С. М. Рацеев, О минимальных алгебрах Лейбница с нильпотентным коммутантом, *Алгебра и анализ*, 2015, том 27, выпуск 1, 178–193

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №1

О МИНИМАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ ЛЕЙБНИЦА С НИЛЬПОТЕНТНЫМ КОММУТАНТОМ

© С. М. РАЦЕЕВ

Пусть $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность коразмерностей многообразия алгебр Лейбница $\mathbf{V}$. Исследуется функция сложности $\mathcal{C}(\mathbf{V},z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\mathbf{V})z^n/n!$. Это экспоненциальная производящая функция для последовательности коразмерностей. Ранее функции сложности использовались при изучении алгебр Ли и ассоциативных алгебр. В работе получена точная формула функции сложности для многообразия алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом, определенного тождеством $x_0(x_1x_2)(x_3x_4)\dots(x_{2s-1}x_{2s}) = 0$. На основе полученной функции выведена точная формула для коразмерностей данных алгебр, имеет место экспоненциальный рост. Также построены две серии многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом полиномиального роста и минимальных в следующем смысле. Последовательность коразмерностей любого многообразия первой серии растет как полином некоторой степени k, но последовательность коразмерностей любого собственного подмногообразия растет как полином степени строго меньшей, чем k. Последовательность коразмерностей любого многообразия второй серии растет как полином с некоторым значением старшего коэффициента q, но последовательность коразмерностей любого собственного подмногообразия растет как полином, старший коэффициент которого строго меньше, чем q.

Введение

На протяжении всей работы предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле имеет нулевую характеристику.

В 1965 г. А. М. Блох [1] ввел в рассмотрение неантикоммутативные алгебры Ли, которые определяются тождеством Лейбница

$$(xy)z = (xz)y + x(yz)$$

и носят название *алгебр Лейбница.* Тождество Лейбница представляет собой следующее условие: оператор правого умножения на любой элемент

Ключевые слова: алгебра Лейбница, алгебра Ли, многообразия алгебр, рост многообразия.

алгебры является дифференцированием. Если в алгебре Лейбница выполнено тождество $x^2 = 0$, то она будет являться алгеброй Ли. Позже эти алгебры возникли в работе Ж.-Л. Лодея и Д. Куиллена [2] при изучении свойств циклических гомологий и гомологий Хохшильда алгебр матриц. Более активно алгебры Лейбница стали изучаться в 90-х годах, начиная с работы Ж.-Л. Лодея [3]. Данные алгебры связаны естественным образом с дифференциальной геометрией, гомологической алгеброй, классической алгебраической топологией и некоммутативной геометрией [3].

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Лейбница над полем K, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество свободных образующих, P_n — подпространство в $L(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в свободной алгебре $L(X)$ (все необходимые определения и сведения из теории PI-алгебр можно найти, например, в монографии [4]). Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad c_n(\mathbf{V}) = \dim\ P_n(\mathbf{V}).$$

Асимптотическое поведение последовательности $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ определяет *рост многообразия* $\mathbf{V}$.

Известно, что пространство $P_n(\mathbf{V})$ можно рассматривать как модуль над групповым кольцом KS_n, где S_n — симметрическая группа степени n. Тогда $P_n(\mathbf{V})$ можно разложить в прямую сумму неприводимых S_n-подмодулей. Неприводимые представления S_n можно описывать на языке разбиений и диаграмм Юнга. Последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ называют *разбиением числа* n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0$. По каждому разбиению λ строится диаграмма Юнга, которая представляет собой таблицу из k строк, в которой i-я строка состоит из λ_i клеток. Известно, что каждой диаграмме Юнга соответствует неприводимый S_n-модуль из разложения пространства $P_n(\mathbf{V})$ и два модуля изоморфны тогда и только тогда, когда они соответствуют одной диаграмме.

Пусть χ_λ — характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n. Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(\mathbf{V})$ для многообразия $\mathbf{V}$ имеет место разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda,$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n многообразия $\mathbf{V}$. Тогда $\chi_n(\mathbf{V})$ называется n-м *кохарактером* многообразия $\mathbf{V}$.

Пусть диаграмма d соответствует разбиению $\lambda \vdash n$. Размерность неприводимого S_n-модуля, соответствующего диаграмме d, определяется следующей формулой крюков:

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in d} h_{ij}(d)},$$

где $h_{ij}(d) = (\lambda_i - i) + (\mu_j - j) + 1$, λ_i — длина i-й строки, μ_j — длина j-го столбца диаграммы d.

В элементах будем опускать скобки при их левонормированной расстановке: $((ab)c) = abc$.

