



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. E. Kulago, V. P. Shkadova, V. Ya. Shkadov,
To the hydrodynamic theory of application of thin
coatings onto traveling surfaces, *Vestnik Moskov.
Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 95–100

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

March 23, 2025, 07:55:43



2. Козлов В. В. Вихревая теория волчка//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 4. 56—62.
 3. Бурбаки Н. Интегрирование. М., 1970.

Поступила в редакцию
10.09.92

УДК 532.62

А. Е. Кулаго, В. П. Шкадова, В. Я. Шкадов

К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАНЕСЕНИЯ ТОНКОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] предложена первая математическая модель для расчета толщины слоя вязкой жидкости, образующегося на плоской твердой поверхности при извлечении ее из жидкого объема. В [2] дано обобщение на осесимметричный случай. Существенный недостаток примененного в [1, 2] подхода состоит в том, что он не позволяет учесть конвективные члены, роль которых возрастает с увеличением скорости движения твердой поверхности. В настоящей статье разработан метод расчета формы свободной поверхности, пригодный при конечных скоростях извлечения.

Выпишем основные уравнения для осесимметричного течения в цилиндрической системе координат r, z ; уравнения для плоского течения получаются как частный случай. Пусть цилиндр бесконечной длины движется вдоль своей оси z с постоянной скоростью V через жидкий объем, ограниченный свободной поверхностью $z=0$. Вследствие прилипания вязкая жидкость выносится из жидкого объема в виде тонкого слоя увлечения на твердой поверхности $r=R$. Выход цилиндра из жидкого объема сопровождается образованием мениска под действием сил поверхностного натяжения. Возмущенная поверхность жидкости, объединяющая слой увлечения и мениск, непрерывно и гладко сопрягающиеся в промежуточной области, задается уравнением

$$r=s(z).$$

Определение $s(z)$ представляет основную цель исследования.

Течение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, граничными условиями прилипания на теле и условиями для напряжений на возмущенной поверхности [3]. Введем безразмерные переменные соотношениями

$$\begin{aligned} r &= R + h_0 \eta, \quad z = l \xi, \quad v_r = h_0 l^{-1} U v, \quad v_z = U u, \\ p &= p_a - \sigma h_0 l^{-1} \kappa + \rho U^2 (U l v^{-1}) \tilde{p}, \quad s = R + h_0 H(\xi). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta u - A \frac{dx}{d\xi} - F - \delta^2 \tilde{p}_\xi &= c (u u_\xi + v u_\eta), \\ \Delta v - \varepsilon^2 \tilde{r}^{-2} v - \tilde{p}_\eta &= c (u v_\xi + v v_\eta), \\ (\tilde{r} u)_\xi + (\tilde{r} v)_\eta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\kappa = (1 + \delta^2 H'^2)^{-\frac{3}{2}} \left[-H'' + \varepsilon \delta^{-2} \frac{1 + \delta^2 H'^2}{1 + \varepsilon H} \right], \quad (3)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\tilde{r}} (\tilde{r} f_\eta)_\eta + \delta^2 f_{\xi\xi}, \quad \tilde{r} = 1 + \varepsilon \eta.$$

Граничные условия принимают вид

$$\eta = 0 : u = 1, v = 0;$$

$$\eta = H : uH' = v, u_\eta + \delta^2 \left(v_\xi + 4 \frac{H'}{1 - \delta^2 H'^2} v_\eta \right) = 0; \quad (4)$$

$$\tilde{p} = 2 \frac{1 + \delta^2 H'^2}{1 - \delta^2 H'^2} v_\eta;$$

$$H(\xi) \rightarrow \infty \text{ при } \xi \rightarrow 0. \quad (5)$$

Краевая задача (1)–(5) содержит следующие безразмерные коэффициенты:

$$\delta = \frac{h_0}{l}, \text{ Ca} = \frac{U\mu}{\sigma}, F = \varepsilon^2 \frac{gR^2}{U\nu},$$

$$A = \delta^3 \text{Ca}^{-1}, c = \varepsilon \delta \frac{UR}{\nu}, \varepsilon = \frac{h_0}{R}.$$

