



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Popov, M. L. Litvinov, A. L. Litvinov, Analysis of a Queueing System with a Hyperexponential Input Flow, *Probl. Peredachi Inf.*, 1977, Volume 13, Issue 1, 97–101

<https://www.mathnet.ru/eng/ppi1072>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

April 19, 2025, 23:25:10



УДК 621.395.74:519.152

**АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ  
ПРИ ВХОДНОМ ПОТОКЕ ТРЕБОВАНИЙ  
С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ**

*В. А. Попов, М. Л. Литвинов, А. Л. Литвинов*

Исследуется система массового обслуживания при произвольном распределении времени обслуживания и гиперэкспоненциальном входном потоке второго порядка. С помощью последнего можно с достаточной степенью точности аппроксимировать входные потоки, у которых коэффициент вариации больше единицы. Получены характеристики функционирования в стационарном состоянии.

В настоящее время достаточно хорошо изучены системы массового обслуживания (СМО), в которых один из потоков событий является эрланговским [1]. Между тем гиперэкспоненциальные потоки являются важным дополнением эрланговских в случае аппроксимации такими потоками событий реальных систем, для которых отношение среднеквадратичного отклонения времени между соседними событиями потока к математическому ожиданию этого времени (коэффициент вариации) больше единицы. Уже для гиперэкспоненциального потока второго порядка при фиксированном математическом ожидании это отношение путем выбора соответствующих параметров можно сделать как угодно большим [2], т. е. с помощью этого потока оказывается возможным аппроксимировать потоки событий в реальных системах, у которых коэффициент вариации больше единицы.

Известно, что для однолинейной модели вида  $GI|G|1$  при входном потоке, у которого преобразование Лапласа — Стилтеса функции распределения является отношением двух многочленов, может быть получено преобразование Лапласа — Стилтеса функции распределения времени ожидания заявок в очереди [3]. В настоящей работе для систем вида  $H_2M|G|1$ , где символ  $H_2M$  соответствует гиперэкспоненциальному потоку второго порядка, получены более полные результаты путем использования линейчатого марковского процесса [4].

Пусть входной поток описывается гиперэкспоненциальным распределением второго порядка с функцией распределения

$$A(t) = 1 - \sum_{i=1}^2 a_i e^{-\lambda_i t}, \quad \sum_{i=1}^2 a_i = 1$$

и средней интенсивностью  $\Lambda = [a_1/\lambda_1 + a_2/\lambda_2]^{-1}$ . Функция распределения времени обслуживания  $B(t)$ , ее преобразование Лапласа — Стилтеса —  $\beta(s)$ , интенсивность обслуживания  $r(u) = B'(u) [1 - B(u)]^{-1}$  и средняя интенсивность обслуживания равна  $b$ . Предполагается, что функция  $B(u)$  имеет производную.

Процесс поступления требований в систему можно свести к марковскому, введя множество состояний, отличающихся числом требований в

СМО и номером  $i, i=1, 2$ , соответствующим интенсивности  $\lambda_i$  входного потока при этом состоянии (назовем этот номер этапом некоторой фиктивной регулирующей системы). С приходом очередного требования система переходит в одно из состояний, соответствующее изменившемуся числу требований в СМО, а этап нового состояния выбирается регулирующей системой случайным образом так, что  $i$ -й этап может быть выбран с вероятностью  $a_i$ .

Время прохождения  $i$ -го этапа распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda_i$ . Такая процедура позволяет определить линейчатый марковский процесс, описывающий функционирование данной системы в фазовом пространстве  $\{[0, i], [n, i, u], n \geq 1, i=1, 2; u \geq 0\}$ . Здесь состояние  $[0, i]$  соответствует полностью свободной системе, когда этап регулирующей системы равен  $i$ , а  $[n, i, u]$  соответствует состоянию, когда в системе находится  $n$  требований, этап регулирующей системы равен  $i$  и время, в течение которого продолжается обслуживание очередного требования, равно  $u$ .

Обозначим через  $p_0^i(t)$  вероятность состояния  $[0, i]$  в момент времени  $t$ , а через  $p_n^i(t, u)$  — плотность вероятности состояния  $[n, i, u]$ . Рассматривая возможные изменения в системе за бесконечно малый промежуток времени и используя формулу полной вероятности, можно получить систему интегродифференциальных уравнений, описывающих функционирование данной системы. Если  $b > \Lambda$ , то для данной системы существует стационарный режим [3], характеризующийся вероятностями  $p_0^i$  и стационарными плотностями вероятностей  $p_n^i(u)$ . Переходя в системе уравнений для  $p_0^i(t)$  и  $p_n^i(t, u)$  к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , получим систему уравнений, описывающую стационарное состояние рассматриваемой системы

$$(1) \quad \lambda_i p_0^i = \int_0^{\infty} p_1^i(u) r(u) du, \quad i=1, 2,$$

$$(2) \quad \frac{d}{du} p_1^i(u) = -[\lambda_i + r(u)] p_1^i(u), \quad i=1, 2,$$

$$\frac{d}{du} p_n^i(u) = -[\lambda_i + r(u)] p_n^i(u) + a_i \sum_{j=1}^2 \lambda_j p_{n-1}^j(u), \quad i=1, 2, \quad n > 1$$

