

1. Постановка задачи. Основные предположения. Рассматривается управляемая система, описываемая следующим дифференциальным включением:

$$\dot{x}\in F(t,\ x,\ u(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{1.1}$$

Здесь t — время; x — фазовый вектор ($x\in R^n$); $u(\cdot)$ — управление ($u(t)\in R^m$, $t\in[t_0,\ t_1]$); F — многозначная функция ($F(t,\ x,\ u)\subset R^n$). Начальное состояние $x(t_0)=x_0$ точно неизвестно, дано лишь множество $X_0\subset R^n$, содержащее $x_0: x_0\in X_0$.

Каждой допустимой реализации программного управления $u(\cdot)$ поставим в соответствие ансамбль движений $X(t;\ u(\cdot),\ X_0)=\{x(t)\}$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$, полученный объединением по всем $x_0\in X_0$ пучков решений включения (1.1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$.

Для заданной функции $\varphi(\cdot)$ $(\varphi: R^n\to R^1)$ положим

$$\Phi(u(\cdot))=\int\limits_X \varphi(x)\,dx,\quad X=X(t_1;\ u(\cdot),\ X_0). \tag{1.2}$$

Задача 1. Среди допустимых управлений $u(\cdot)$ найти $u^0(\cdot)$, минимизирующее функционал $\Phi(u(\cdot))$:

$$\Phi(u^0(\cdot))=\min_{u(\cdot)}\Phi(u(\cdot))$$

Перейдем к формулировке основных определений и предположений, в рамках которых будет решаться задача 1.

Предположение 1. Класс допустимых управлений $\mathcal{U}=\{u(\cdot)\}$ образуют все измеримые m-векторные функции $u(\cdot)$, значения $u(t)$ которых при почти всех $t\in[t_0,\ t_1]$ принадлежат заданному компакту $U\subset R^m$.

Зафиксируем произвольное $u(\cdot)\in\mathcal{U}$. Под решением (в смысле Каратеодори) дифференциального включения (1.1) (при $u=u(t)$) на отрезке

$[t_0, t_1]$ будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, определенную на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющую при почти всех $t \in [t_0, t_1]$ условию $\dot{x}(t) \in F(t, x(t), u(t))$.

Введем следующие обозначения: пусть A — произвольное строго выпуклое множество в R^n. Для каждого ненулевого вектора $p \in R^n$ обозначим $v(A, p)$ точку (единственную) из A, для которой $p'v(A, p) = \rho(p; A)$ (здесь штрих означает транспонирование; $\rho(p; A)$ — значение опорной функции множества A, вычисленное в точке p). Отдельные свойства опорного отображения $v(A, \cdot)$ рассматривались, например, в [5, 6]. Для двух строго выпуклых компактных множеств A и B ($A, B \subset R^n$) определим [7] расстояние

$$s(A, B) = \max\{\|v(A, p) - v(B, p)\| : \|p\| = 1\}$$

(здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^n).

Непустой компакт $A \subset R^n$ будем называть R-выпуклым [6, 7] ($R \geqslant 0$), если A является пересечением шаров радиуса R. Известно [6], что непустое компактное множество равномерно выпукло тогда и только тогда, когда оно R-выпукло при некотором $R \geqslant 0$. Ясно, что каждое R-выпуклое множество является и строго выпуклым.

Предположение 2. 1) множество X_0 начальных векторов включения (1.1) R_0-выпукло ($R_0 > 0$); 2) граница ∂X_0 множества X_0 является гиперповерхностью класса C^1 [8].

Относительно правой части $F(t, x, u)$ дифференциального включения (1.1) примем следующее

Предположение 3. 1) существует $R \geqslant 0$ такое, что при любых $t \in [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $u \in U$ множество $F(t, x, u)$ R-выпукло; 2) многозначная функция $F(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных на $[t_0, t_1] \times R^n \times U$; 3) существует суммируемая на $[t_0, t_1]$ функция $\gamma(t)$ ($\gamma(t) \geqslant 0$), такая, что при почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех $\{x, u\} \in R^n \times U$ $d(0; F(t, x, u)) \leqslant \gamma(t)$ (здесь $d(a; B) = \max\{\|a - b\| : b \in B\}$); 4) опорная функция $\rho(l; F(t, x, u))$ принадлежит классу C^3 по переменным $(l, x) \in (R^n \setminus \{0\}) \times R^n$ и соответствующие производные ρ по (l, x) непрерывны по совокупности переменных.