Для удобства записи элементы, содержащие кососимметричный набор, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой или волной сверху. Например,

$$y\bar{x}_1 z\bar{x}_2 = yx_1zx_2 - yx_2zx_1.$$

§1. Функции сложности для алгебр Лейбница

Ю. П. Размыслов предложил рассматривать для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ *функцию сложности*

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Это один из примеров экспоненциальной производящей функции [5]. Функции сложности оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий. Применение функций сложности для многообразий алгебр Ли оказалось плодотворным и привело к классификации типов роста [6, 7].

Рассмотрим функцию сложности в более общем виде. Пусть имеется алгебра (группоид), порожденная счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, и A — подпространство в данной алгебре (множество элементов в группоиде). Для любого набора $Y = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \subset X$ различных элементов обозначим через $P_n(A, Y)$ линейную оболочку (множество) всех полилинейных элементов степени n от Y в A. Пусть размерность этой линейной оболочки (число элементов) $c_n(A, Y)$ не зависит от выбора Y, а зависит только от n. Тогда обозначим $c_n = c_n(A, Y)$ и будем говорить, что для A определена функция сложности относительно множества X:

$$\mathcal{C}(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

(для ассоциативных алгебр и группоидов с единицей сумма берется с $n = 0$, при этом $c_0 = 1$).

Лемма 1 (см. [5]). *Пусть Γ — группоид (алгебра), порожденный счетным множеством X. Предположим, что для подмножеств (подпространств) $A \subset \Gamma$, $B \subset \Gamma$ определены функции сложности.*

1. *Пусть $U = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, ($U = A \oplus B$ — прямая сумма). Тогда U обладает функцией сложности, причем $\mathcal{C}(U, z) = \mathcal{C}(A, z) + \mathcal{C}(B, z)$.*

2. *Пусть все элементы $a * b$, $a \in A$, $b \in B$, множества $A * B \subset \Gamma$ различны (линейно независимы), где «$*$» — произведение в группоиде (алгебре). Тогда $A * B$ обладает функцией сложности, причем $\mathcal{C}(A * B, z) = \mathcal{C}(A, z)\mathcal{C}(B, z)$.*

Обозначим через $\mathbf{W}_s$ многообразие алгебр Лейбница, определенное тождеством

$$x_0(x_1x_2)(x_3x_4)\dots(x_{2s-1}x_{2s}) = 0.$$

Как видно из определяющего тождества, коммутант многообразия $\mathbf{W}_s$ является нильпотентным. В работе [8] получены оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом над произвольным полем. В работе [9] показано, что в случае основного поля нулевой характеристики многообразие W_2 имеет почти полиномиальный рост (рост самого многообразия не является полиномиальным, но всякое собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост).

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Теорема 1. *Для многообразия $\mathbf{W}_s$ над произвольным полем верны следующие утверждения:*

1) *$\mathbf{W}_s$ имеет следующую функцию сложности:*

$$\mathcal{C}(\mathbf{W}_s, z) = \frac{z}{z-1}\Big(\Big(1 + (z-1)\exp(z)\Big)^s - 1\Big);$$

2) *коразмерности многообразия $\mathbf{W}_s$ вычисляются по следующей формуле:*

$$c_n(\mathbf{W}_s) = \sum_{k=1}^{s} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} k^{-i-1} \frac{n!}{(n-i-1)!},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k;

3) *$c_n(\mathbf{W}_s) \approx n^s s^{n-s}$, $n \to \infty$.*

Доказательство. 1) В работе [10] показано, что базис полилинейной компоненты $P_n(\mathbf{W}_s)$ состоит из элементов вида

$$x_m x_{i_1} \dots x_{i_k} (x_{11} \dots x_{1a_1}) \dots (x_{c1} \dots x_{ca_c}), \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered} m = 1, 2, \dots n, \quad \{x_m, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{ij}\} = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad k \geqslant 0, \\ a_1, \dots, a_c \geqslant 2, \quad c \leqslant s-1, \quad x_{i_1} < \dots < x_{i_k}, \end{gathered} \tag{2}$$

и переменные в каждой скобке $(x_{j1} \dots x_{ja_j})$ упорядочены следующим образом:

$$x_{j1} > x_{j2} < x_{j3} < \dots < x_{ja_j}.$$

Поэтому $P_n(\mathbf{W}_s)$ представимо в виде прямой суммы

$$P_n(\mathbf{W}_s) \cong \bigoplus_{c=0}^{s-1} U_{c,n},$$

где $U_{c,n}$ является линейной оболочкой элементов вида (1) с условием (2) и фиксированным значением c (количество скобок). Заметим, что множество полилинейных мономов вида

$$\{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \mid t \geqslant 2,\ i_1 > i_2 < \dots < i_t\}$$

