А.Е.Залесский

ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

Дано описание решетки двусторонних идеалов групповых колец индуктивных пределов знакопеременных групп. Описаны индуктивные пределы, групповые кольца которых содержат более трех двусторонних идеалов; показано, что они образуют бесконечную убывающую последовательность, за исключением случая, когда предельная группа изоморфна группе всех четных финитарных подстановок некоторого бесконечного множества.

В настоящей статье изучается решетка идеалов в групповых кольцах индуктивных пределов знакопеременных групп над полем характеристики 0. Такие группы составляют существенную часть класса простых локально-конечных бесконечных групп, как явствует из общей теории, изложенной в [1]. Мотивировкой служат для нас как внутренняя логика теории групповых колец, так и некоторые приложения к теории C^*-алгебр.

Легко видеть, что каждое групповое кольцо имеет по меньшей мере три идеала: само кольцо, нулевой идеал и фундаментальный (или пополняющий) идеал. Эти идеалы мы будем называть тривиальными. С теоретико-кольцевой точки зрения (и даже с точки зрения общей алгебры) естествен вопрос, какие групповые кольца не содержат нетривиальных идеалов; мы будем называть такие групповые кольца почти простыми. Для бесконечных групп этот вопрос равносилен вопросу, когда фундаментальный идеал является простым кольцом. В явной форме он был поставлен в 1965 г. И.Капланским [2], наиболее существенный результат по этой проблеме был получен Бонваллетом, Хартли, Пассманом и Смит [3].

Если H - группа и R - кольцо, то через RH обозначается групповое кольцо группы H над кольцом R. Если RH почти просто, то группа H проста и кольцо R просто. Более того, если R - кольцо с единицей и P - его центр, то RH почти просто тогда и только тогда, когда PH почти просто. Следовательно, вопрос о почти простых групповых кольцах - это вопрос о групповых кольцах простых групп над полями. Для каждого поля P класс K простых групп распадается на два класса K_P и $\bar{K}_P$ групп H с почти простым групповым кольцом PH и остальных. Можно сказать, что группы в классе K_P просты в более сильном смысле, чем группы из класса $\bar{K}_P$. Как нам кажется, это разбиение представляет интерес с теоретико-групповой точки зрения. По всей вероятности, класс K_P определяется не самим полем P, а его характеристикой.

Связь между теорией C^*-алгебр и теорией индуктивных пределов локально

Ключевые слова: групповые кольца, локально конечные группы.

конечных полупростых алгебр описана, например, в обзоре А. М. Вершика и С. В. Керова [4]. Комплексные групповые кольца локально-конечных групп возникают там как частный, но достаточно интересный случай. В общем контексте вопрос о решетке идеалов индуктивных пределов локально-конечных полупростых алгебр решен в терминах взаимоотношения между простыми компонентами полупростых алгебр (см. Браттели [5], а также [4]). Однако для групповых колец такой ответ недостаточен, здесь необходим ответ в терминах группы H. Это крайне сложная задача, которая для произвольных локально-конечных групп, вероятно, не допускает окончательного решения. Значительно более обнадеживающей представляется эта задача для простых локально-конечных групп. В настоящей статье предложен метод решения этой задачи для полей P характеристики 0, реализованный для индуктивных пределов знакопеременных групп. Суть метода заключается в преобразовании задачи о групповых кольцах к эквивалентной задаче о представлениях конечных групп, которая значительно более доступна благодаря высоко развитой технике теории представлений. Нельзя сказать, что возможность перевода задачи на язык теории представлений не была замечена специалистами, однако этому не придавалось до сих пор должного значения. Во всяком случае, во всех известных автору работах [6-8] это используется только для счетной бесконечной симметрической группы.

Напомним результат из [3]. Пусть P - поле характеристики p и H - простая группа. Пусть q - простое число, отличное от p. Предположим, что для любого конечного числа элементов $1=x_0,\dots,x_n\in H$ существуют элементы $y_0,\dots,y_n\in H$ такие, что группа $\langle x_i y_j x_i^{-1}\colon i,j=0,\dots,n\rangle$ является элементарной абелевой порядка $q^{(n+1)^2}$. Тогда групповое кольцо PH почти просто. Это условие выглядит чрезвычайно ограничительным; тем не менее авторы работы [3] обнаружили два важных класса групп, удовлетворяющих этому условию. Это универсальные группы Холла и алгебраически замкнутые группы; позднее Майер [9] заметил, что можно предполагать алгебраическую замкнутость только в классе локально конечных групп. Интуитивно ясно, что такие группы в силу своей универсальности достаточно редки во вселенной локально-конечных групп. Этим создавалось впечатление, что и простота группового кольца локально-конечной (простой) группы - также весьма редкое явление, т.е. что класс K_p мал по сравнению с $\bar{K}_p$. Рассмотренный здесь случай индуктивных пределов знакопеременных групп свидетельствует о том, что дело обстоит как раз обратным образом, т.е. что класс K_p содержит подавляющее большинство групп класса K.

Чтобы сформулировать основной результат, необходимо понятие диагонального вложения знакопеременных групп.

Определение 1. Пусть $A(X)$ и $A(Y)$ знакопеременные группы соответственно на множествах X и Y. Вложение $A(X) \longrightarrow A(Y)$ назовем диагональным, если орбиты группы $A(X)$ на Y либо тривиальны (т.е. из одной точки), либо изоморфны X.

Определение 2. Пусть A - локально-конечная группа. Будем говорить, что A -

диагонального типа, если A есть индуктивный предел $\lim\limits_{t\in T} A(X_t)$ (T - некоторое направленное множество), конечных знакопеременных групп $A(X_t)$ с диагональными вложениями $A(X_s) \longrightarrow A(X_t)$ при $s<t$, $s,t\in T$.

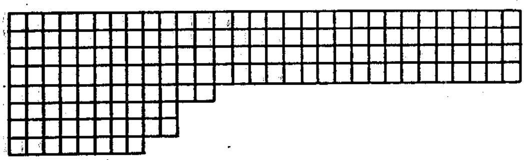
Теорема 1. *Пусть P – поле характеристики 0, и $A=\lim\limits_{s} A(X_s)$ – индуктивный предел конечных знакопеременных групп. Групповое кольцо PA является простым тогда и только тогда, когда A – диагонального типа; более точно, когда существует направленное подмножество $T\subset S$ такое, что $A=\lim\limits_{t\in T} A(X_t)$ и все вложения $A(X_t)\longrightarrow A(X_u)$ $t<u$, $t,u\in T$, диагональны.*

В случае, когда группа A счетна, в качестве T можно выбрать множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; в этом случае теорема 1 упрощается следующим образом: $A\in\bar{K}_P$ тогда и только тогда, когда все последовательные вложения $A(X_t) \longrightarrow A(X_{t+1})$, кроме конечного числа, диагональны. Отметим, что группа диагонального типа естественно представима как группа подстановок, чего нельзя сказать о других типах индуктивных пределов знакопеременных групп. Известно, что имеется несчетное число неизоморфных счетных групп диагонального типа ([1], с. 188). Было бы интересно найти теоретико-групповую характеризацию групп диагонального типа.

Пусть $\mathcal{A}$ - совокупность бесконечных групп, которые представимы в виде индуктивных пределов конечных знакопеременных групп. Согласно теореме 1, множество $\mathcal{A}\cap\bar{K}_P$ состоит из групп диагонального типа. Тот факт, что это множество составляет крайне незначительную часть множества $\mathcal{A}$, особенно нагляден для счетных групп. В этом случае мы можем рассмотреть произвольную последовательность групп, построенную следующим образом. В качестве $A(X_1)$ примем произвольную знакопеременную группу. Пусть уже построена группа $A(X_k)$. Рассмотрим произвольное представление группы $A(X_k)$ подстановками и примем в качестве X_{k+1} множество перемещаемых элементов. Подчеркнем, что таких представлений очень много: одни только транзитивные представления классифицируются классами сопряженных подгрупп группы $A(X_k)$. Среди них диагональные представления (см. определение 1) составляют совершенно незначительную часть, поскольку транзитивное диагональное представление единственно с точностью до эквивалентности. Построенная таким образом последовательность групп $A(X_k)$, $k=1,2\ldots$, определяет однозначно группу $A=\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} A(X_k)$. Ясно, что группы диагонального типа составляют ничтожную часть всех групп, построенных таким образом.

Какова решетка идеалов групповых колец PA для групп диагонального типа? На первый взгляд, эта задача может показаться необозримой ввиду отсутствия классификации групп диагонального типа (проблема их классификации представляется нам крайне трудной). В действительности, задача допускает явное решение. Чтобы его сформулировать, нам нужно выделить в классе групп диагонального типа индуктивные пределы с естественными вложениями $A(X_s) \longrightarrow A(X_t)$ $(s<t, s, t\in T)$. Последнее означает, что на X_t имеется ровно одна орбита, изоморфная X_s, а остальные орбиты

тривиальны. Нетрудно видеть, что индуктивный предел конечных знакопеременных групп с естественными вложениями есть знакопеременная группа на множестве $X=\lim\limits_{t\in T} X_t$, т.е. группа всех четных подстановок множества X, каждая из которых перемещает только конечное число его элементов. Заметим, что группа $A(X)$ полностью определяется мощностью множества X. Описание решетки идеалов кольца $PA(X)$ вытекает из работы Форманека и Лоуренса [6] (см. также Размыслов [7]). Она изоморфна решетке многоугольных областей (упорядоченных по включению) следующего вида:



Неожиданно оказывается, что для всех остальных групп диагонального типа решетка идеалов значительно беднее (на это обстоятельство мое внимание первоначально обратил А.М.Вершик). Она не зависит от строения группы и образует убывающую цепь.