Предположение 4. Функция φ в функционале (1.2) непрерывно дифференцируема по x.

Решение $x(t)$ дифференциального включения (1.1) при $u = u(t)$ будем называть граничной траекторией ансамбля $X(t; u(\cdot), X_0)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$), если при всех $\tau \in [t_0, t_1]$ вектор $x(\tau)$ лежит на границе $\partial X(\tau; u(\cdot), X_0)$ множества $X(\tau; u(\cdot), X_0)$.

2. Структура трубок траекторий управляемого включения. Отметим вначале, что при предположениях, принятых в п. 1, для любого $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ансамбль траекторий $X(t; u(\cdot), X_0)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$) является непустым компактным множеством в пространстве $C[t_0, t_1]$ непрерывных n-векторных функций на $[t_0, t_1]$ [9]. Нетрудно показать, что при достаточно большом $K > 0$ для любых $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $t \in [t_0, t_1]$ справедливо включение $X(t; u(\cdot), X_0) \subset S(0; K)$ (здесь $S(0; K)$ — открытый шар радиуса K с центром в 0). Из предположения 3 (см. 4) следует, что производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\rho(l; F(t, x, u))$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(l; F(t, x, u))$ ограничены на множестве $\{(l, t, x, u) : \|l\| \leqslant 1, t \in [t_0, t_1], x \in S(0; K), u \in U\}$. Тогда [6] существуют константы $L, M \geqslant 0$ такие, что выполнены неравенства

$$\begin{gathered} s(F(t, x, u), F(t, y, u)) \leqslant M\|x - y\|, \\ s(F(t, \lambda x + (1-\lambda) y, u),\ \lambda F(t, x, u) + \\ + (1-\lambda) F(t, y, u)) \leqslant L\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2, \\ t \in [t_0, t_1],\ x \in S(0; K),\ u \in U. \end{gathered} \tag{2.1}$$

В работах [6, 7] доказано, что при предположениях 1—3 сечения $X(t_*; u(\cdot), X_0)$ в произвольный момент t_*, достаточно близкий к t_0, ансамблей $X(t; u(\cdot), X_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ равномерно выпуклы. Приведем один результат, где дана оценка интервала времени $[t_0, t_0+T]$, на котором сохраняется свойство выпуклости сечений трубок траекторий, а также описана эволюция границ $\partial X(t; u(\cdot), X_0)$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 1 [6]. *Пусть выполнены предположения п. 1 и числа L, M выбраны из условия (2.1). Положим $y(t)$ — решение уравнения Риккати: $\dot{y}(t) = R + 3My(t) + 2Ly^2(t)$, $y(t_0) = R_0$ и*

$$T = \int_{R_0}^{\infty} (R + 3Mx + 2Lx^2)^{-1} dx.$$

Если $x(t)$ — граничная траектория ансамбля $X(t; u(\cdot), X_0)$ при некотором $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, то существует абсолютно непрерывная функция $p(t)$, такая, что выполнены следующие условия: при почти всех $t \in [t_0, t_0+T]$

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = v(F(t, x(t), u(t)), p(t)), \\ \dot{p}(t) = -p(t) d_x v(F(t, x(t), u(t)), p(t)), \\ x(t_0) = v(X_0, p(t_0)), \quad \|p(t_0)\| = 1. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Обратно, если пара функций $(x(t), p(t))$ является решением (2.2), то $x(t)$ — граничная траектория $X(t; u(\cdot), X_0)$ на отрезке $[t_0, t_0+T]$. Множества $X(t; u(\cdot), X_0)$ являются $y(t)$-выпуклыми и $x(t) = v(X(t; u(\cdot), X_0), p(t))$.

Замечание. Символ d_x в (2.2) означает матрицу Якоби функции $v(F(t, x, u), p)$ по переменной x. Отметим, что $v(F(t, x, u), p) = \frac{\partial}{\partial p} \rho(p; F(t, x, u))$ [5].