соответствует разности двух множеств

$$\{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \mid t \geqslant 2,\ i_2 < \dots < i_t\} \backslash \{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \mid t \geqslant 2,\ i_1 < i_2 < \dots < i_t\}.$$

Поэтому, учитывая лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(U_{0,n}, z) &= \exp(z) z, \\ \mathcal{C}(U_{i,n}, z) &= \exp(z) z \big(z(\exp(z) - 1) - (\exp(z) - 1 - z)\big)^i \\ &= \exp(z) z \big(1 + (z-1)\exp(z)\big)^i, \quad i = 1, \dots, s-1, \\ \mathcal{C}(\mathbf{W}_s, z) &= \exp(z) z \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} \big(1 + (z-1)\exp(z)\big)^i\right). \end{aligned}$$

Осталось привести функцию сложности $\mathcal{C}(\mathbf{W}_s, z)$ к требуемому виду, учитывая равенство [11]

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}.$$

2) Запишем функцию сложности в виде

$$\mathcal{C}(\mathbf{W}_s, z) = \sum_{k=1}^{s} C_s^k z(z-1)^{k-1} \exp(kz). \tag{3}$$

При этом

$$\begin{aligned} z(z-1)^{k-1}\exp(kz) &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} z^{i+1}(-1)^{k-1-i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} z^m \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{\infty} C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i} z^{m+i+1}\frac{k^m}{m!} = /m+i+1=n/ \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{n=i+1}^{\infty} C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i}\frac{k^{n-i-1}}{(n-i-1)!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i}\frac{1}{k^{i+1}}\frac{n!}{(n-i-1)!}\right)\frac{k^n}{n!} z^n. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовался тот факт, что $\frac{n!}{(n-i-1)!} = 0$ при $n-i-1<0$, $n \geqslant 2s$. Подставим последнюю двойную сумму в (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{s} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i}\frac{1}{k^{i+1}}\frac{n!}{(n-i-1)!}\right).$$

То, что находится внутри скобок, и есть $c_n(\mathbf{W}_s)$.

3) Следует из п. 2, при этом наибольший рост даст слагаемое при $k=s$, $i=s-1$. □

В следующем параграфе рассматриваются подмногообразия в $\mathbf{W}_s$ с экстремальными свойствами.

§2. Серия минимальных многообразий алгебр Лейбница по отношению к степени полинома

С помощью следующей леммы из любой ассоциативной алгебры можно построить алгебру Лейбница.

Лемма 2. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. На декартовом квадрате $B = A\times A$ определим операции сложения и умножения элементов множества B, а также операцию умножения на элементы поля K:*

$$\begin{aligned} (x_1,x_2)+(y_1,y_2) &= (x_1+y_1, x_2+y_2), \\ (x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) &= ([x_1,y_1], x_2\wedge y_1), \\ \alpha(x_1,x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2), \end{aligned}$$

где $[x_1,y_1] = x_1\wedge y_1 - y_1\wedge x_1$, $\alpha\in K$, $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in B$. Тогда полученная алгебра B будет являться алгеброй Лейбница.

Пусть Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей, Λ_{2k} — алгебра Грассмана с единицей и $2k$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$, $Q = \Lambda \times \Lambda$, $Q_{2k} = \Lambda_{2k} \times \Lambda_{2k}$ — алгебры Лейбница, построенные с помощью леммы 2.

В работе [12] показано, что алгебра Лейбница Q порождает многообразие $\mathrm{var}(Q)$ почти полиномиального роста, тождества

$$z(x_1x_2x_3) = 0, \quad z(xy)(xy) = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры Q и многообразие $\mathrm{var}(Q)$ является наименьшим многообразием алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно лейбницево стандартное тождество, т.е. тождества вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} = 0.$$

Под lin будем подразумевать полную линеаризацию полинома.

Нетрудно проверить, что идеал тождеств алгебры Q_0 порождается тождеством $x(yz) = 0$,

$$\begin{aligned} &c_n(Q_0) = n, \\ &\chi_n(Q_0) = \chi_n + \chi_{(n-1,1)}, \\ &P_n(Q_0) = KS_n(\mathrm{lin}\ x_1^n) \oplus KS_n(\mathrm{lin}\ \overline{x}_1\overline{x}_2 x_1^{n-2}), \end{aligned}$$

любое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(Q_0)$ является нильпотентным. Данные сведения играют роль доказательства базы индукции следующей теоремы.