Теорема 2. *Пусть P - поле характеристики 0 и $A\in\overline{K}_p\cap\mathcal{A}$, т.е. в силу теоремы 1 A - группа диагонального типа. Тогда либо $A\cong A(X)$ для некоторого бесконечного множества X, либо PA обладает убывающей цепью ненулевых идеалов $J_1\supset J_2\supset\ldots$, причем J_1 - фундаментальный идеал, и каждый ненулевой собственный идеал кольца PA совпадает с J_a для некоторого $a\in\mathbb{N}$.*

Идеал $J_a(a\in\mathbb{N})$ допускает явное описание. Он полностью определяется пересечениями $J_a^*=J_a\cap PA(k_t)$ $(t\in T)$ с $k_t>\max(2a+1,4)$. В свою очередь идеал J_a^k есть сумма всех неприводимых подмодулей в $PA(k_t)$, диаграммы которых имеют более a клеток вне первой строки (по поводу диаграмм см. § 1).

Чтобы описать метод доказательства теорем 1,2, введем понятие индуктивной системы представлений. Если M - некоторое множество представлений группы G, то через $\operatorname{Irr} M$ будем обозначать совокупность всех неприводимых компонент представлений множества M без учета их кратностей. Кроме того, поскольку знакопеременные группы порядка, большего 12, просты, мы можем вместо индуктивного предела использовать несколько более удобное для нас понятие локальной системы подгрупп (связь с конструкцией индуктивного предела при этом очевидна). Пусть T - множество, H - группа и $(H_t)_{t\in T}$ - система подгрупп. Она называется локальной системой, если $H=\bigcup\limits_{t\in T} H_t$ и если для любой пары подгрупп $X,Y\in(H_t)$ существует группа $Z\in(H_t)$ такая, что $X\subset Z$ и $Y\subset Z$. Частичный порядок на (H_t), индуцируемый отношением включения подгрупп группы H, индуцирует на T структуру частично упорядоченного множества, и мы будем считать T частично упорядоченным.

Определение 3. *Пусть H - локально конечная группа и $(H_t)_{t\in T}$ - локальная система ее конечных подгрупп. Пусть $M_t\subset\operatorname{Irr} H_t$ - некоторое подмножество. Будем говорить, что $(M_t)_{t\in T}$ - индуктивная система представлений, если при любых*

$s,t\in T, s<t$ *мы имеем* $\{\mathrm{Irr}\ \varphi|H_s : \varphi\in M_t\}=M_s$.

Ключевой элемент нашего метода заключается в том, что проблема описания идеалов групповых колец локально-конечных групп над полем характеристики 0 равносильна проблеме описания индуктивных систем представлений.

Предложение 1. *Пусть H - локально-конечная группа и $\{H_t\}_{t\in T}$ - локальная система ее конечных подгрупп. Пусть P - поле характеристики 0. Если I - идеал кольца PH и $t\in T$, то мы положим $M_t(I)=\mathrm{Irr}\ PH_t/(I\cap PH_t)$. Тогда $\{M_t(I)\}$ - индуктивная система представлений и соответствие $I\longrightarrow\{M_t(I)\}$ есть взаимно однозначное соответствие между собственными идеалами кольца PH и индуктивными системами представлений для локальной системы подгрупп $\{H_t\}$.*

Очевидно, нулевому идеалу соответствует индуктивная система с $M_t=\mathrm{Irr}\ PH_t$ для каждого t, а фундаментальному идеалу - система с $M_t=\{1_{H_t}\}$ для каждого t. Эти две системы мы будем называть тривиальными. Таким образом, $H\in K_P$ тогда и только тогда, когда не существует нетривиальных индуктивных систем. Конструкция индуктивной системы зависит от выбора локальной системы $\{H_t\}$, но предложение 1 показывает, что эта зависимость в некотором смысле несущественна.

Из предложения 1 вытекает достаточное условие отсутствия нетривиальных индуктивных систем.

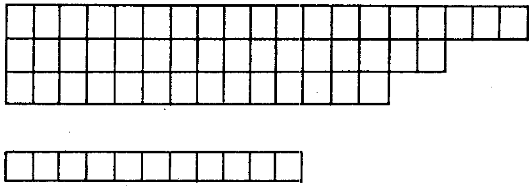
Следствие 1. *Предположим, что для каждой группы H_t $(t\in T)$ существует группа $H_t\subset H_s$ такая, что для любого ее неприводимого представления $\varphi\neq 1_{H_s}$ мы имеем $\mathrm{Irr}\ \varphi|H_t=\mathrm{Irr}\ PH_t$. Тогда нетривиальных индуктивных систем представлений не существует.*

Именно это достаточное условие является исходным пунктом доказательства теоремы 1. Доказательство теоремы 2 требует уже более тщательного учета поведения ограничений $\varphi|H_t$, но для диагонального вложения $H_t\longrightarrow H_s$ это сделать гораздо проще, чем для произвольного вложения.

§ 1. Некоторые результаты о представлениях знакопеременных групп

Обозначения. $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, P - поле нулевой характеристики. Множество классов эквивалентных неприводимых представлений конечной группы H над полем P мы обозначим через $\mathrm{Irr}\ PH$, но обычно символ P опускаем (в этом параграфе поле P алгебраически замкнуто). Если ρ - некоторое представление группы H, то $\mathrm{Irr}\ \rho$ - множество его неприводимых компонент (без учета кратностей). Если M - некоторое множество представлений, то $\mathrm{Irr}\ M=\{\mathrm{Irr}\ \rho : \rho\in M\}$. Единичное представление группы H обозначается через 1_H. Если $G\subset H$ - подгруппа, то $\rho|G$ - ограничение представления ρ на G. Если σ - представление группы G, то $\sigma_\uparrow H$ - индуцированное представление.

Через $S(k)$ и $A(k)$ обозначаются соответственно симметрическая и знакопеременная группы, действующие на множестве $\Omega(k)$ из k элементов. Мы употребляем также обозначения $S(\Omega(k))$ и $A(\Omega(k))$, часто опуская символ k, когда хотим явно указать множество элементов, на котором действует соответствующая группа. Напомним некоторые стандартные факты общей теории представлений симметрических и знакопеременных групп (см. [10]). Диаграммой будем называть фигуру следующего вида:



причем в каждой последующей строке число клеток не больше, чем в предыдущей. Для краткой записи диаграммы λ употребляется выражение $\lambda=(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_r)$, где ℓ_i – число клеток в i-й строке диаграммы λ, а r – число строк. Таким образом, $\ell_1\geq\ell_2\geq\ldots\geq\ell_r>0$. Число клеток диаграммы λ обозначается через $|\lambda|$. Мы пользуемся также сокращенным обозначением $\lambda=(m_1^{k_1},\ldots,m_s^{k_s})$ для диаграммы

$$(\ell_1,\ldots,\ell_r) \text{ с } \ell_1=\ldots=\ell_{k_1}=m_1,\ldots,\ell_{r-k_s+1}=\ldots=\ell_r=m_s.$$

Существует стандартное взаимно-однозначное соответствие между множеством диаграмм λ с $|\lambda|=k$ и множеством $\mathrm{Irr}\ S(k)$. Если $\varphi\in\mathrm{Irr}\ S(k)$, то соответствующую диаграмму будем обозначать через $D(\varphi)$. Через λ^* обозначается диаграмма, полученная переворачиванием диаграммы λ относительно диагонали, идущей от левого верхнего угла вправо и вниз (эта операция аналогична транспонированию матриц). Пусть $\varphi\in\mathrm{Irr}\ S(k)$ и $\lambda=D(\varphi)$. Если $\lambda\neq\lambda^*$, то ограничение $\varphi|A(k)$ неприводимо и эквивалентно ограничению $\varphi^*|A(k)$, где φ^* – представление, соответствующее диаграмме λ^*. Если же $\lambda=\lambda^*$, то $\varphi|A(k)=\varphi_1\oplus\varphi_2$, где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{Irr}\ A(k)$ – неэквивалентные представления (см., например, [10], § 4.53). Более того, φ_2 эквивалентно представлению $x\longrightarrow\varphi_1(axa^{-1})$ $(x\in S(k))$, $a\in S(k)$, $a\notin A(k)$. На множестве диаграмм введем лексикографический порядок, т.е. если $\lambda=(\ell_1,\ldots,\ell_r)$ и $\lambda'=(\ell'_1,\ldots,\ell'_r)$ – такие диаграммы, что $\ell_j=\ell'_j$ при $j=1,\ldots s\leq r$ и $\ell_{s+1}>\ell'_{s+1}$, то $\lambda>\lambda'$ (здесь мы допускаем на момент возможность $\ell'_{s+1}=0$). Оказывается, что все неприводимые компоненты ограничений $\varphi|A(k)$ попарно неэквивалентны, когда φ пробегает неприводимые представления группы $S(k)$ с условием $D(\varphi)\geq D(\varphi)^*$; ясно, что они образуют $\mathrm{Irr}\ A(k)$. Это позволяет каждому представлению $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k)$ сопоставить диаграмму λ с $\lambda\geq\lambda^*$, причем диаграммы с $\lambda=\lambda^*$ соответствуют парам неприводимых представлений, а каждой диаграмме $\lambda>\lambda^*$ соответствует единственное неприводимое представление. Мы будем использовать обозначение $D(\varphi)$ при $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k)$. Таким образом, $D(\varphi)\geq D(\varphi)^*$, если $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k)$.