Далее будем считать, что заданный момент t_1 не больше числа t_0+T.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для каждого $t_* \in [t_0, t_1]$*

$$\partial X(t_*; u(\cdot), X_0) = \{x : \exists x_0 \in \partial X_0, \ x = x(t_*; u(\cdot), x_0)\}$$

(здесь $x(t; u(\cdot), x_0)$ — вектор первых n-координат решения $(x(t), p(t))$ системы (2.2) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $x_0 = v(X_0, p_0)$, $\|p_0\| = 1$).

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 для каждого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$*

1) решение $(x(t), p(t))$ системы

$$\dot{x} = v(F(t, x, u(t)), p), \quad \dot{p} = -p d_x v(F(t, x, u(t)), p), \quad x(t_0) = x_0, \ p(t_0) = p_0, \tag{2.3}$$

непрерывно дифференцируемо по начальным векторам (x_0, p_0);

2) для любого $t_* \in [t_0, t_1]$ множество $\partial X(t_*; u(\cdot), X_0)$ — гиперповерхность класса C^1 в R^n.

Доказательство. Из равенства

$$v(F(t, x, u(t)), p) = \frac{\partial}{\partial p} \rho(p; F(t, x, u(t)))$$

и предположений о функции $\rho(p; F(t, x, u(t)))$ следует, что решение системы дифференциальных уравнений (2.3) непрерывно дифференцируемо по (x_0, p_0). Докажем второе утверждение. В силу полученного свойства гладкости решений (2.3) по начальным условиям, предположения 2 и следствия 1 граница $\partial X(t_*; u(\cdot), X_0)$ является образом гиперповерхности ∂X_0 в R^n при C^1-диффеоморфизме [8] $x = x(t_*; u(\cdot), x_0)$ $(x_0 \in \partial X_0, x \in \partial X(t_*; u(\cdot), X_0))$. Следовательно, множество $\partial X(t_*; u(\cdot), X_0)$ — многообразие класса C^1 размерности $n-1$.

3. **Решение задачи.** В данном пункте формулируются необходимые условия, которым удовлетворяет управление $u^0(\cdot)$, решающее задачу 1. Вначале преобразуем оптимизируемый функционал

$$\Phi(u(\cdot))=\int\limits_{X(t_1;\, u(\cdot),\, X_0)}\varphi(x)\,dx. \tag{3.1}$$

На основании следствий из теоремы 1 множество $X(t_1;\, u(\cdot),\, X_0)$ — компакт с краем класса C^1 в R^n [8, 10]. Обозначим $\omega(x)$ следующую дифференциальную $(n-1)$-форму класса C^1:

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,dx_{/i},$$

$$\lambda_i(x)=\frac{(-1)^{i-1}}{n}\int\limits_0^{x_i}\varphi(x_1,\,\ldots,\,x_{i-1},\,s,\,x_{i+1},\,\ldots,\,x_n)\,ds, \tag{3.2}$$

где $x=(x_1,\,\ldots,\,x_n)'$, а символ $dx_{/i}$ означает внешнее произведение $dx_{/i}=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_n$. Ясно, что $d\omega=\varphi(x)\,dx$, и по формуле Стокса

$$\int\limits_{X(t_1;\, u(\cdot),\, X_0)}\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\partial X(t_1;\, u(\cdot),\, X_0)}\omega,$$

где ориентация $\partial X(t_1;\, u(\cdot),\, X_0)$ согласована [8, 10] с ориентацией R^n. На основании следствий из теоремы 1

$$\int\limits_{\partial X(t_1;\, u(\cdot),\, X_0)}\omega=\varepsilon\int\limits_{\partial X_0}\omega^*,$$

где $\varepsilon=1$, если C^1-диффеоморфизм $x=x(t_1;\, u(\cdot),\, x_0)$ сохраняет ориентацию, и $\varepsilon=-1$ в противном случае; ω^* — прообраз дифференциальной формы ω при указанном диффеоморфизме:

$$\omega^*=\sum_{i=1}^{n}r_i(x^0;\, u(\cdot))\,dx^0_{/i},$$
$$r_i(x^0;\, u(\cdot))=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x(t_1;\, u(\cdot),\, x^0))\,\frac{D(x_{/k})}{D(x^0_{/i})} \tag{3.3}$$

(здесь $\Delta_{i,k}=D(x_{/k})/D(x^0_{/i})$ — якобиан $(n-1)$-векторной функции $(x_1,\,\ldots$ $\ldots,\,x_{k-1},\,x_{k+1},\,\ldots,\,x_n)$ по переменной $(x^0_1,\,\ldots,\,x^0_{i-1},\,x^0_{i+1},\,\ldots,\,x^0_n))$.