Теорема 2. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница Q_{2k}, $k \geqslant 1$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $Id(Q_{2k})$ порождается тождествами*

$$z(x_1x_2x_3) = 0, \quad z(xy)(xy) = 0, \quad z(x_1y_1)\ldots(x_{k+1}y_{k+1}) = 0; \tag{4}$$

2) *для любого $n \geqslant 1$ полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$\begin{gathered} x_m x_{i_1} \ldots x_{i_r}(x_{j_1}x_{j_2}) \ldots (x_{j_{2s-1}}x_{j_{2s}}), \\ r + 2s + 1 = n,\ i_1 < i_2 < \ldots < i_r,\ j_1 < j_2 < \ldots < j_{2s},\ 0 \leqslant s \leqslant k,\ r \geqslant 0, \end{gathered} \tag{5}$$

образуют базис пространства $P_n(Q_{2k})$;

3) *для функции сложности верно следующее равенство:*

$$\mathcal{C}(Q_{2k}, z) = \exp(z) z \sum_{i=0}^{k} \frac{z^{2i}}{(2i)!};$$

4) *коразмерности вычисляются по следующей формуле*:

$$c_n(Q_{2k}) = \begin{cases} n2^{n-2}, & 1 < n < 2k+1, \\ n\sum_{i=0}^{k} C_{n-1}^{2i}, & n \geqslant 2k+1, \end{cases}$$

причем для любого $n \geqslant 2k+1$

$$c_n(Q_{2k}) = c_n(Q_{2k-2}) + nC_{n-1}^{2k} \approx \frac{n^{2k+1}}{(2k)!}, \quad n \to \infty,$$

где C_n^k — *число сочетаний из* n *по* k;

5) *для любого* $n \geqslant 2k+1$ *для кохарактеров верно следующее равенство*:

$$\begin{aligned} \chi_n(Q_{2k}) &= \chi_n(Q_{2k-2}) + \chi_{(n-2k+1,1^{2k-1})} + 2\chi_{(n-2k,1^{2k})} + \chi_{(n-2k-1,1^{2k+1})} \\ &\quad + \chi_{(n-2k,2,1^{2k-2})} + \chi_{(n-2k-1,2,1^{2k-1})} \\ &= \chi_{(n)} + 2\sum_{i=1}^{2k} \chi_{(n-i,1^i)} + \chi_{(n-2k-1,1^{2k+1})} + \sum_{i=2}^{2k+1} \chi_{(n-i,2,1^{i-2})}; \end{aligned}$$

6) *для любого* $n \geqslant 2k+1$ $P_n(Q_{2k})$ *имеет следующее разложение на неприводимые* S_n*-модули*:

$$\begin{aligned} P_n(Q_{2k}) &= P_n(Q_{2k-2}) \oplus KS_n(\mathrm{lin}\ x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k-1}) \\ &\oplus KS_n(\mathrm{lin}\ \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-1}) \\ &\oplus KS_n(\mathrm{lin}\ x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-2}) \\ &\oplus KS_n(\mathrm{lin}\ \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+2}x_1^{n-2k-2}) \\ &\oplus KS_n(\mathrm{lin}\ \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k-2}) \\ &\oplus KS_n(\mathrm{lin}\ \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-3}) \\ &= KS_n(\mathrm{lin}\ x^n)\bigoplus_{i=1}^{2k}(A_{n,i}^1 \oplus A_{n,i}^2) \oplus A_{n,2k+1}^1 \bigoplus_{i=2}^{2k+1} B_{n,i}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{n,i}^1 &= KS_n(\mathrm{lin}\ \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{i+1}x_1^{n-i-1}), \\ A_{n,i}^2 &= KS_n(\mathrm{lin}\ x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{i+1}x_1^{n-i-2}), \end{aligned}$$

причем неприводимые S_n*-модули* $A_{n,i}^j$, $j = 1,2$, *соответствуют разбиению* $(n-i,1^i)$, *неприводимый* S_n*-модуль*

$$B_{n,i} = KS_n(\mathrm{lin}\ \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_ix_1^{n-i-2})$$

соответствует разбиению $(n-i,2,1^{i-2})$;

7) *если* $\mathbf{W}$ — *некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(Q_{2k})$, *то найдется такой многочлен* $f(x)$ *с рациональными коэффициентами, зависящий от* $\mathbf{W}$, *что для всех достаточно больших* n *выполнено неравенство* $c_n(\mathbf{W}) \leqslant f(n)$, *причем* $\deg\ f(x) < 2k+1$.