Через η_k и η'_k обозначим неприводимое представление группы $A(k)$ и $S(k)$ соответственно с диаграммой $(k-1,1)$.

Вложение $\varepsilon\colon A(X)\longrightarrow A(Y)$ называется транзитивным, если группа $\varepsilon(A(X))$ действует транзитивно на Y. Аналогичная терминология применяется для симметрической группы.

Определение диагональных вложений дано во Введении.

Символ $|$ обозначает обычно ограничение представления на подгруппу, а символ $\uparrow$ - индуцирование с некоторого представления подгруппы.

Определение 4. *Пусть* $\lambda=(\ell_1,\ldots,\ell_r)$ *- диаграмма. Число* $\delta(\lambda)=\ell_2+\ldots+\ell_r$ *называется глубиной диаграммы* λ. *Под глубиной* $\delta(\varphi)$ *представления* φ *симметрической или знакопеременной группы будем понимать глубину соответствующей ему диаграммы. Другими словами,* $\delta(\varphi)=\delta(D(\varphi))$. *Если* M *- множество неприводимых представлений, то мы положим* $\delta(M)=\max_{\varphi\in M}\delta(\varphi)$. *Если* N *- множество произвольных представлений, то* $\delta(N)=\delta(\mathrm{Irr}\ N)$.

Термин „глубина диаграммы" введен Мурнаганом [11].

Для удобства дальнейших ссылок сформулируем некоторые необходимые нам факты, снабдив их нумерацией.

(I) „Правило ветвления". *Пусть* $\varepsilon:S(k)\longrightarrow S(\ell)$ *- естественное вложение и* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ S(\ell)$. *Тогда* $\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon$ *состоит из представлений, диаграммы которых вложимы в* $D(\varphi)$.

Правило ветвления справедливо и для представлений знакопеременных групп:

(II) *Пусть* $\tau:A(k)\longrightarrow A(\ell)$ *- естественное вложение, и пусть* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(\ell)$. *Тогда* $\mathrm{Irr}\ \varphi\tau=\{\psi:D(\psi)\subset D(\varphi)\}$.

Это непосредственно следует из (I), если $D(\varphi)>D(\varphi)^*$. Пусть $D(\varphi)=D(\varphi)^*=\lambda$. Продолжим τ до вложения $\tau_1:S(k)\longrightarrow S(\ell)$. Пусть $\theta\in\mathrm{Irr}\ S(\ell)$ и $D(\theta)=\lambda$. Тогда $\theta|A(\ell)=\varphi+\varphi'$ $(\varphi'\in\mathrm{Irr}\ A(\ell))$. Пусть $\mu=D(\psi)$. Из (I) следует, что $\psi\in\mathrm{Irr}(\theta\tau_1|A(k))$. Поэтому $\psi\in\mathrm{Irr}\ \varphi\tau$ или $\psi\in\mathrm{Irr}\ \varphi'\tau$. Первый случай не требует рассмотрения. Пусть ψ входит в $\varphi'\tau$. Вспомним, что φ эквивалентно представлению $x\longrightarrow\varphi'(axa^{-1})$, где $x\in A(\ell)$ и $a\in S(\ell)$ - транспозиция. Поэтому каждому представлению $\rho'\in\mathrm{Irr}\ \varphi'\tau$ соответствует представление $\rho:y\longrightarrow\rho'(aya^{-1})$ $(y\in A(k))$ из $\mathrm{Irr}\ \varphi\tau$. Ясно, что диаграммы представлений ρ' и ρ одинаковы. Отсюда следует (II).

В [11] содержится следующий результат: если $\alpha,\beta\in\mathrm{Irr}\ S(k)$, и $k>2\max(\delta(\alpha),\delta(\beta))$, то $\delta(\alpha\otimes\beta)=\delta(\alpha)+\delta(\beta)$. Предположим, что $k>2(\delta(\alpha)+\delta(\beta))$. Тогда $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ - несимметричные диаграммы, так что ограничения $\alpha|A(k)$ и $\beta|A(k)$ неприводимы; кроме того, любая диаграмма λ с $\delta(\lambda)\le\delta(\alpha)+\delta(\beta)$ несимметрична. Отсюда следует

(III) *Пусть* $\alpha,\beta\in\mathrm{Irr}\ A(k)$ *и* $k>2(\delta(\alpha)+\delta(\beta))$. *Тогда* $\delta(\alpha\otimes\beta)=\delta(\alpha)+\delta(\beta)$.

(IV) „Правило Литтлвуда-Ричардсона". *Пусть* $\alpha\in S(k)$, $\beta\in S(\ell)$ *и* $\lambda=D(\alpha),\mu=D(\beta)$. *Представление* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ S(k+\ell)$ *является компонентой индуцированного представления* $(\alpha\otimes\beta)\uparrow S(k+\ell)$, *если* $D(\varphi)$ *получается из* λ *и* μ *в результате следующей процедуры:* (i) *разбиваем первую строку диаграммы* μ *на произвольное число частей (с сохранением порядка клеток) и добавляем первую часть к некоторой строке, вторую часть - к одной из последующих и т.д., так, чтобы получилась диаграмма, у которой никакой столбец не содержит более одной из вновь добавленных клеток.* (ii) *Аналогично поступаем со второй, третьей и т.д. строками диаграммы* μ, *соблюдая следующее* *условие: если в диаграмме* μ *клетка* a *лежит непосредственно над клеткой* b, *то в итоговой диаграмме клетка* a *появляется в более высокой строке, чем* b.

(V) *Пусть* $m=k+\ell$, *и пусть* $H=S(k)\times S(\ell)\subset S(m)$ *— естественное вложение. Тогда* $\eta'_m|H=\eta'_k\otimes 1_{S(\ell)}\oplus 1_{S(k)}\otimes\eta'_\ell\oplus 1_{S(k)\times S(\ell)}$. *Эта же формула верна и для ограничения* η_m *на подгруппу* $A(k)\times A(\ell)$.

Это вытекает из (IV) и теоремы взаимности Фробениуса. Второе утверждение очевидно.

(VI) *Пусть* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ S(m+n)$ *и* $\lambda=D(\varphi)=(\ell_1,\dots,\ell_r)$. *Предположим, что* $n\le\ell_1-\ell_2$. *Пусть* $\mu=(\ell_1-n+1,\ell_2,\dots,\ell_{r-1},\ell_r-1)$ *и* $\psi\in\mathrm{Irr}\ S(m)$ *с* $D(\psi)=\mu$. *Тогда* $\psi\otimes\eta_n\in\mathrm{Irr}\ (\varphi|S(m)\times S(n))$.

По теореме взаимности Фробениуса достаточно показать, что представление, индуцированное с $\psi\otimes\eta_n$, содержит φ в качестве неприводимой компоненты. Последнее вытекает непосредственно из (IV).

(VII) *Пусть* $k>4$ *и* $H\subset A(k)$ *— собственная подгруппа индекса* $c\le k$. *Тогда* $c=k$ *и* $H\cong A(k-1)$. *Если* $k\ne 6$, *то* H *— стабилизатор точки в* $A(k)$.

Это хорошо известно. Поясним: пусть Ω — множество правых смежных классов $A(k)/H$ и $A(k)$ действует на Ω правыми умножениями. Пусть $\tau: A(k)\longrightarrow A(\Omega)$ — соответствующее вложение. Мы имеем $A(k)\subset A(\Omega)\cong A(c)$, ибо $A(k)$ проста и $|\Omega|=c$. Тогда $k=c$ и $A(k)\cong A(\Omega)$. Пусть $\mu: A(\Omega)\longrightarrow A(k)$ — естественный изоморфизм. Тогда $\mu\tau$ — автоморфизм группы $A(k)$. При $k\ne 6$ каждый автоморфизм группы $A(k)$ индуцируется внутренним автоморфизмом σ группы $S(k)\supset A(k)$. Поэтому $\mu\tau=\sigma|A(k)$, так что $\tau=\mu^{-1}\sigma|A(k)$. Отсюда следует (VII).

(VIII) *Пусть* λ *— диаграмма с* $\lambda\ge\lambda^*$. *Пусть* b_1 *и* b_2 *— число клеток в первом столбце и во второй строке соответственно, и* $b=\max\ (b_1,b_2)$. *Тогда* $b^2\ge\delta(\lambda)$.

В самом деле, $b^2\ge b_1b_2>b_1b_2-b_2=(b_1-1)b_2\ge\delta(\lambda)$.

(IX) *Пусть* Γ *— конечная группа и* ρ *— прямая сумма ее неприводимых представлений с кратностью* ≥ 1 *каждое. Пусть* σ *— любое представление группы* Γ. *Тогда* $\mathrm{Irr}\ (\rho\otimes\sigma)=\mathrm{Irr}\ \Gamma$.

Без ущерба для общности ρ можно заменить на регулярное представление группы Γ. Тогда характер представления $\rho\otimes\sigma$ кратен характеру ρ. Отсюда следует (IX).