Итак,

$$\Phi(u(\cdot))=\varepsilon\int\limits_{\partial X_0}\omega^*, \tag{3.4}$$

где ω^* задается формулами (3.3).

Необходимые условия оптимальности в задаче 1 получим, следуя схеме рассуждений работ [3, 11].

Пусть $u^0(\cdot)$ — решение задачи 1, т. е.

$$\Phi(u^0(\cdot))=\min\Phi(u(\cdot)),\quad u(\cdot)\in\mathcal{U}. \tag{3.5}$$

Обозначим u^* произвольный вектор из $U\subset R^m$ и t_* — любую правильную точку функции $u^0(\cdot)$ $(t_0<t_*<t_1)$. Положим для малых $\tau>0$ $(\tau<t_*-$ $-t_0)$ $u_\tau(t)=u^*$ при $t\in(t_*-\tau,\,t_*)$ и $u_\tau(t)=u^0(t)$ для $t\notin(t_*-\tau,\,t_*)$ $(t_0\leqslant$ $\leqslant t\leqslant t_1)$. Из (3.5) следует, что $\tau^{-1}(\Phi(u_\tau(\cdot))-\Phi(u^0(\cdot)))\geqslant 0$.

Аналогично [3, 11] получим выражение для приращения по τ $x(t_1;$ $u_\tau(\cdot), x_0)$:

$$x(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x_0)=x(t_1;\, u^0(\cdot),\, x_0)+\tau\psi(t_1;\, u^0(\cdot),\, u^*,\, t_*,\, x_0)+o(\tau,\, x_0), \quad (3.6)$$

где $\tau^{-1}o(\tau, x_0)\to 0$ при $\tau\to 0+$ равномерно по $x_0\in X_0$, $\psi(t)=\psi(t;\, u^0(\cdot),$ $u^*, t_*, x_0)$ — решение системы дифференциальных уравнений $(t_*\leqslant t\leqslant t_1)$

$$\frac{d}{dt}\psi(t)=d_x v(F(t,\, x(t;\, u^0(\cdot),\, x_0),\, u^0(t)),\, N(x(t;\, u^0(\cdot),\, x_0), \\ X(t,\, u^0(\cdot),\, X_0)))\psi(t), \quad (3.7)$$

$$\psi(t_*)=v(F(t_*,\, x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x_0),\, u^*),\; N(x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x_0), \\ X(t_*;\, u^0(\cdot),\, X_0)))-v(F(t_*,\, x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x_0),\, u^0(t_*)), \\ N(x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x_0),\, X(t_*;\, u^0(\cdot),\, X_0))) \quad (3.8)$$

(здесь $N(x, X)$ обозначен единичный опорный вектор к множеству X в точке $x\in\partial X$).

Найдем приращения относительно τ якобианов

$$\Delta_{i,k}(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)=D(x_{/k})/D(x^0_{/i}) \quad (x=x(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0))$$

в функционале $\Phi(u_\tau(\cdot))$ (3.3), (3.4).

Рассмотрим матрицу $\Delta=\{(-1)^{i+k}\Delta_{i,k}\}$ $(i, k=1, \ldots, n)$, которая является присоединенной к матрице Якоби $\Delta=\left\{\dfrac{\partial x_i}{\partial x^0_k}\right\}$ $(i, k=1, \ldots, n)$; $\Delta=\Delta(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)$. Если существуют производные $\dfrac{d}{d\tau}\Delta$ и $\dfrac{d}{d\tau}\det\Delta$ в точке $\tau=0+$ ($\det\Delta$ — якобиан), то

$$\frac{d}{d\tau}\Delta\,|_{\tau=0+}=\frac{d}{d\tau}((\det\Delta)\Delta^{-1})\,|_{\tau=0+}=\Delta^{-1}\frac{d}{d\tau}(\det\Delta)\,|_{\tau=0+}- \\ -(\det\Delta)\Delta^{-1}\left(\frac{d}{d\tau}\Delta\right)\Bigg|_{\tau=0+}\Delta^{-1}. \quad (3.9)$$