Доказательство. Понятно, что тождества (4) выполнены в алгебре Q_{2k}. Заметим, что из тождеств $z(xy)(xy) = 0$ и $z(x_1x_2x_3) = 0$ следует тождество $z(x_1y_1)(x_2y_2)+z(x_1y_2)(x_2y_1) = 0$, так как по модулю идеала тождеств $Id(Q_{2k})$ выполнено такое равенство:

$$\begin{aligned}z(x_1y_1)(x_2y_2) + z(x_2y_1)(x_1y_2) + z(x_1y_2)(x_2y_1) + z(x_2y_2)(x_1y_1)\\ = 2z(x_1y_1)(x_2y_2) + 2z(x_1y_2)(x_2y_1).\end{aligned}$$

Поэтому пространство $P_n(Q_{2k})$ является линейной оболочкой элементов вида (5). Предположим, что элементы вида (5) линейно зависимы в $P_n(Q_{2k})$ для некоторого n. В полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (5) найдем такое слагаемое, которое имеет ненулевой коэффициент и минимальное значение s (число скобок). Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha x_m x_{i_1} \dots x_{i_r}(x_{j_1}x_{j_2}) \dots (x_{j_{2s-1}}x_{j_{2s}}), \quad \alpha \in K, \quad \alpha \neq 0.$$

В этом случае во всей линейной комбинации делаем такую подстановку:

$$x_m \to (0,1), \quad x_{i_q} \to (1,0),\ q = 1,\dots,r, \quad x_{j_a} \to (e_a,0),\ a = 1,\dots,2s.$$

Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha 2^s(0, e_1\wedge e_2\wedge\dots\wedge e_{2s})$. Понятно, что равенство $\alpha 2^s(0, e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_{2s}) = (0,0)$ выполнено лишь в случае $\alpha = 0$. Противоречие. Таким образом, условия 1 и 2 доказаны.

Условия 3 и 4 следуют из условия 2.

Условия 5 и 6 доказываются с помощью математической индукции по k. База индукции для $k = 0$ представлена до теоремы.

Используя формулу крюков, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}d_{(n-2k+1,1^{2k-1})} + 2d_{(n-2k,1^{2k})} + d_{(n-2k-1,1^{2k+1})}\\ + d_{(n-2k,2,1^{2k-2})} + d_{(n-2k-1,2,1^{2k-1})} = nC_{n-1}^{2k}.\end{aligned}$$

Поэтому, учитывая предположение индукции и условие 3, достаточно показать, что по модулю идеала тождеств $Id(Q_{2k})$ линейно независимы элементы

$$\text{a)}\ \overline{x}_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k}, \quad x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k-1},$$

линейно независимы элементы

$$\text{b)}\ \overline{x}_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-1}, \quad x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-2},$$

а также следующие элементы не принадлежат идеалу тождеств $Id(Q_{2k})$:

$$\text{c) } \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+2}x_1^{n-2k-2},$$
$$\text{d) } \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k-2},$$
$$\text{e) } \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-3}.$$

a) Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k} + \beta x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k}x_1^{n-2k-1} = 0.$$

Заметим, что в алгебре Q_{2k} для любого s выполнено полилинейное тождество (см. [12])

$$z\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s}z(x_1x_2)\ldots(x_{2s-1}x_{2s}). \tag{6}$$

Учитывая данный факт, сделаем в рассматриваемой линейной комбинации следующую подстановку:

$$x_1 \to (1,0),\ x_2 \to (e_1,0),\ldots,\ x_{2k-1} \to (e_{2k-2},0),\ x_{2k} \to (0,1).$$

Получаем, что $\alpha = 0$. Поэтому от рассматриваемой линейной комбинации остается второе слагаемое, в котором сделаем такую подстановку:

$$x_1 \to (0,1) + (e_1,0) + (1,0),\ x_2 \to (e_2,0),\ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0).$$

Поэтому $\beta = 0$.

b) Как и в предыдущем пункте, в линейной комбинации

$$\alpha\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-1} + \beta x_1\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2k+1}x_1^{n-2k-2}$$

для доказательства равенств $\alpha = \beta = 0$ поочередно произведем следующие подстановки:

$$x_1 \to (e_1,0) + (1,0),\ x_2 \to (e_2,0),\ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0),\ x_{2k+1} \to (0,1),$$
$$x_1 \to (0,1) + (1,0),\ x_2 \to (e_1,0),\ldots,\ x_{2k+1} \to (e_{2k},0).$$

В элементах из пунктов c, d, e сделаем такие подстановки:

c) $x_1 \to (0,1) + (1,0),\ x_2 \to (e_1,0),\ldots,\ x_{2k+1} \to (e_{2k},0),\ x_{2k+2} \to (1,0),$

d) $x_1 \to (0,1) + (e_1,0) + (1,0),\ x_2 \to (1,0) + (e_2,0),$
$x_3 \to (e_3,0),\ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0),$

e) $x_1 \to (0,1) + (e_1,0) + (1,0),\ x_2 \to (1,0) + (e_2,0),$
$x_3 \to (e_3,0),\ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0),\ x_{2k+1} \to (1,0).$

Таким образом, условия 5 и 6 доказаны.