Величина h_0 представляет асимптотическое значение толщины слоя покрытия, формирующегося при $\xi \rightarrow \infty$. Масштаб l длины по z определяется из условия $A=1$, что дает $\delta = \text{Ca}^{\frac{1}{3}}$. Из решения краевой задачи следует определить

$$\varepsilon = \varepsilon \left(\text{Ca}, \frac{UR}{\nu}, \frac{gR}{U^2} \right), h_0 = \varepsilon R$$

при заданных значения параметров $\text{Ca}, \frac{UR}{\nu}, \frac{gR}{U^2}$.

В случае плоской твердой поверхности сохраняют силу все уравнения и условия (1)–(5), если положить $\varepsilon R = h_0, \varepsilon = 0$. При этом выражения для коэффициентов F, c преобразуются следующим образом:

$$F = \delta \Phi^2, \Phi = \delta^{-2} \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}} h_0,$$

$$c = q\Phi, q = \text{Ca}^2 \sqrt{\frac{\sigma^3}{\nu^4 \rho^3 g}}. \quad (6)$$

Из решения краевой задачи следует найти

$$\Phi = \Phi(\delta, \gamma), h_0 = \delta^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \Phi$$

при заданных значениях параметров $\text{Ca}, \gamma^3 = \sigma^3 \nu^{-4} \rho^{-3} g^{-1}$. Величина γ определяется свойствами жидкости [3], Ca задает режим нанесения покрытия.

Таким образом, в осесимметричном случае имеем задачу с тремя свободными параметрами $\text{Ca}, \frac{UR}{\nu}, \frac{gR}{U^2}$, в плоском случае — с двумя свободными параметрами Ca, γ .

Рассмотрим слой увлечения вблизи твердой поверхности, течение в котором асимптотически переходит в плоскопараллельное при $\xi = \infty$:

$$u = 1 + (3 - F) \left(\eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad v = 0, \quad H = 1. \quad (7)$$

Ограничиваясь малыми значениями δ и пренебрегая членами порядка δ^2 , из (1) — (6) получаем упрощенную краевую задачу:

$$u_{\eta\eta} - \frac{d\kappa}{d\xi} - F = c(uu_\xi + vu_\eta), \quad (8)$$

$$u_\xi + v_\eta = 0,$$

$$\eta = 0 : u = 1, \quad v = 0,$$

$$\eta = H : u_\eta = 0, \quad uH' = v, \quad (9)$$

$$\kappa = -H'' + \varepsilon\delta^{-2}.$$

В уравнениях (8), (9) принято $\varepsilon \sim \delta^2$, что подтверждается вычислениями. Уравнения (9) составляют систему уравнений пограничного слоя, в котором распределение давления создается изменением кривизны поверхности (κ) и силой тяжести (F). Эффективный метод решения этой системы для пленочных течений предложен в [3].

Интегрируя каждое из уравнений (9) по η , получим интегральные соотношения

$$HH''' = (u_\eta)_{\eta=0} + c \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^H u^2 d\eta \right) + FH, \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int_0^H u d\eta \right) = 0.$$

Аппроксимируем теперь скорость u выражением, согласующимся с граничными условиями (10) и с точным решением (7):

$$u = 1 + a(\xi) \left[\frac{\eta}{H} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{H} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Вычисляя интегралы в (10), выводим уравнение для $H(\xi)$

$$H^3 H''' = 3(1 - H) + \frac{1}{5} c \left[H^2 - 6 \left(1 - \frac{1}{3} F \right)^2 \right] H' + F(H^3 - 1) \quad (12)$$

и выражение для функции $a(\xi)$

$$aH = 3(1 - H) - F.$$

Уравнение (12) для толщины слоя $H(\xi)$ можно проинтегрировать численно. Рассмотрим асимптотические условия при $\xi \rightarrow \infty$. Полагая $H = 1 + b \exp \sigma \xi$, $b \ll 1$, из линеаризованного уравнения (12) получаем уравнение для σ :

$$\sigma^3 + \frac{1}{5} c \left[6 \left(1 - \frac{1}{3} F \right)^2 - 1 \right] \sigma + 3(1 - F) = 0. \quad (13)$$