(X) Теорема Бернсайда (см., например, [12], гл. 1, теорема 6.3). *Пусть* φ *— точное представление конечной группы* H *и* n *— число классов сопряженных элементов. Тогда*

$$\mathrm{Irr}\ H = \mathrm{Irr}\ (1_H \oplus \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\varphi\otimes\varphi\ \dots\ \otimes\varphi}_{k}).$$

(XI) *Пусть* H,n *и* φ *— как в* (X) *и* $\psi=1_H\oplus\varphi$. *Тогда* $\mathrm{Irr}\ H=\mathrm{Irr}\ (\psi\otimes\dots\otimes\psi)$ (n *множителей*).

Это очевидное следствие утверждения (X).

(XII) *Пусть* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ S(k)$. *Тогда*

$$\varphi\oplus(\eta'_k\otimes\varphi)\cong(\varphi|S(k-1))\uparrow S(k).$$

Это частный случай формулы (3.43) в [13].

(XIII) *Пусть* $\alpha,\beta\in\mathrm{Irr}\ A(5)$ *и* $\delta(\alpha)>1$. *Тогда* $\delta(\alpha\otimes\beta)>1$.

Это нетрудно установить путем прямых вычислений с характерами группы $A(5)$.

(XIV) **Теорема Жордана** (см. Виланд [15], с. 43). *Пусть* $G\subset S(\Omega)$ *— группа подстановок*, $|\Omega|=n$. *При* $s\in S(\Omega)$ *положим* $\mathrm{supp}\ s=\{\omega\in\Omega: s\omega\neq\omega\}$ *и* $J(G,\Omega)=\min\limits_{1\neq g\in G}\mathrm{supp}\ g$. *Если* $n>J(G,\Omega)^3$, *то* $G\supset A(\Omega)$.

(XV) *Пусть* $\tau: A(k)\longrightarrow A(m)$ *— диагональное вложение. Тогда* $\delta(\eta_m\tau)=1$.

Доказательство. Пусть Ω_1 - орбита длины k группы $\tau(A(k))$ на $\Omega(m)$, $\Omega_2=\Omega-\Omega_1$ и $\ell=|\Omega_2|$. Пусть еще σ и ρ - ограничения действия группы $A(k)$ на X и Y соответственно. Ясно, что вложения σ и ρ диагональны. Ввиду (V) мы имеем

$$\eta_m\tau = \eta_k\sigma \otimes \eta_\ell\rho + 1_{A(k)}.$$

Воспользуемся индукцией по m. При $m=k$ доказывать нечего. По предположению индукции $\delta(\eta_\ell\rho)=1$. Следовательно, $\delta(\eta_m\tau)=1$.

Лемма 1. *Пусть* $3<m<n$ *и* $\tau: A(m)\longrightarrow A(n)$ *— транзитивное вложение. Тогда* $\delta(\eta_n\tau)>1$.

Доказательство. Пусть Π - подстановочное представление группы $A(n)$, ассоциированное с ее естественным действием на $\Omega(n)$. Хорошо известно, что $\Pi=\eta_n\oplus 1_{A(n)}$. Пусть $\Pi_1=\Pi\tau$; тогда $\Pi_1=\eta_n\tau\oplus 1_{A(m)}$. Пусть χ_1 - характер представления Π_1 и χ - характер представления η_m группы $A(m)$. Предположим противное, что $\delta(\eta_n\tau)\le 1$. Тогда и $\delta(\Pi_1)\le 1$. Пусть a и b - соответственно кратности вложения представлений η_m и $1_{A(m)}$ в Π_1 (это единственные представления глубины ≤ 1 группы $A(m)$). Согласно теореме 32.3 в [14], $b=1$. Пусть $t\in A(m)$ - произвольный элемент, не имеющий неподвижных точек на $\Omega(m)$. Тогда $\chi(t)=-1$. Следовательно, $\chi_1(t)=1-a$. Так как Π_1 - подстановочное представление, то $\chi_1(t)\ge 0$. Следовательно, $a=1$. Но тогда $n=\dim\Pi=m$, что противоречит условию.

Лемма 2. *Пусть* $k>4,\alpha,\alpha'\in\mathrm{Irr}\ A(k)$ *и* $\delta(\alpha)>1$. *Тогда* $\delta(\alpha\otimes\alpha')>1$.

Доказательство. При $k=5$ лемма совпадает с утверждением (XIII). При $k>5$ пусть $\lambda=D(\alpha),\lambda'=D(\alpha')$. Легко видеть, что λ содержит поддиаграмму μ с $|\mu|=5$ и $\delta(\mu)=2$. Согласно (II), ограничение $\alpha|A(5)$ содержит представление β с $\delta(\beta)=2$. Пусть $\beta'\in\mathrm{Irr}\ \alpha'|A(5)$. Тогда $\alpha\otimes\alpha'|A(5)$ содержит компоненту $\beta\otimes\beta'$. Ввиду сказанного выше $\delta(\beta\otimes\beta')>1$. Ввиду (II) $\delta(\alpha\otimes\alpha')>1$.

Лемма 3. *Пусть* $m>4$, $\tau: A(m)\longrightarrow A(n)$ *— диагональное вложение и* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(n)$ *с* $\delta(\varphi)>1$. *Тогда* $\delta(\varphi\tau)>1$.

Доказательство. Пусть Ω_1 - орбита длины m группы $A(m)$ на $\Omega(n)$ и $\Omega_2=\Omega(n)-\Omega_1$. Пусть $H=A(\Omega_1)\times A(\Omega_2)\subset A(n)$. В силу (II) $\delta(\varphi|A(\Omega_1))>1$. Поэтому $\varphi|H$ содержит компоненту вида $\varphi_1\otimes\varphi_2$, где $\delta(\varphi_1)>1$, $\varphi_2\in\mathrm{Irr}\ A(\Omega_2)$. Пусть τ_i - ограничение действия группы $\tau(A(m))$ на $\Omega_i\ (i=1,2)$. Очевидно, $\delta(\varphi\tau)=\delta(\varphi_1)>1$ и $\delta(\varphi\tau)>\delta(\varphi_1\tau_1\otimes\varphi_2\tau_2)$. По лемме 2 $\delta(\varphi_1\tau_1\otimes\varphi_2\tau_2)>1$.

Лемма 4. *Пусть* $n=\ell_0+\ell_1+\ldots+\ell_a$, *причем* $\ell_0\ge 0$ *и* $\ell_a>3$ *при* $i=1,\ldots,a$. *Пусть* $\psi\in\mathrm{Irr}\ A(n)$ *и* $\delta(\psi)=a$. *Пусть еще* $H=A(\ell_0)\times\ldots\times A(\ell_a)\subset A(n)$. *Тогда* $\psi|H$ *содержит компоненту* $1_{A(\ell_0)}\times\eta_{\ell_1}\times\ldots\times\eta_{\ell_a}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по a. При $a=0$ лемма тривиальна. Положим $\ell=\ell_0+\ldots+\ell_{a-1}$ и $m=\ell_a$, так что $H\subset H_1=A(\ell)\times A(m)$. Ясно, что $n>3a$. Поэтому ψ продолжается до представления φ группы $S(n)$ с той же диаграммой. Пусть $G=S(\ell)\times S(m)\subset S(n)$. В силу (VI) $\mathrm{Irr}\ \varphi|G$ содержит компоненту $\beta\otimes\eta'_m$, где $\beta\in\mathrm{Irr}\ S(\ell)$ и $D(\beta)$ получается из $D(\varphi)$ удалением $m-1$ клетки из первой строки и одной клетки из последней. При этом $\delta(\beta)=a-1$. Положим $\gamma=\beta|A(\ell)$. Тогда γ неприводимо, $\delta(\gamma)=\delta(\beta)=a-1$ и представление $\psi|H_1=\varphi|H_1$ содержит $\gamma\otimes\eta_m$. Применяя к γ предположение индукции, получаем лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\sigma=\eta_k\otimes\ldots\otimes\eta_k$ *($m>1$ множителей). Тогда* $\mathrm{Irr}\ \sigma=\{\alpha\in\mathrm{Irr}\ A(k):\delta(\alpha)\le m\}$.

Доказательство. Ввиду (II) достаточно доказать лемму для группы $S(k)$ вместо $A(k)$ (с заменой η_k на η'_k). Из (XII) вытекает, что $\delta(\sigma)\le m$. Из (XII) и (I) следует, что $\mathrm{Irr}\ (\eta'_k\times\eta'_k)$ содержит η'_k и $1_{S(k)}$; отсюда вытекает, что $1_{S(k)}\in\mathrm{Irr}\ \sigma$. Пусть $\theta\in\mathrm{Irr}\ S(k)$ - произвольное представление глубины $a\le m$. Чтобы доказать, что $\theta\in\mathrm{Irr}\ \sigma$, воспользуемся индукцией по a. При $a=0$ это уже доказано. Пусть $a\ge1$. Пусть φ - представление, диаграмма которого получается из $D(\theta)$ переносом одной клетки из последней строки в первую. Тогда $\delta(\varphi)=a-1$ и $\varphi\in\mathrm{Irr}\ \sigma$ по предположению индукции. В силу (I) $\theta\in\mathrm{Irr}\ ((\varphi|S(k-1))\uparrow S(k))$. Согласно (XII), $\theta\in\mathrm{Irr}\ \delta$ (ибо $\delta(\theta)\ne\delta(\varphi)$). Отсюда следует лемма.