Покажем условие 7. Пусть $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(Q_{2k})$. Тогда для некоторого n элементы вида (5) линейно зависимы, т.е. найдется нетривиальная линейная комбинация данных элементов, принадлежащая идеалу тождеств $Id(\mathbf{W})$. В данной линейной комбинации зафиксируем элемент вида (5) с наименьшим значением s (число скобок) и ненулевым коэффициентом. Если $s < k$, то данную линейную комбинацию поочередно справа домножим на $k-s$ скобок $(y_1y_2), \dots, (y_{2(k-s)-1}y_{2(k-s)})$. Также вместо переменной x_m подставим скобку (z_1z_2). Тогда с учетом тождеств (4) в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1<\dots<i_p\\ j_1<\dots<j_{2k}}} \alpha^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{2k}} z_1z_2x_{i_1}\dots x_{i_p}(x_{j_1}x_{j_2})\dots(x_{j_{2k-1}}x_{j_{2k}}) = 0, \quad \alpha^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{2k}} \in K,$$

в котором числа p и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим полилинейное тождество вида

$$\begin{aligned} &z_1z_2x_{2k+1}\dots x_{2k+p}(x_1x_2)\dots(x_{2k-1}x_{2k}) \\ &= \sum_{\substack{i_1<\dots<i_p,\ \{i_1,\dots,i_p\}\neq\{2k+1,\dots,2k+p\}\\ j_1<\dots<j_{2k},\ \{j_1,\dots,j_{2k}\}\neq\{1,\dots,2k\}}} \beta^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{2k}} z_1z_2x_{i_1}\dots x_{i_p}(x_{j_1}x_{j_2})\dots(x_{j_{2k-1}}x_{j_{2k}}). \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть A и B — два непустых подмножества множества натуральных чисел. Положим $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

Сопоставим каждому их элементов вида (5), у которых $s = k$, следующие два множества:

$$I_1 = \{i_{r-p+1}, \dots, i_r\}, \quad I_2 = \{j_1, \dots, j_{2k}\}.$$

Учитывая тождество (7), пространство $P_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (5), что для элементов с $s = k$ скобками не выполнено неравенство $I_1 > I_2$. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leqslant n\left(1 + C^2_{n-1} + \dots + C^{2k-2}_{n-1} + \left(C^{2k}_{n-1} - C^{2k}_{n-1-p}\right)\right).$$

Остается заметить, что степень полинома $C^{2k}_{n-1} - C^{2k}_{n-1-p}$ по переменной n строго меньше, чем $2k$. □

§3. Серия минимальных многообразий алгебр Лейбница по отношению к старшему коэффициенту полинома

Пусть $UT_k = UT_k(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка k над полем K. Обозначим чрез $J = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$ квадратную матрицу порядка k, которая на диагонали выше главной диагонали содержит единицы, а все остальные элементы равны нулю, e_{ij} — матричные единички. Рассмотрим следующую подалгебру в UT_k над полем K, которая была введена в работе [13]:

$$N_k = \langle E, J, J^2, \ldots, J^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1k}\rangle_K,$$

где E — единичная матрица порядка k. В работе [14], в частности, показано, что алгебры Λ_{2k}, $k \geqslant 1$, N_k, $k \geqslant 3$, порождают минимальные многообразия ассоциативных алгебр полиномиального роста.

Пусть $R_k = N_k \times N_k$ — алгебра Лейбница, построенная с помощью леммы 2. Понятно, что $\mathrm{var}(R_2) = \mathrm{var}(Q_0)$.

Теорема 3. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница R_k, $k \geqslant 3$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств* $\mathrm{Id}(R_k)$ *порождается полилинейными тождествами*

$$z(x_1x_2)(x_3x_4) = 0, \quad z(x_1 \ldots x_k) = 0; \tag{8}$$

2) *для любого $n \geqslant 1$ полилинейные элементы от переменных $x_1,\ldots,x_n$*

$$\begin{aligned} &x_m x_{i_1} \ldots x_{i_r}(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_s}), \\ &r+s+1 = n,\ i_1 < i_2 < \ldots < i_r,\ j_1 > j_2 < \ldots < j_s, \\ &0 \leqslant s \leqslant k-1,\ s \neq 1,\ r \geqslant 0, \end{aligned} \tag{9}$$