Из (13) находим отрицательный корень σ_1 и затем формулируем начальные условия:

$$\xi = \xi_\infty : H = 1 + H_\infty, \quad H' = \sigma_1 H_\infty, \quad H'' = \sigma_1^2 H_\infty, \quad H_\infty \ll 1.$$

Решение $H(\xi)$ уравнения (12) возрастает с уменьшением ξ . Если $F=0$, то выполняются следующие асимптотические оценки при $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} H'' &\sim 2B - \frac{1}{B\xi^3}, \quad c=0; \\ H'' &\sim 2B + \frac{2}{5} c \ln|\xi|, \quad c \neq 0, B = \text{const}. \end{aligned} \quad (14)$$

В обоих случаях решение (12) не может удовлетворить условию (5) перехода в невозмущенную поверхность при $\xi \rightarrow 0$. Поэтому вблизи невозмущенной поверхности жидкого объема $\xi=0$ следует использовать иное приближение для решения исходной краевой задачи (1)–(5). В [1] для плоской задачи при $c=0$, $F=0$ предложено согласовывать решение $H(\xi)$ уравнения (12) с решением $h(\xi)$ уравнения статического мениска, не прибегая к рассмотрению деталей течения в жидком объеме. Согласование решений сводилось к соотношению

$$(H'')_{H \rightarrow \infty} = (h'')_{h \rightarrow 0}.$$

Так как в [1] принималось $c=0$, то получающееся значение Φ зависит только от Ca и пригодно лишь при малых значениях Ca . В последующих экспериментальных работах установлено, что эти значения лежат в интервале $10^{-5} < Ca < 10^{-2}$. Очевидно, эта процедура согласования решений не пригодна при $c \neq 0$, когда в силу (14) предельное значение $(H'')_{H \rightarrow \infty}$ не существует.

Рассмотрим метод сращивания решения $H(\xi)$ уравнения (12) с решением $h(\xi)$ уравнения статического мениска

$$\frac{dx}{d\xi} + F = 0 \quad (15)$$

в промежуточной точке ξ_* , вводя условия непрерывности $H(\xi)$ и ее первых трех производных

$$\xi = \xi_* : H = h, H' = h', H'' = h'', H''' = h'''. \quad (16)$$

Каждое из уравнений (12), (15) имеет третий порядок, поэтому указанные условия сращивания (16) требуют не только гладкости функций, но и непрерывности коэффициентов уравнений в точке ξ_* .

В случае плоского течения уравнение (15) интегрируется в квадратурах, что с учетом граничного условия (5) дает

$$h' (1 + \delta^2 h'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} F \xi^2 - \frac{1}{\delta}. \quad (17)$$

Дифференцируя дважды (17) и записывая условия сращивания решений (16), выводим соотношения при $\xi = \xi_*$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{H''}{\sqrt{2} D^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{\Delta}{D^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \delta \Phi^2 &= H''' D^{-\frac{3}{2}} - 3\delta^2 H''^2 H' D^{-\frac{5}{2}}, \\ D &= 1 + \Delta^2, \Delta = \delta H'. \end{aligned} \quad (18)$$

Условие $H(\xi_*) = h(\xi_*)$ можно удовлетворить независимо от соотношений (18), так как интегрирование уравнения (17) добавляет необхо-

димую для этого произвольную константу. Пусть заданы значения свободных параметров Ca , γ . Зададим некоторое значение Φ и проинтегрируем численно уравнение (12) от $\xi=\xi_\infty$ до точки $\xi=\xi_*$, в которой выполняется второе соотношение (18). Тогда из первого соотношения (18) находим новое значение Φ . Величину Φ можно уточнить итерациями. Отметим, что при $c=0$ и $Ca \rightarrow 0$ из (18) получаем

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (H'')_{H \rightarrow \infty} = 0,944$$

как в [1]. Примеры расчетов по формулам (18) приведены в табл. 1.