(Здесь Δ^{-1} существует, так как $\det\Delta(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)\neq 0$.) Найдем вначале $\dfrac{d}{d\tau}\Delta$ в точке $\tau=0+$. В силу принятых предположений можно менять порядок дифференцирования

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial x^0_k}\right\}\Bigg|_{\tau=0+}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^0_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0+}\right\} \quad (i, k=1, \ldots, n).$$

Тогда получаем

$$\frac{d}{d\tau}\Delta(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)\,|_{\tau=0+}=R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)\Delta(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0), \quad (3.10)$$

$$R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)=X(t_1,\, t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0)d_x\{v(F(t_*,\, x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, u^*), \\ N(x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, X(t_*;\, u^0(\cdot),\, X_0)))-v(F(t_*,\, x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0), \\ u^0(t_*)),\, N(x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, X(t_*;\, u^0(\cdot),\, X_0)))\}X(t_*,\, t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0)+ \quad (3.11) \\ +\int_{t_*}^{t_1}X(t_1,\, t;\, u^0(\cdot),\, x^0)d_x(d_x v(F(t,\, x(t;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, u^0(t)),\, N(x(t;\, u^0(\cdot),\, x^0), \\ X(t;\, u^0(\cdot),\, X_0)))\psi(t;\, u^0(\cdot),\, u^*,\, t_*,\, x^0))X(t,\, t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0)\,dt,$$

$$\psi(t;\, u^0(\cdot),\, u^*,\, t_*,\, x^0)=X(t,\, t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0)\,(v(F(t_*,\, x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, u^*),$$
$$N(x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, X(t_*;\, u^0(\cdot),\, X^0)))-v(F(t_*,\, x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0), \tag{3.12}$$
$$u^0(t_*)),\, N(x(t_*;\, u^0(\cdot),\, x^0),\, X(t_*;\, u^0(\cdot),\, X_0)))),$$

где $X(t,\, s;\, u^0(\cdot),\, x^0)$ — матрица Коши системы (3.7). По формуле Лиувилля из (3.10) следует равенство

$$\frac{d}{d\tau}\det\Delta(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)\,|_{\tau=0+}=\operatorname{Tr}R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)\times$$
$$\times\det\Delta(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0) \tag{3.13}$$

(здесь $\operatorname{Tr}R$ — след матрицы R). Объединяя соотношения (3.9)—(3.12), получаем

$$\frac{d}{d\tau}\Delta(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)\,|_{\tau=0+}=\Delta(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0)\,(\operatorname{Tr}R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)E-$$
$$-R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)) \tag{3.14}$$

(E — единичная матрица). Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\Delta_{i,k}(t_1;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)\,|_{\tau=0+}=(-1)^k\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\Delta_{i,l}(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0)\times$$
$$\times(\operatorname{Tr}R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)E-R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0))_{l,k} \tag{3.15}$$

($R_{l,k}$ — $(l,\, k)$-й элемент матрицы R).

Отметим, что число ε в функционале Φ (формула (3.4)) при достаточно малых $\tau>0$ не зависит от τ:

$$\varepsilon=\operatorname{sign}\det\left\{\frac{\partial x(t;\, u_\tau(\cdot),\, x^0)}{\partial x^0}\right\}=\operatorname{sign}\det\left\{\frac{\partial x(t;\, u^0(\cdot),\, x^0)}{\partial x^0}\right\}.$$

Вычисляя вариацию $r_i(x^0,\, u_\tau(\cdot))$ в (3.3), получим

$$r_i(x^0,\, u_\tau(\cdot))=r_i(x^0,\, u^0(\cdot))+\tau\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\lambda_k}{\partial x}(x(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0))\psi(t_1;\, u^0(\cdot),\right.$$
$$u^*,\, t_*,\, x^0)\Delta_{i,k}(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0)+\lambda_k(x(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0))\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}\Delta_{i,l}(t_1;\, u^0(\cdot),$$
$$\left.x^0)\,(\operatorname{Tr}R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)E-R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0))_{l,k}\right\}+\tau^2K(\tau,\, x^0), \tag{3.16}$$

где $\sup\{|K(\tau,\, x_0)|:\tau\in(0,\, \tau_0],\ x_0\in\partial X_0\}<+\infty$. В результате вычисления вариации оптимизируемого функционала $\Phi(u_\tau(\cdot))$ получаем следующее необходимое условие оптимальности программного управления $u^0(\cdot)$.