образуют базис пространства $P_n(R_k)$;

3) *для функции сложности верно следующее равенство:*

$$\mathcal{C}(R_k, z) = \exp(z)z\biggl(1 + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{i-1}{i!}z^i\biggr);$$

4) *коразмерности вычисляются по следующей формуле:*

$$c_n(R_k) = \begin{cases} n!, & 1 \leqslant n \leqslant \min\{4,k\}, \\ n(n-3)2^{n-2} + 2n, & 5 \leqslant n \leqslant k, \\ n\left(1 + \sum_{i=2}^{k-1}(i-1)C_{n-1}^i\right), & n \geqslant k+1, \end{cases}$$

причем для любого $n \geqslant k+1$

$$c_n(R_k) = c_n(R_{k-1}) + n(k-2)C_{n-1}^{k-1} \approx \frac{k-2}{(k-1)!}n^k, \quad n \to \infty;$$

5) *если* $\mathbf{W}$ *— некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(R_k)$*, то найдется такой многочлен $f(x) = a_0 + \ldots + a_kx^k$ с рациональными коэффициентами, зависящий от* $\mathbf{W}$*, что для всех достаточно больших n*

выполнено неравенство $c_n(\mathbf{W}) \leqslant f(n)$, *причем*

$$a_k \leqslant \frac{k-3}{(k-1)!}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что тождества (8) выполнены в алгебре R_k. В работе [9] показано. что если в многообразии алгебр Лейбница $\mathbf{V}$ выполнено тождество $z(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$, то $P_n(\mathbf{V})$ является линейной оболочкой элементов вида

$$x_m x_{i_1} \ldots x_{i_r}(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_s}), \ \ i_1 < i_2 < \ldots < i_r, \ \ j_1 > j_2 < \ldots < j_s, \ \ r \geqslant 0.$$

Поэтому $P_n(R_k)$ является линейной оболочкой элементов вида (9). Покажем, что элементы вида (9) линейно независимы. Предположим, что для некоторого n нетривиальная линейная комбинация элементов вида (9) принадлежит идеалу тождеств $\mathrm{Id}(R_k)$. Выберем в данной линейной комбинации элемент вида (9) с наименьшим значением s (длина скобки) и ненулевым коэффициентом. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha x_m x_{i_1} \ldots x_{i_r}(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_s}), \quad \alpha \in K, \ \ \alpha \neq 0.$$

В рассматриваемой линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$\begin{aligned} &x_m \to (0,E), \ x_{i_q} \to (E,0), \quad q = 1,\ldots,r,\\ &x_{j_1} \to (e_{12},0), \quad x_{j_2} \to (J,0),\ldots,x_{j_s} \to (J,0). \end{aligned}$$

Тогда все слагаемые, кроме данного, станут равны нулю, а линейная комбинация примет один из следующих видов в зависимости от числа s:

$$\begin{aligned} \alpha(0,E) &= (0,0), \quad s = 0,\\ \alpha(0,e_{s+1}) &= (0,0), \quad s > 1, \end{aligned}$$

что возможно только при $\alpha = 0$. Противоречие. Тем самым условия 1 и 2 доказаны.

Условия 3 и 4 следуют из условия 2.

Пусть $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(R_k)$. Тогда для некоторого n элементы вида (9) линейно зависимы в пространстве $P_n(\mathbf{W})$. Поэтому найдется нетривиальная линейная комбинация данных элементов, принадлежащая идеалу тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{W})$. В данной линейной комбинации зафиксируем элемент вида (9) с наименьшим значением s и ненулевым коэффициентом. Возможны следующие случаи.

а) $s = 0$. В полученной линейной комбинации вместо переменной x_m подставим скобку $(z_1 \ldots z_k)$. Тогда многообразие $\mathbf{W}$ является нильпотентным.

b) $1 < s < k-1$. Вместо переменной x_{j_1} подставим скобку $(y_1 \dots y_{k-s})$, а вместо переменной x_m подставим скобку $(z_1 \dots z_k)$. Получаем, что в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1<\dots<i_p\\ j_1<\dots<j_{s-1}}} \alpha^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{s-1}} z_1 \dots z_k x_{i_1} \dots x_{i_p}(y_1 \dots y_{k-s} x_{j_1} \dots x_{j_{s-1}}) = 0,$$