и граничные условия

$$p_1^i(0) = \int_0^{\infty} p_2^i(u) r(u) du + a_i \sum_{j=1}^2 \lambda_j p_0^j, \quad i=1, 2,$$

(3)

$$p_n^i(0) = \int_0^{\infty} p_{n+1}^i(u) r(u) du, \quad n > 1, \quad i=1, 2.$$

Стационарными вероятностями для случая, когда не учитывается время, в течение которого продолжается обслуживание, являются

$$p_0^i, p_n^i = \int_0^{\infty} p_n^i(u) du, \quad n > 0, \quad i=1, 2,$$

с условием нормировки

$$(4) \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n^i = 1.$$

Для решения систем уравнений (1)–(4) введем производящие функции

$$Q_i(z, u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^i(u) z^n, \quad i=1, 2.$$

Системе уравнений (2) соответствует система вида

$$(5) \quad \frac{d}{du} Q_i(z, u) = -[\lambda_i + r(u)] Q_i(z, u) + a_i z \sum_{j=1}^2 \lambda_j Q_j(z, u),$$

а системам (1) и (3) соответствует система вида

$$(6) \quad z Q_i(z, 0) = \int_0^{\infty} Q_i(z, u) r(u) du + a_i z^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_j p_0^j - \lambda_i z p_0^i.$$

Решение системы (5) имеет вид

$$(7) \quad Q_1(z, u) = [1 - B(u)] \left\{ Q_1(z, 0) \left[ \operatorname{ch}(uq) + \frac{\varphi_1}{q} \operatorname{sh}(uq) \right] + \right. \\ \left. + q^{-1} a_1 \lambda_2 Q_2(z, 0) \operatorname{sh}(uq) \right\} e^{uf},$$

$$(8) \quad Q_2(z, u) = [1 - B(u)] \left\{ Q_2(z, 0) [\operatorname{ch}(uq) + q^{-1} \varphi_2 \operatorname{sh}(uq)] + \right. \\ \left. + q^{-1} a_2 \lambda_1 Q_1(z, 0) \operatorname{sh}(uq) \right\} e^{uf},$$

где  $f \equiv f(z) = 1/2 [(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2) z - (\lambda_1 + \lambda_2)]$ ,  $\varphi_i \equiv \varphi_i(z) = f + \lambda_i (1 - a_i z)$ ,  
 $q \equiv q(z) = 1/2 [(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^2 z^2 - 2(a_1 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_2^2) z + (\lambda_1 - \lambda_2)^2]^{1/2}$ .

Подставив (7) и (8) в (6) и решив получившуюся систему относительно  $Q_i(z, 0)$ ,  $i=1, 2$ , получим

$$(9) \quad Q_1(z, 0) = \frac{D_1 [2qz - (q - \varphi_1) \beta(-q_1) - (q - \varphi_2) \beta(-q_2)] + a_1 \lambda_2 z [\beta(-q_1) - \beta(-q_2)] D_2}{2q [z - \beta(-q_1)] [z - \beta(-q_2)]},$$

$$(10) \quad Q_2(z, 0) = \frac{D_2 [2qz - (q - \varphi_2) \beta(-q_1) - (q - \varphi_1) \beta(-q_2)] + a_2 \lambda_1 z [\beta(-q_1) - \beta(-q_2)] D_1}{2q [z - \beta(-q_1)] [z - \beta(-q_2)]},$$

где

$$D_i = -\lambda_i z p_0^i + a_i z^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_j p_0^j, \quad i=1, 2,$$

$$q_1 = f + q, \quad q_2 = f - q.$$

На границе области  $|z|=1$  имеем

$$|\beta(-q_2)| = \left| \int_0^{\infty} \exp\{-(a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1) t\} dB(t) \right| < \int_0^{\infty} dB(t) = 1.$$

Согласно теореме Руше, функция  $z - \beta(-q_2)$  имеет только один нуль  $\xi$  внутри единичного круга, а функция  $z - \beta(-q_1)$  не имеет нулей в той же области. Поскольку  $Q_i(z, 0)$ ,  $i=1, 2$ , сходится в области  $|z|=1$ , нули чис-