Лемма 6. *Пусть $k>3$, $\tau: A(k)\longrightarrow A(\ell)$ - вложение знакопеременных групп, d - число орбит длины $\ge k$ группы $\tau(A(k))$ на $\Omega(\ell)$. Пусть x - число несопряженных подгрупп группы $A(k)$ и $y=k!/2$ - ее порядок. Пусть еще $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(\ell)$. Предположим, что $\delta(\varphi)>4y^4$ и $d>2xy$. Тогда* $\mathrm{Irr}\ \varphi\tau=\mathrm{Irr}\ A(k)$.

Доказательство. Положим $G=\tau(A(k))$, $H=A(\ell)$, $a=\delta(\varphi)$. Хорошо известно, что классы изоморфных транзитивных представлений группы H подстановками взаимно однозначно соответствуют классам ее сопряженных подгрупп. Отсюда следует, что на $\Omega(\ell)$ можно найти $2y$ изоморфных друг другу орбит $\Omega_1,\ldots,\Omega_{2y}$ длины $m\ge k$. Положим $\Omega_0=\{\omega\in\Omega\,|\,\omega\notin\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_{2y}\}$.

Пусть $\lambda=D(\varphi)$. Так как $\lambda\ge\lambda^*$, то $\ell-a\ge\sqrt{a}$ (см. (VIII)). Далее, $\sqrt{a}>2y^2\ge2ym$, ибо $m\le y$. Поэтому λ содержит поддиаграмму μ вида $(2y(m-1),\ 2y)$ или $(2y(m-1),\ 1^{2y})$. Заметим, что $|\mu|=2ym$. Пусть $R=A(\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_{2y})\cong A(2my)\subset A(\ell)$. Согласно (II), $\mathrm{Irr}\ \varphi|R$ содержит некоторое представление θ с диаграммой μ. Тогда ограничение $\varphi|R\times A(\Omega_0)$ содержит неприводимую компоненту $\theta\otimes\theta_1$, где $\theta_1\in\mathrm{Irr}\ A(\Omega_0)$. По лемме 4 представление $\theta|A(\Omega_1)\times\ldots\times A(\Omega_{2y})$ содержит неприводимую компоненту $\eta_m\otimes\ \ldots\otimes\eta_m$ ($2y$ множителей). Пусть $\rho; A(m)\longrightarrow R$ - вложение, в котором группа $A(m)$ действует естественным образом на каждой орбите $\Omega_1,\ldots,\Omega_{2y}$. Тогда действие группы G на $\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{2y}$ имеет вид $\rho\sigma$, где σ - ограничение действия группы G на Ω_1. Заметим, что $(\eta_m\otimes\ldots\otimes\eta_m)\rho=\eta_m\otimes\ldots\otimes\eta_m$; здесь в левой части стоит внешнее тензорное произведение представлений η_m, а в правой - внутреннее. Ввиду леммы 5 $\eta_m\otimes\eta_m$ содержит компоненту $1_{A(m)}\otimes\eta_m$. Следовательно, $\theta\rho\sigma$ содержит прямое слагаемое вида $(1_G\otimes\eta_m\sigma)\otimes\ldots\otimes(1_G\otimes\eta_m\sigma)$ (y множителей). Согласно (XI), $\mathrm{Irr}\ \theta\rho\sigma=\mathrm{Irr}\ G$. Остается воспользоваться утверждением (IX).

Лемма 7. *Пусть* $\tau: A(k)\longrightarrow A(\ell)$ $(\ell>k>5)$ *– транзитивное вложение и* $A(d)\longrightarrow A(k)(d>4)$ *– естественное вложение. Тогда вложение* $\tau_1=\tau|A(d)$ *группы* $A(d)$ *в* $A(\ell)$ *не является диагональным.*

Доказательство. Случай $k=d$ тривиален. Рассмотрим сначала случай $k=d-1$. Положим $\tau_2=\tau_1|A(5)$. Пусть $x\in\Omega(\ell)$ – такая точка, что $\tau_2(A(5))(x)\neq x$. Пусть $R_5(x)$, $R(x)$ и $T(x)$ – стабилизаторы точки x в $A(5)$, $A(d)$ и $A(k)$ соответственно. Рассуждая от противного, предположим, что вложение τ_1 диагонально. Очевидно, $R(x)\neq A(d)$, так что $A(d):R(x)=d=k-1$. Ввиду (VII) $R(x)\cong A(d-1)$, так что $T(x)$ содержит подгруппу H, изоморфную $A(d-1)=A(k-2)$. Снова ввиду (VII) существует орбита Y группы $T(x)$ на $\Omega(\ell)$ длины $\geq k-2$. Поэтому другие орбиты – длины ≤ 2. Ясно, что вложение τ_2 диагонально, коль скоро τ_1 таково. В силу (VII) $R_5(x)=A(4)$, так что $T(x)\supset A(4)$. Пусть T_0 – ограничение $T(x)$ на Y. Тогда, очевидно, $T_0\supset A(4)$. Ввиду [16], гл. 2, § 4 $T_0=A(Y)$. Отсюда следует, что $T(x)$ – одна из групп $A(k-2)$ или $S(k-2)$ $(T(x)\neq A(k-1)$, ибо $k<\ell)$. Это означает, что действие группы $A(k)$ на $\Omega(\ell)$ совпадает с ее действием на парах (соответственно упорядоченных парах) точек множества $\Omega(k)$. Легко убедиться, что ограничение этого действия на $A(k-1)=A(d)$ содержит орбиту такого же типа (т.е. орбиту действия группы $A(k-1)$ на парах точек из $\Omega(k-1)$). При $d>3$ длина такой орбиты строго больше $k-1$. Это доказывает лемму при $d=k-1$. Остается воспользоваться индукцией.

Лемма 8. *Пусть* $m>4, \tau: A(m)\longrightarrow A(n)$ *– вложение и* $1_{A(m)}\neq\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(n)$. *Предположим, что* $\delta(\varphi\tau)=1$. *Тогда* $\delta(\varphi)=1$ *и* τ *диагонально.*

Доказательство. Пусть $D(\varphi)=(\ell_1,\ldots,\ell_r)$. Так как $D(\varphi)\geq D(\varphi)^*$, то $\ell_1\geq\sqrt{n}$. Пусть σ – композиция τ и естественного вложения $A(5)\longrightarrow A(m)$. Ввиду (II) $\delta(\varphi\sigma)=1$. Пусть Ω_1 – орбита наибольшей длины s группы $\sigma(A(5))$ на $\Omega(n)$ и τ_1 – ограничение σ на Ω_1. Ясно, что τ_1 транзитивно. Рассуждая от противного, предположим сначала, что вложение τ недиагонально. Тогда в силу леммы 7 $s>5$. Согласно (II), $\mathrm{Irr}\ \varphi|A(\Omega_1)$ содержит η_s. По лемме 1 $\delta(\eta_s\tau_1)>1$. Ясно, что $\mathrm{Irr}\ \varphi\sigma$ содержит $\eta_s\tau_1\otimes\psi$ для некоторого $\psi\in\mathrm{Irr}\ A(5)$. Ввиду (XIII) $\delta(\eta_s\tau\otimes\psi)>1$. Следовательно, $\delta(\varphi\sigma)>1$, что невозможно. Значит, τ диагонально, так что $s=5$. Предположим теперь, что $\delta(\varphi)>1$. Пусть θ – неприводимая компонента наибольшей глубины в $\varphi|A(\Omega_1)$. Ввиду (II) $\delta(\theta)>1$. Так как $\tau_1(A(5))=A(\Omega_1)$, то $\delta(\theta\tau_1)>1$. Ясно, что $\mathrm{Irr}\ \varphi\sigma$ содержит неприводимую компоненту вида $\theta\tau_1\otimes\psi$, где $\psi\in\mathrm{Irr}\ A(5)$. Ввиду (XIII) $\delta(\theta\tau_1\otimes\psi)>1$. Поэтому $\mathrm{Irr}\ \varphi\sigma>1$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\tau: A(k)\longrightarrow A(\ell)$ *– вложение,* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ (\ell)$ *и* $\delta(\varphi)=a$. *Пусть* h *– число орбит длины* $\geq k$ *группы* $\tau(A(k))$ *на* $\Omega(\ell)$ *и* $h>a$. (i) *Если вложение* τ *недиагонально и* $k>(2a+2)^2$, *то* $\delta(\varphi\tau)>a$. (ii) *Если вложение* τ *диагонально и* $k>4$, *то* $\varphi\tau$ *содержит все неприводимые представления глубины* $\leq a$ *группы* $A(k)$.

Доказательство. Пусть $G=\tau(A(k))$. Пусть $\Omega_1,\ldots,\Omega_a$ – орбиты группы G на $\Omega(\ell)$ и $d_j=|\Omega_j|\geq k, j=1,\ldots,a$. В случае (i) можно считать, что $d_1>k$. Пусть $\Omega_0=\{\omega\in\Omega: \omega\notin\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_a\}$. Таким образом, $G\subset H=A(\Omega_0)\times A(\Omega_1)\times\ldots A(\Omega_a)\subset A(\ell)$. Согласно лемме

4 ограничение $\varphi|H$ содержит компоненту $1_{A(\Omega_0)}\otimes\eta_{d_1}\otimes\ldots\otimes\eta_{d_a}$. Пусть σ_j – ограничение действия группы G на Ω_j и $\theta_j=\eta_{d_j}\sigma_j(j=1,\ldots,a)$. Тогда $\varphi|G$ содержит компоненту $1_G\otimes\theta_1\otimes\ldots\otimes\theta_a$. Очевидно, $\delta(\theta_j)\geq1$ $(1\leq j\leq a)$. Рассмотрим сначала случай (i). В силу леммы 1 $\delta(\theta_1)\geq2$.