в котором числа p, $q = s$ и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим полилинейное тождество вида

$$\begin{aligned} &z_1 \dots z_k x_q \dots x_{q+p-1}(y_1 \dots y_{k-q} x_1 \dots x_{q-1}) \\ &= \sum_{\substack{i_1<\dots<i_p,\\ \{i_1,\dots,i_p\}\neq\{q,\dots,q+p-1\}\\ j_1<\dots<j_{q-1},\\ \{j_1,\dots,j_{q-1}\}\neq\{1,\dots,q-1\}}} \beta^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{q-1}} z_1 \dots z_k x_{i_1} \dots x_{i_p}(y_1 \dots y_{k-q} x_{j_1} \dots x_{j_{q-1}}). \end{aligned} \tag{10}$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, сопоставим каждому их элементов вида (9), у которых $s = k-1$, следующие два множества:

$$I_1 = \{i_{r-p+1}, \dots, i_r\}, \quad I_2 = \{j_{k-q+1}, \dots, j_{k-1}\}.$$

Учитывая тождество (10), пространство $P_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (9), что для элементов с длиной скобки $s = k-1$ не выполнено неравенство $I_1 > I_2$. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leqslant n\left(1 + C^2_{n-1} + \dots + (k-3)C^{k-2}_{n-1} + (k-2)(C^{k-1}_{n-1} - C^{k-1}_{n-1-p})\right) = f(n).$$

Остается заметить, что степень полинома $f(n)$ по переменной n строго меньше, чем k.

c) $s = k-1$. Тогда в полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (9) при $s = k-1$ зафиксируем любое слагаемое с ненулевым коэффициентом и сделаем в линейной комбинации такую подстановку: $x_m \to (z_1 z_2)$. Тогда в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1<\dots<i_p\\ j_1>j_2<\dots<j_{k-1}}} \alpha^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{k-1}} z_1 z_2 x_{i_1} \dots x_{i_p}(x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}}) = 0, \quad \alpha^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{k-1}} \in K,$$

в котором числа p и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим, что элемент

$$z_1 z_2 x_k \dots x_{k+p-1}(x_{k-1} x_1 \dots x_{k-2})$$

равен линейной комбинации элементов вида

$$z_1 z_2 x_{i_1} \ldots x_{i_p} (x_{j_1} \ldots x_{j_{k-1}}),$$

для которых

$$i_1 < \ldots < i_p, \quad j_1 > j_2 < \ldots < j_{k-1},$$

причем либо $\{i_1, \ldots, i_p\} \not> \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$, либо $j_1 \not> j_{k-1}$. Поэтому пространство $P_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (9), что для элементов с длиной скобки $s = k-1$ либо не выполнено неравенство $\{i_{r-p+1}, \ldots, i_r\} > \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$, либо не выполнено неравенство $j_1 > j_{k-1}$. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leqslant n\left(1 + C_{n-1}^2 + \ldots + (k-3)C_{n-1}^{k-2} + (k-2)C_{n-1}^{k-1} - C_{n-1-p}^{k-1}\right). \quad \square$$

Список литературы

[1] Блох А. М., *Об одном обобщении понятия алгебры Ли*, Докл. АН СССР **165** (1965), №3, 471–473.

[2] Loday J., Quillen D., *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helw. **59** (1984), no. 4, 565–591.

[3] Loday J., *Une version non commutative des alg'ebres de Lie: les alg'ebres de Leibniz*, Enseign. Math.(2) **39** (1993), no. 3–4, 269–293.

[4] Бахтурин Ю. А., *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.

[5] Гульден Я., Джексон Д., *Перечислительная комбинаторика*, Наука, М., 1990.

[6] Петроградский В. М., *О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли*, Фундам. и прикл. мат. **1** (1995), №4, 989–1007.

[7] Петроградский В. М., *Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции*, Мат. сб. **188** (1997), №6, 119–138.

[8] Рацеев С. М., *Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница*, Вестник Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. **2006**, №6/1, 70–77.

[9] Mishchenko S., Valenti A., *A Leibniz variety with almost polynomial growth*, J. Pure Appl. Algebra **202** (2005), no. 1-3, 82–101.

[10] Рацеев С. М., *О росте некоторых ассоциативных алгебр и алгебр Лейбница*, Вестник Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. **2008**, №6, 177–184.

[11] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998.

[12] Абанина Л. Е., Рацеев С. М., *Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами*, Вестник Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. **2005**, №6, 36–50.

[13] Giambruno A., Mattina D. La., Petrogradsky V. M., *Matrix algebras of polynomial codimention growth*, Israel J. Math. **158** (2007), 367–378.
[14] Mattina D. La., *Varieties of almost polynomial growth*: *classifying their subvarieties*, Manuscripta Math. **123** (2007), no. 2, 185–203.

Ульяновский
государственный университет
432017, Ульяновск
ул. Л. Толстого, 42
Россия
E-mail: ratseevsm@mail.ru

Поступило 2 июня 2014 г.