лителя и знаменателя правой части выражения (9) и (10) в области  $|z|=1$  должны совпадать и, следовательно,

$$(11) \quad p_0^1 = \frac{a_1 \lambda_2 \xi}{q(\xi) + \varphi_2(\xi)} n^2$$

Найдем производящие функции вероятностей  $p_n^i$

$$Q_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^i z^n = \int_0^{\infty} Q_i(z, u) du, \quad i=1, 2.$$

После интегрирования и упрощений получим

$$(12) \quad Q_1(z) = \frac{[D_1(q+\varphi_1) + a_1 \lambda_2 z D_2][\beta(-q_1) - 1]}{2qq_1[z - \beta(-q_1)]} + \\ + \frac{[D_1(q+\varphi_2) - a_1 \lambda_2 z D_2][\beta(-q_2) - 1]}{2qq_2[z - \beta(-q_2)]}$$

$$(13) \quad Q_2(z) = \frac{[D_2(q+\varphi_2) + a_2 \lambda_1 z D_1][\beta(-q_1) - 1]}{2qq_1[z - \beta(-q_1)]} + \\ + \frac{[D_2(q+\varphi_1) - a_2 \lambda_1 z D_1][\beta(-q_2) - 1]}{2qq_2[z - \beta(-q_2)]}.$$

Воспользовавшись условием нормировки (4), которое можно переписать в виде  $Q_1(1) + Q_2(1) + p_0^1 + p_0^2 = 1$ , найдем, что

$$(14) \quad p_0^1 + p_0^2 = p_0 = 1 - \rho,$$

где  $\rho = \Lambda/b$  — загрузка системы.

Подставив (11) в (14), найдем

$$(15) \quad p_0^1 = \frac{a_1 \lambda_2 \xi (1 - \rho)}{q(\xi) + \varphi_2(\xi) + a_1 \lambda_2 \xi}, \quad p_0^2 = \frac{[q(\xi) + \varphi_2(\xi)][1 - \rho]}{q(\xi) + \varphi_2(\xi) + a_1 \lambda_2 \xi}.$$

Определим среднее число требований в системе

$$L = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} n p_n^i = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{d}{dz} Q_i(z) \right]_{z=1} = \\ = \rho + \frac{\rho}{2(1-\rho)} [(C_a^2 - 1) + \rho(1 + C_b^2)] - \frac{\Lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \left( \Lambda - \frac{1}{1-\rho} \sum_{i=1}^2 \lambda_i p_0^i \right),$$

где  $C_a^2 = 2\Lambda^2 \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{\lambda_i^2} - 1$  — квадрат коэффициента вариации входного потока, а  $C_b^2$  — квадрат коэффициента вариации времени обслуживания.

Определим преобразование Лапласа — Стильеса функции распределения времени ожидания

$$\varphi(s) = p_0 + \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n^i(u) \beta^{n-1}(s) \int_0^{\infty} e^{-sv} \frac{B'(u+v)}{1-B(u)} dv \right] du,$$

где  $\int_0^{\infty} e^{-sv} \frac{B'(u+v)}{1-B(u)} dv$  — преобразование Лапласа — Стильеса функции

распределения времени, необходимого для завершения обслуживания требования, которое в момент поступления очередного требования уже обслуживалось в течение времени  $u$  [5]. Используя формулы (7)–(10), после соответствующих преобразований получим

$$(16) \quad \varphi(s) = (1-\rho) + \frac{[1-\beta(s)][\lambda_1\lambda_2(1-\rho) - s \sum_{i=1}^2 \lambda_i p_0^i]}{\lambda_1\lambda_2[\beta(s)-1] + [\lambda_1 + \lambda_2 - (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)\beta(s)]s - s^2}.$$

Заметим, что выражение (16) — аналог формулы Полячека — Хинчина для исследуемой системы. Среднее время ожидания равно

$$\omega = -\varphi'(0) = \frac{\rho^2(C_b^2 + C_a^2)}{2\Lambda(1-\rho)} - \frac{\rho}{\lambda_1\lambda_2} \left( \Lambda - \frac{1}{1-\rho} \sum_{i=1}^2 \lambda_i p_0^i \right).$$

Оказывается возможным распространить используемую методику на случай гиперэкспоненциального входного потока  $k$ -го порядка. В этом случае уравнения (1)–(3) будут иметь аналогичный вид, за исключением того, что  $i$  будет принимать значения от 1 до  $k$ . Однако трудности их решения аналитическими методами резко возрастают с ростом  $k$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прабоу Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. М., «Машиностроение», 1969.
2. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М., «Сов. радио», 1967.
3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.
4. Беляев Ю. К. Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. Тр. 6-го Всесоюз. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике. Вильнюс — Паланга, 1960. Вильнюс, Госполитнаучиздат, 1962, 309–323.
5. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. М., «Связь», 1966.

Поступила в редакцию  
2 июня 1975 г.  
После переработки  
15 декабря 1975 г.