Пусть $\psi_j\in\mathrm{Irr}\ \theta_j$, причем $\delta(\psi_j)=\delta(\theta_j)$, и пусть $\mu_j=D(\psi_j)$, $j=1,\ldots,a$. Пусть $b=2a+2$. Так как $b^2<k$, то число клеток в первой строке диаграммы μ_j не меньше b. Пусть $A(b)\longrightarrow A(k)$ - естественное вложение. Ввиду (II) ограничение $\psi_j|A(b)$ содержит η_b при $1\leq j\leq a$; кроме того, $\mathrm{Irr}\ \psi_1|A(b)$ содержит представление ρ с $\delta(\rho)=2$. Применяя (III) к тензорному произведению $\rho\otimes\eta_b\otimes\ldots\otimes\eta_b$ последовательно $a-1$ раз, заключаем, что $\varphi|A(b)$ содержит неприводимую компоненту π с $\delta(\pi)>a$. Отсюда следует, ввиду (II), что $\delta(\varphi\tau)>a$, что доказывает (i).

Обратимся теперь к случаю (ii). Так как вложение τ диагонально, то $\theta_j=\eta_k$, $j=1,\ldots,a$. По лемме 5 $\mathrm{Irr}\ \varphi|G$ содержит все неприводимые представления глубины $\leq a$ группы $A(k)$, что и требовалось.

Лемма 10. *Пусть* $m>\ell>k>4$, $\tau_1: A(k)\longrightarrow A(\ell)$, $\tau_2: A(\ell)\longrightarrow A(m)$ *– вложения знакопеременных групп и* $\tau=\tau_2\tau_1$. *Предположим, что вложение* τ *диагонально. Тогда оба вложения* τ_1 *и* τ_2 *диагональны. Кроме того, если* τ *естественно, то оба вложения* τ_1,τ_2 *естественны.*

Доказательство. Согласно (XY), $\delta(\eta_m\tau)=1$. С другой стороны, если вложение τ_1 не является диагональным, то по лемме 8 $\delta(\eta_m\tau_2)>1$. Пусть τ_1 диагонально. Если τ_2 недиагонально, то по лемме 8 $\delta(\eta_m\tau_2)>1$. По лемме 1 $\delta(\eta_m\tau)>1$, что невозможно. Следовательно, оба вложения τ_1 и τ_2 диагональны. Второе утверждение непосредственно следует из первого.

Лемма 11. *Пусть* $\tau: A(i)\longrightarrow A(j)$ *– диагональное вложение. Пусть* $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(i)$ *и* $\delta(\varphi)=a$. *Положим* $R_a=\{\alpha\in\mathrm{Irr}\ A(i):\delta(\alpha)\leq a\}$. *Если* $i>4$ *и* $i\geq2a+1$, *то* $\mathrm{Irr}\ \varphi\tau\subset R_a$. *Кроме того, если* h *– число орбит длины* $\geq i$ *группы* $\tau(A(i))$ *на* $\Omega(j)$ *и если* $h>i$, *то* $\mathrm{Irr}\ \varphi\tau=R_a$.

Доказательство. Пусть $\Omega_1,\ldots,\Omega_s$ - орбиты группы $\tau(A(i))$ на $\Omega(j)$. Включим $\tau(A(i))$ в группу $H=A(\Omega_1)\times\ldots\times A(\Omega_s)$. Ясно, что φ – прямая сумма неприводимых компонент вида $\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_s$, где $\varphi_\ell\in\mathrm{Irr}\ A(\Omega_\ell)$, $\ell=1,\ldots,s$. Положим $\delta(\varphi_\ell)=a_\ell$. Из теоремы взаимности Фробениуса и правила Литтлвуда-Ричардсона (IV) следует, что $a_1+\ldots+a_s\leq a$. Пусть σ_ℓ - ограничение действия группы $\tau(A(i))$ на Ω_ℓ. Тогда $\varphi|G$ - прямая сумма представлений $\varphi_1\sigma_1\otimes\ldots\otimes\varphi_s\sigma_s$. Так как вложение τ диагонально, то $\delta(\varphi_\ell\tau_\ell)=a_\ell, \ell=1,\ldots,s$. Применяя несколько раз (III), получаем $\delta(\varphi_1\tau_1\otimes\ldots\otimes\varphi_s\sigma_s)=\delta(\varphi_1\tau_1)+\ldots+\delta(\varphi_s\sigma_s)=a_1+\ldots a_s\leq a$. Это доказывает первое утверждение. Второе вытекает из леммы 9 (ii).

Лемма 12. *Пусть* H *– импримитивная группа подстановок на конечном множестве* Ω *и* Δ *– множество систем импримитивности. Пусть* $G\subset S(\Delta)$ *– группа подстановок, индуцированная действием группы* H *на* Δ. *В обозначениях* (XIV) *предположим, что* $|\Omega|>J(H,\Omega)^3$. *Тогда* $|\Delta|>J(G,\Delta)^3$.

Доказательство. Пусть $|\Delta|=m$ и $\Omega=\Omega_1 \cup \ldots \cup\Omega_m$ - разбиение множества Ω на системы импримитивности; как известно, $|\Omega_1|=\ldots=|\Omega_m|$, так что $|\Omega|=m|\Omega_1|$. При $h\in H$ пусть $k(h)$ - число систем импримитивности Ω_j со свойством $h\Omega_j\neq\Omega_j$. Каждая такая система, очевидно, содержится в $\mathrm{supp}\ h$. Поэтому $|\mathrm{supp}\ h|\geq k(h)|\Omega_1|$. Пусть g - образ элемента h при естественном гомоморфизме $H\longrightarrow G$. Тогда $k(h)=|\mathrm{supp}\ g|$, так что $|\mathrm{supp}\ h|\geq|\mathrm{supp}\ g\|\Omega_1|$. Выберем h таким образом, что $|\mathrm{supp}\ h|=J(H,\Omega)$. Тогда мы имеем $J(G,\Delta)\leq|\mathrm{supp}\ g|\leq|\mathrm{supp}\ h|/|\Omega_1|=J(H,\Omega)/|\Omega_1|<|\Omega|^{1/3}/|\Omega_1| = m^{1/3}|\Omega_1|^{-2/3}<m^{1/3}$, откуда следует лемма.

Лемма 13. *Пусть $H\subset S(\Omega)$ - транзитивная группа. Предположим, что $H\cong A(m)$ и $m>J(H,\Omega)^3$ (в частности, $m>8$). Тогда $|\Omega|=m$.*

Доказательство. Пусть X - стабилизатор некоторой точки $\omega\in\Omega$ в группе H. Хорошо известно, что группа подстановок (H,Ω) изоморфна группе подстановок $(H,H/X)$, где H/X - пространство $\{X_g\}$ правых смежных классов по X, в котором группа H действует правыми умножениями. Пусть Y - любая максимальная подгруппа группы H, содержащая X. Легко видеть, что, объединяя смежные классы X_g, лежащие в одном и том же смежном классе по Y, мы получаем системы импримитивности группы H на множестве H/X, если $X\neq Y$. Действие группы H на этих системах импримитивности изоморфно действию H на смежных классах H/Y. Если K - подгруппа группы H, то группа подстановок $(H,H/K)$ примитивна тогда и только тогда, когда группа K максимальна в H (см., например, [16], гл. 2, § 1). Следовательно, действие H на H/Y примитивно. Кроме того, ввиду леммы 12 выполняются условия теоремы Жордана (XIV) (ибо $m\leq|\Omega|$). Используя ее, заключаем, что $H\cong A(k)$, где $k=|H/Y|$. Согласно (VII), $Y\cong A(k-1)$. В частности, $k=m$. Положим $\ell=|Y/X|$. Покажем, что $\ell=1$. Если это не так, то $\ell>k-1$ (см. (VII)). Каждый элемент $h\in H, h\neq1$ сдвигает по меньшей мере две системы импримитивности, т.е. сдвигает не менее $2\ell>2(k-1)$ символов. Отсюда вытекает, что $J(H,\Omega)\geq2(m-1)$, что невозможно. Следовательно, $\ell=1$, $Y=X$.

§ 2. Доказательство основных результатов

Лемма 14. *Пусть $A(k_1)\subset A(k_2)\subset\ldots$ - бесконечная последовательность вложений знакопеременных групп, причем $k>4$. Предположим, что существует бесконечная подпоследовательность $\{t_j\}\subset\{k_i\}$ такая, что все вложения $A(t_j)\longrightarrow A(t_{j+1})$ диагональны. Тогда и все вложения $A(k_i)\longrightarrow A(k_{i+1})$ при $k_i>t_1$ диагональны.*

Доказательство. Пусть $k_i>t_1$ и j - такой номер, что $A(k_i)\subset A(t_j)$. По лемме 10 вложение $A(k_i)\longrightarrow A(t_j)$ диагонально. Если $\ell_j=k_{i+1}$, то все доказано. Если $k_{i+1}<t_j$, то снова по лемме 10 вложение $A(k_i)\longrightarrow A(k_{i+1})$ диагонально.

Лемма 15. *Пусть $A(k_i)$, $i=1,2,\ldots$ - как в лемме 14. Предположим, что не существует подпоследовательности $\{t_j\}\subset\{k_i\}$ такой, что все вложения $A(t_j)\longrightarrow A(t_j+1)$ диагональны. Тогда для любого r среди вложений $A(k_r)\longrightarrow A(k_s)$ $(r<s)$ имеется не более конечного числа диагональных.*

Доказательство вытекает из лемм 10 и 14.