Теорема 2. *Пусть $u^0(\cdot)$ — решение задачи 1. Тогда для почти всех t_* из отрезка $[t_0,\, t_1]$ выполнено условие*

$$\min_{u^*\in U}\int\limits_{\partial X_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial x}(x(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0))\psi(t_1;\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)+\right.\right.$$
$$+\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}\lambda_l(x(t_1;\, u^0(\cdot),\, x^0))\,(\operatorname{Tr}R(t_1,\, t_*,\, u^0(\cdot),\, u^*,\, x^0)E-$$

$$-R(t_1, t_*, u^0(\cdot), u^*, x^0))_{k,l}\Big)\Delta_{i,l}(t_1; u^0(\cdot), x^0)\, dx^0_{/i}\Big)=0,$$

где функции λ_k, ψ, R, Δ определяются соотношениями (3.2), (3.12), (3.11), (3.3) соответственно, а $x=x(t; u^0(\cdot), x^0)$ есть решение системы

$$\frac{dx}{dt}=v(F(t, x, u^0(t)), N(x, X(t; u^0(\cdot), X_0)))$$

(здесь $X(t; u^0(\cdot), X_0)$ — пучок решений включения (1.1) при $u=u^0(\cdot)$; $N(x, X(t; u^0(\cdot), X_0))$ — единичный опорный вектор к множеству $X(t; u^0(\cdot), X_0)$ в точке $x\in\partial X(t; u^0(\cdot), X_0)$).

Замечания. 1. Оптимальное программное управление в задаче 1 может не существовать. В этом случае можно сформулировать необходимое условие, которому удовлетворяют ε-оптимальные программные управления [3, 11].

2. Ясно, что в качестве формы ω в (3.2) можно взять любую дифференциальную $(n-1)$-форму ω_1, для которой $d\omega_1=\varphi(x)dx$. В этом случае необходимые условия оптимальности запишутся в ином, но эквивалентном виде.

3. Предположение 3 (условие 4)) можно ослабить, снизив требование о степени гладкости опорной функции $\rho(l; F(t, x, u))$ до класса C^2. Тогда неравенства (2.1) будут выполнены при некоторых L, M и функция $v(F(t, x, u), p)$ будет непрерывно дифференцируема по $(p, x)\in\in(R^n\setminus\{0\})\times R^n$, причем матричная функция $d_x v(F(t, x, u), p)$ будет удовлетворять условию Липшица по переменной x [6]. В этом случае правая часть системы дифференциальных уравнений (2.2), (2.3) является лишь липшицевой функцией фазовой переменной и решение $(x(t), p(t))$ системы (2.3) уже не непрерывно дифференцируемо по начальным условиям (см. следствие 2 теоремы 1). Тем не менее, рассуждая по схеме работы [3], можно получить необходимые условия оптимальности в задаче 1, обобщающие приведенные в теореме 2 настоящей работы. Указанное обобщение можно получить и другим путем, а именно аппроксимировав многозначное отображение $F(t, x, u)$ последовательностью отображений $\{F_k(t, x, u)\}$ с опорными функциями $\rho(l; F_k(t, x, u))$ класса C^3 по $(l, x)\in(R^n\setminus\{0\})\times R^n$ [12]. Нетрудно показать, что аппроксимирующая последовательность $\{F_k\}$, построенная по методу [12], удовлетворяет условиям (2.1) с теми же константами L и M, а множества $F_k(t, x, u)$ (при фиксированных (t, x, u)) сохраняют свойство R-выпуклости (см. предположение 3, условие 1)). Тогда решения систем вида (2.2) (при $F=F_k$) определены на том же промежутке $[t_0, t_1]$, что и решение исходной системы (2.2), причем правые части последовательности систем (2.2) (при $F=F_k$) аппроксимируют правую часть системы (2.2) (последнее вытекает из свойств функции $v(A, p)$ и алгоритма построения последовательности [12]). Искомые необходимые условия оптимальности получаются в результате предельного перехода, описанного, например, в [13].