Таблица 1

c	F	$H(\varepsilon_*)$	δ	Ca	γ	Φ
0	0	∞	0	0	0	0,944
0	0,082	3,72	0,162	0,0043	0	0,711
0	0,106	2,81	0,255	0,0165	0	0,645
0,5	0,082	3,92	0,177	0,0056	716,5	0,681
0,5	0,088	3,55	0,2035	0,0084	486,3	0,657
0,5	0,094	3,25	0,2326	0,0126	291,2	0,635

Для осесимметричного течения положим $c \neq 0$, $F=0$. Случай этот представляет интерес для режимов высокоскоростного нанесения покрытий на волокна, проволочки, нити. Уравнение (15) вновь интегрируется в квадратурах, и с учетом граничного условия (5) получаем

$$1 + s_*^2 = Q^{-2} (\tilde{s}^{-1} - \tilde{s})^{-1}, \quad (19)$$

где $Q = \frac{1}{2} k s_{\max}$, $s = \tilde{s} s_{\max}$, $k > 0$, $0 < \tilde{s} \leq 1$.

Полагая в (19) $s = R + h_0 h(\xi)$ и записывая условия срачивания (16), выводим соотношения

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{H''^2 H'}{H''} \frac{1 + 8\tilde{s}_*^2 + 3\tilde{s}_*^4}{(1 + \delta^2 H'^2)(1 + \tilde{s}_*^2)}, \quad (20)$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} = H'' \frac{1 + \varepsilon H}{1 + \delta^2 H'^2} \frac{1 - \tilde{s}_*^2}{1 + \tilde{s}_*^2}.$$

Переход поверхности жидкости к невозмущенному состоянию происходит асимптотически, поэтому при $s_{\max} \rightarrow \infty$ имеем $s_* \rightarrow 0$. Учитывая еще, что решение $H(\xi)$ определено в (12) с точностью до членов $o(\delta^2)$, можно записать соотношения (20) с той же точностью:

$$\delta^2 = \frac{H'''}{H''^2 H'}, \quad \varepsilon = H'' \delta^2, \quad \xi = \xi_*. \quad (21)$$

При каждом заданном значении c можно численно проинтегрировать уравнение (12). Выбирая на интегральной кривой точку ξ_* , получаем из (21) значения δ^2 и $\varepsilon \delta^{-2}$, а затем вычисляем Ca , $\frac{UR}{v}$, ε .

Скорость жидкости на возмущенной поверхности $\eta = H(\xi)$ в силу (11) равна

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{H} - 1 \right).$$

При $H=3$ получим точку торможения, а при $H>3$ — зону возвратного течения. Уравнение (15) при $F=0$ означает, что давление принимается постоянным в зоне возвратного течения. Таким образом, точку ξ_* срачивания решений следует выбирать так, чтобы было $H(\xi_*)>3$. В частном случае $c=0$, $H \rightarrow \infty$ получаем из (21) $\varepsilon=1,32 \delta^2$ как в [2]. Примеры расчетов при различных значениях свободных параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2

c	$H(\xi_*)$	δ	$\varepsilon \delta^{-2}$	Ca	Re
0	16	0,032	1,318	$0,32 \cdot 10^{-4}$	0
0	8	0,079	1,283	0,0005	0
0	6	0,117	1,253	0,0016	0
1	8	0,141	1,294	0,0028	276
1	6	0,184	1,212	0,0063	130
1	4	0,288	1,073	0,024	38,8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Левич В. Г. Увлечение жидкости движущейся пластинкой// Acta Phys. Chim. USSR. 1942. N 17. 42—54.
2. Дерягин Б. В. Теория нанесения вязкой жидкости на вытаскиваемое из нее волокно или проволоку//Журн. прикл. матем. и теор. физ. 1963. № 3. 71—78.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести//Механ. жидкости и газа. 1967. № 1. 43—51.

Поступила в редакцию
16.10.92