В условиях леммы 14 вложение $A(k_i)\longrightarrow A(k_j)$ будем обозначать через ε_{ij}; для упрощения обозначений положим $\tau_i=\varepsilon_{i,i+1}$. Через d_{ij} обозначим число орбит длины $\geq k_i$ группы $\varepsilon_{ij}(A(k_i))$ на $\Omega(k_j)$.

Лемма 16. *В условиях леммы 14 пусть $T=\{4<t<t_1<t_2<\ldots\}$ — бесконечная подпоследовательность в $\{k_i\}$. Предположим, что $d_{ts}=a$ для всех $s\in T, s>t$. Пусть j — наименьший номер такой, что $t_j>(k_t!a)^3$. Тогда все вложения ε_{uv} при $u,v\in\mathbb{N}$, $v>u>t_j$, являются естественными. Другими словами, если $A=\cup A(k_i)$, то $A\cong A(X)$ для некоторого счетного бесконечного множества X.*

Доказательство. Пусть сначала $u,v\in T$. Пусть $\Omega\subset\Omega(k_v)$ - нетривиальная орбита группы $\varepsilon_{uv}(A(k_u))$. Так как Ω - объединение орбит группы $\varepsilon_{tv}(A(k_t))$, то число орбит длины >1 группы $\varepsilon_{tv}(A(k_t))$ на Ω не превосходит $d_{tv}=a$. Следовательно, в обозначениях леммы 13 мы имеем $J(A(k_t),\ \Omega)\leq k_t!a$, так что $J(A(u),\ \Omega)\leq k_t!a$. В силу выбора u мы можем применить лемму 13 к группе подстановок $\varepsilon_{uv}(A(u),\Omega)$ и заключить, что $|\Omega|=u$. Это верно для любой орбиты Ω с $|\Omega|>1$, так что вложение ε_{uv} диагонально. Отсюда вытекает, что $a=d_{tv}=d_{tu}d_{uv}=ad_{uv}$, так что $d_{uv}=1$, т.е. вложение ε_{uv} является естественным. Теперь из леммы 10 следует, что вложение ε_{uv} является естественным и при $u,v\in\mathbb{N}$.

Лемма 17. *Пусть A — локально-конечная группа и $\{A(k_t)\}_{t\in T}$ — локальная система знакопеременных подгрупп в A. Пусть $t\in T$ с $k_t>4$. Если для любой линейной упорядоченной последовательности L, начинающейся с t, все последовательные вложения, кроме конечного числа, диагональны (соответственно, естественны), то группа A — диагонального типа (соответственно $A\cong A(X)$ для некоторого множества X).*

Доказательство. При $x\in T$ положим $T_x=\{t\in T\colon t>x\}$. Очевидно, T_x - направленное множество и $A=\bigcup_{t\in T_x} A(k_t)$. По лемме 10 если вложение ε_{rs} для некоторых $r,s\in T, r>s$ не является диагональным (соответственно естественным), то и вложение ε_{ts} не является диагональным (соответственно естественным). Положим $x_1=t$ и построим индуктивно последовательность $x_1,x_2,\ldots$ следующим образом. Если не все вложения ε_{rs} при $r,s\in T_{x_1}$, $r<s$, диагональны (соответственно естественны), то выберем $x_{i+1}\in T_{x_i}$ так, что вложение $\varepsilon_{i,i+1}$ не является диагональным (соответственно естественным). В противном случае x_i - последний член конструируемой последовательности. Если наша последовательность конечна (скажем, заканчивается элементом x_i), то в силу сказанного выше $A=\bigcup_{t\in T_{x_i}} A(k_t)$ и каждое вложение ε_{rs} при $r,s\in T_{x_i}$, $r<s$, является диагональным (соответственно естественным): другими словами, группа A - диагонального типа (соответственно изоморфна $A(X)$ для некоторого множества X). Если же последовательность $x_1,x_2,\ldots$ бесконечна, то среди вложений $\varepsilon_{i,i+1}$ имеется бесконечное число недиагональных (соответственно не естественных). Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть $\{A_t\}\subset A$ — как в лемме 17, и пусть $t\in T$. Если для любой линейно упорядоченной последовательности $L\subset T$ числа $d_{t\ell}(\ell\in L)$ ограничены в совокупности (числом, зависящим от L), то $A\cong A(X)$ для некоторого множества X.*

Доказательство. Сопоставляем леммы 16 и 17.

Напомним теперь некоторые факты теории представлений конечных групп. Пусть P – поле характеристики $0, H$ – конечная группа. Пусть K – двусторонний идеал группового кольца PH. Положим $M(K)=\mathrm{Irr}\ PH/K$, $L(K)=\mathrm{Irr}\ K$. Хорошо известно, что $L(K)\cap M(K)=\varnothing$. Кроме того, для любого разбиения $H=M_1\cup M_2, M_1\cap M_2=\varnothing$ существует единственный идеал K кольца PH такой, что $M_1=M(K)$ и $M_2=L(K)$.

Лемма 19. *Пусть $G\subset H$ – конечные группы, $J\in K$ – идеалы групповых колец PG и PH соответственно. Следующие утверждения эквивалентны:*

(*A*) $J=K\cap PG$;

(*B*) *J – наибольший идеал кольца PG такой, что $hJh^{-1}\subset K$ для любого $h\in H$*;

(*C*) $L(J)=\{\psi\in\mathrm{Irr}\ G\colon \mathrm{Irr}(\psi\uparrow H)\subset L(K)\} = \{\psi\colon M(K)\cap \mathrm{Irr}(\psi\uparrow H)=\varnothing\} = \{\psi\colon \psi\notin \mathrm{Irr}(M(K)|G)\}$.

(*D*) $M(J)=\mathrm{Irr}(M(K)|G)$.

Поясним, что эквивалентность утверждений (A) и (B) хорошо известна. Эквивалентность (B) и первого равенства в (C) вытекает из определения индуцированного модуля и свойств PH как модуля над PG. Последнее равенство в (C) следует из теоремы взаимности Фробениуса. Остальное вытекает из определений $M(K)$, $L(K)$, $M(J)$ и $L(J)$. Символ $M(K)|G$ обозначает здесь множество $\{\psi\in\mathrm{Irr}\ \varphi\colon \varphi\in M(K)\}$.

Доказательство предложения 1. *Первое утверждение следует из леммы* 19. *Пусть $\{M_t\}_{t\in T}$ – индуктивная система. Пусть I_t – идеал кольца PH_t такой, что* $\mathrm{Irr}\ PH_t/I_t=M_t$. *Согласно лемме* 19, *мы имеем $I_s=I_t\cap PH_s$ всякий раз, когда $s<t$. Положим $I=\bigcup_{t\in T} I_t$. Ясно, что I – идеал кольца PH, причем по построению $I_t=I\cap PH_t$ для любого $t\in T$. Предложение доказано.*

Предложение 2. *Пусть $\{A(k_i)\}$ – как в лемме* 14 *и $A=\bigcup_i A(k_i)$. Пусть $I\subset PA$ – идеал; положим $\delta_i=\delta(PA(k_i))/(PA(k_i)\cap I)$, $i=1,2,\ldots,$. Если множество δ_i неограничено, то $A\cong A(X)$ для некоторого множества X.*

Доказательство. Заметим, что определение глубины представления имеет смысл для любого поля характеристики 0, а не только для поля комплексных чисел. Дело в том, что каждое представление группы $S(k)$ эквивалентно представлению над полем рациональных чисел. При переходе к группе $A(k)$ это не всегда так, но определение глубины представлений группы $A(k)$ дается через диаграммы, т.е. фактически через соответствующие представления симметрической группы $S(k)$. Поэтому мы можем считать (без ущерба для общности), что поле P алгебраически замкнуто. Ясно, что существует такой номер r, что $I\cap PA(k_r)\neq 0$, так что $M_r(I)\neq \mathrm{Irr}\ A(k_r)$. Положим $A(k_r)=B$. Из последовательности δ_i можно выбрать бесконечную возрастающую подпоследовательность; так как группа A есть объединение подгрупп $A(k_i)$, когда i пробегает любую бесконечную подпоследовательность в $\mathbb{N}$, то, опуская в последовательности $A(k_i)$ некоторые члены, мы можем считать без ущерба для общности, что последовательность δ_i строго возрастает.

Предположим противное, что группа A не изоморфна $A(X)$ ни для какого множества X. Тогда числа d_{ri} не ограничены в совокупности ввиду леммы 16. Следовательно, для подходящего номера i мы имеем $d_{ri}>2xy$ и $\delta_i>2y^4$, где $y=k_r!=|B|$, а x – число несопряженных подгрупп группы B. Пусть $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k)$ и $\delta(\varphi)=\delta_1$. По лемме 6 $\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon_{ri}=\mathrm{Irr}\ B=M_r$, что противоречит выбору r. С другой стороны, существование идеалов бесконечной глубины в кольце PA для финитарной группы A хорошо известно (в частности, следует из [6]). Это доказывает предложение.

Доказательство теоремы 1. Пусть $I\neq 0$ - собственный идеал кольца PA, отличный от фундаментального. Поскольку группа A проста, то пересечение $I\cap PA(k_s)$ есть собственный идеал, отличный от фундаментального, для каждого $s\in S$ с $k_s>1$.