Литература

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
2. Kurzhanskii A. B. // Problems of Contr. and Inform. Theory. 1975. Vol. 4 (3). P. 205—218.
3. Филиппова Т. Ф. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 10. С. 1693—1699.
4. Ананьина Т. Ф. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 10. С. 1744—1748.
5. Сокол В. А., Тынянский Н. Т. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1980. Т. 20, № 2. С. 277—288.
6. Lojasiewicz St. // Astérisque Soc. Math. France. 1980. N 75—76. P. 187—197.
7. Plis A. // Inf. Conf. on Diff. Eq. Academic Press. 1975. P. 646—650.
8. Шварц Л. Анализ. М., 1972. Т. 1, 2.
9. Hermes H. // Advances in Math. 1970. Vol. 4. P. 149—169.

10. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
11. Ekeland I. // J. of Math. Anal. and Appl. 1974. Vol. 47. P. 324—353.
12. Асеев С. М. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 3. С. 460—476.
13. Перцель В. А. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 8. С. 1376—1388.

Институт математики и механики Уральского научного центра АН СССР

Поступила в редакцию 18 января 1985 г.

УДК 517.938;517.925.52

Д. Н. ЧЕБАН

НЕАВТОНОМНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

В статье изучаются неавтономные диссипативные динамические системы. Приводится ряд условий, эквивалентных (в конечномерном пространстве) диссипативности. Формулируются два признака диссипативности общих неавтономных динамических систем (как с непрерывным, так и с дискретным временем) в терминах функций Ляпунова. Дается приложение этих результатов к неавтономным дифференциальным и разностным уравнениям.

1. Неавтономные диссипативные динамические системы. Будем использовать терминологию и обозначения, общепринятые в теории динамических систем [1—3], а также введенные в работе [4]. Пусть X и Y — метрические пространства, (X, h, Y) — конечномерное векторное расслоение [5] и $|\cdot|$ — некоторая риманова метрика на (X, h, Y), $\mathbf{R}$ ($\mathbf{Z}$) — группа вещественных (целых) чисел, $S=\mathbf{R}$ или $\mathbf{Z}$, $T=\{t : t\in S,\ t\geqslant 0\}$ и $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h\rangle$ — неавтономная динамическая система [4].

Неавтономную систему $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h\rangle$ назовем диссипативной, если существует положительное число R такое, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |\pi^t x| < R \quad (\forall x\in X). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть Y компактно и $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h\rangle$ — неавтономная динамическая система, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) неавтономная система $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h\rangle$ диссипативна;

2) существует число $r>0$ такое, что для любого $x\in X$ найдется $\tau=\tau(x)>0$, для которого $|\pi^\tau x|<r$;

3) существует непустой компакт $K_1\subset X$ такой, что $\Omega_x \cap K_1 \neq \varnothing$ при всех $x\in X$;

4) существует непустой компакт $K_2\subset X$ такой, что $\varnothing\neq\Omega_x\subset K_2$ для любого $x\in X$;

5) существует число $R_0>0$ такое, что для любого $R>0$ найдется $l(R)>0$, что

$$|\pi^t x| \leqslant R_0 \tag{2}$$

при всех $t\geqslant l(R)$ и $|x|\leqslant R$.

Доказательство. Очевидно из условия 1) следует 2). Покажем, что из 2) следует 3). Выберем $K_1=\{x\,|\,x\in X,\ |x|\leqslant r\}$. В силу компактности Y и конечномерности векторного расслоения (X, h, Y) множество K_1 компактно. Пусть $x\in X$ и $t_k\to+\infty$, тогда, согласно 2), существует $\tau_k>0$ такое, что $\pi^{t_k+\tau_k}x\in K_1$, и, следовательно, $\{\pi^{t_k+\tau_k}x\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{x}=\lim\limits_{k\to+\infty}\pi^{t_k+\tau_k}x$, тогда $\bar{x}\in\Omega_x\cap K_1$.

Теперь покажем, что из условия 3) следует 4). Пусть K_1 — непустой компакт из условия 3), тогда в силу локальной компактности X (это следует из компактности Y и конечномерности векторного расслоения