Предположим сначала, что группа A счетна. Тогда из множества S можно выбрать возрастающую последовательность $4,k_1,k_2,\ldots$, такую, что $A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A(k_i)$. Как и в доказательстве предложения 2 мы можем считать поле P алгебраически замкнутым. Пусть $M_i=\mathrm{Irr}(PA(k_i))/(PA(k_i)\cap I)$. Положим $\delta_i=\delta(M_i)$. Если множество $\{\delta_i\}$ неограниченно, то желаемый результат содержится в уже доказанном предложении 2. Рассмотрим случай, когда множество $\{\delta_i\}$ ограничено. Согласно лемме 14, без ущерба для общности мы можем заменить последовательность $\{A(k_i)\}$ на любую ее бесконечную подпоследовательность. Поэтому мы можем считать, что все числа δ_i равны между собой. Пусть, например, $\delta_i=a$ для всех $i=1,2,\ldots$. Так как $I\neq 0$, то $M_i\neq\mathrm{Irr}\ A(k_i)$, начиная с некоторого номера i_0. Выберем $r\in\mathbb{N}$ так, что $r>i_0$ и $r>(2a+2)^2$. Предположим, что A не является группой диагонального типа. Тогда, согласно лемме 16, множество $\{d_{ri}\},i=1,2,\ldots$ неограничено. Поэтому ввиду леммы 10 можно найти такой номер i, что $d_{ri}>a$ и вложение ε_{ri} недиагонально. Пусть $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k_i)$ и $\delta(\varphi)=a$. Согласно лемме 9(ii), мы имеем $\delta(\varphi\varepsilon_{ri})\geq a$. С другой стороны, $\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon_{ri}\subset M_r$ по определению индуктивной системы. Следовательно, $\delta(\varphi\varepsilon_{ri})\leq a$. Получаем противоречие, которое доказывает теорему в счетном случае.

Возвращаясь к общему случаю, выберем такой элемент $s\in S$, что $I\cap PA(k_s)=0$ и $k_s>4$. Предположим, что A - не диагонального типа. Тогда в силу леммы 17 существует подмножество $L=\{s<\ell_1<\ell_2<\ldots\}\subset S$, в котором бесконечное число последовательных вложений $A(k_\ell)\longrightarrow A(k_{\ell+1})$ не являются диагональными. Положим $B=\bigcup_{\ell\in L}A(k_\ell)$. Тогда $I\cap PB\neq 0$ - собственный идеал, отличный от фундаментального. Согласно первой части этого доказательства, множество L содержит бесконечное подмножество L_1 такое, что $B=\bigcup_{\ell\in L_1}A(k_\ell)$ и все последовательные вложения диагональны. Это невозможно ввиду леммы 14. Теорема доказана.

Лемма 20. *Пусть* $\{A(k_t)\}_{t\in T}$ *- локальная система знакопеременных подгрупп в группе* A *и все вложения* $\varepsilon_{st}(s<t,s,t\in T)$ *диагональны. Пусть* $a\in\mathbb{N}$, *и* $M_t^a=\{\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k_t):\delta(\varphi)\leq a\}$. *Предположим, что* $k_t>\max(2a+1,4)$ *для любого* $t\in T$. *Тогда* $\{M_t^a\}_{t\in T}$ *- индуктивная система представлений.*

Доказательство. Пусть $s,t\in T,s\leq t$ и $\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k_t)$. Положим $G=\varepsilon_{st}(A(k_s))$. Согласно лемме 11 $\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon_{st}\subset M_s^a$. Это дает включение $\mathrm{Irr}(M_t^a|G)\subset M_s^a$. Остается установить обратное включение. Пусть $\psi\in M_s^a$ и $\delta(\psi)=b\leq a$. Рассмотрим представление $\varphi\in M_t^a$ с $\delta(\varphi)=b$. Покажем, что $\psi\in\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon_{st}$. Пусть Ω_1 - орбита длины k_s группы G на $\Omega(k_t)$ и $\Omega_2=\Omega(k_t)-\Omega_1$. Тогда $G\subset H=A(\Omega_1)\times A(\Omega_2)$. Так как $k_s>2a+1$, то из (IV) вытекает, что $\varphi|H$

содержит $\psi\otimes 1_{A(\Omega_2)}$. Следовательно, $\psi\in\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon_{st}$. Отсюда следует лемма.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{A(k_t)\}_{t\in T}$ - локальная система в группе A, состоящая из конечных знакопеременных групп. Пусть $a\in\mathbb{N}$, и пусть $x\in T$ - произвольный элемент с $k_x>\max(2a+1,4)$. Группа A и структура ее идеалов не изменится, если заменить T на $T_x=\{t\in T: t>x\}$. Следовательно, без ущерба для общности мы можем предполагать, что $k_t>\max(2a+1,4)$ при $t\in T$. Положим $M_t^a=\{\varphi\in\mathrm{Irr}\ A(k_t):\delta(\varphi)\le a\}$. Согласно лемме 20, $\{M_t^a\}_{t\in T}$ - индуктивная система представлений. В силу предложения 1 этой системе соответствует некоторый идеал J_a; из доказательства предложения 1 следует, что $J_a>J_b$ при $a<b\in\mathbb{N}$ и что J_1 - фундаментальный идеал кольца PA. Пусть теперь $I\subset PA$ - произвольный собственный ненулевой идеал, отличный от фундаментального. Пусть $\{M_t\}_{t\in T}$ - соответствующая ему индуктивная система. Пусть $r\in T$ - такой элемент, что $I_r=I\cap PA(k_r)\neq\{0\}$. Пусть $s\in T, s>r$ и $d_{rs}>xy$, где x - число подгрупп группы $A(k_r)$, а y - ее порядок. Такой элемент s существует (в противном случае, числа d_{rs} $(s>r)$ ограничены; тогда $A\cong A(X)$ в силу леммы 18). Пусть $a=\max\limits_{t>s}\delta(M_t)$. Если $a=\infty$, то по лемме 6 $\mathrm{Irr}\ \varphi\varepsilon_{rt}=\mathrm{Irr}\ A(k_r)$ (ибо $d_{rt}\ge d_{rs}$ при $t>s$). Это означает, что $I_r=0$, что противоречит выбору r.

Следовательно, $a\in\mathbb{N}$. Пусть $b=\min\limits_{t>s}\max\limits_{v>t}\delta(M_v)$. Тогда $b\le a$. Выберем $t\in T$ так, что $b=\max\limits_{v>t}\delta(M_v)$ и $k_t>\max(2b+1,4)$. Из выбора t следует, что при $u>t$ мы имеем $\max\limits_{v>u}\delta(M_v)=b$. В силу леммы 18 числа d_{uv} $(v>u)$ неограничены в совокупности. Следовательно, существует $v>u$ с $d_{uv}>2b+1$. По лемме 11 $\mathrm{Irr}\ M_u=\{\psi\in\mathrm{Irr}\ A(k_u):\delta(\psi)<b\}$, т.е. $M_u=M_u^b$. Это верно для любого $u>t$, т.е. для любого $u\in T_t$. Как отмечено выше, без ущерба для общности можно считать, что $T=T_t$. Тогда $I\cap PA(k_u)=J_b\cap PA(k_u)$. Это означает, что $I=J_b$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F. Locally finite groups. Amsterdam etc.: North-Holland / American Elsevier, 1973. 210 p.

[2] Kaplansky I. Notes on ring theory. University of Chicago, 1965.

[3] Bonvallet K., Hartley B., Passman D.S., Smith M.K. Group rings with simple angmentation ideals // Proc. Amer. Math.Soc. 1976. Vol.56. P.79-82.

[4] Вершик А.М., Керов С.В. Локально-полупростые алгебры; комбинаторная теория и K_0-функтор // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1985. Т.26. С.3-56.

[5] Bratteli O. Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol.171. P.195-204.

[6] Formanen E., Lawrence J. The group algebra of the infinite symmetric group // Isr. J. Math. 1976. Vol.23, N 3-4. P.325-331.

[7] Размыслов Ю.П. Тождества со следом полных матричных алгебр над полем

характеристики 0 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т.38, N 4. С. 723-756.

[8] Вершик А.М., Керов С.В. Аналитическая теория характеров симметрической группы // Функцион. анализ и его прил. 1981. Т.15. С.15-27.

[9] Maier B. Existentiell abgeschlossene local endliche Gruppen // Arch. Math. 1981. Vol.37. P.113-128.

[10] Kerber A. Representations of permutation groups. I. Berlin etc.: Springer, 1971. 192 p.

[11] Murnaghan F. On the analysis of the Kroneker product of irreducible representations of $\mathfrak{S}_n$ // Proc.Nat.Acad.Sci. USA. 1955. Vol.41. P.515-518.

[12] Bannai E., Ito T. Algebraic combinatorics. I. Association schemes. London etc.: Benjamin, 1984. Рус. пер.: И.Баннаи, Н.Ито. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М.: Мир, 1987. 373 с.

[13] Robinson G. de B. Representation theory of the symmetric group. Edinburgh: University Press, 1961. 204 p.

[14] Curtis C.W., Reiner I. Representation theory of finite groups and associative algebras. New York; London: Wiley, 1962. Рус. пер.: Х.Кэртис, И.Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Мир, 1969. 668 с.

[15] Wielandt H. Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964.

[16] Huppert B. Endliche gruppen. I. Berlin etc., 1967. 455 p.

Институт математики АН БССР
220604, Минск, ул.Сурганова, д.11

Поступило 21 марта 1990 г.