B. G. Dragovich, Z. Rakić, Path Integrals in Noncommutative Quantum Mechanics, *TMF*, 2004, Volume 140, Number 3, 480–491

https://www.mathnet.ru/eng/tmf100

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 140, № 3
сентябрь, 2004

Б. Драгович*, З. Ракич†

КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В НЕКОММУТАТИВНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрено расширение фейнмановского интеграла по траекториям на квантовую механику с некоммутативными пространственными координатами. Предложен соответствующий формализм для некоммутативной классической динамики, связанной с квадратичными лагранжианами (гамильтонианами). В основе используемого подхода лежит то обстоятельство, что квантово-механическая система с некоммутативным конфигурационным пространством может быть рассмотрена как другая эффективная система с коммутирующими пространственными координатами. Поскольку континуальный интеграл в случае квадратичных лагранжианов вычисляется точно и существует общая формула для амплитуды вероятности, данное исследование ограничивается этим классом лагранжианов. Найдена общая связь между квадратичными лагранжианами в коммутативном и некоммутативном режимах, и представлен соответствующий некоммутативный континуальный интеграл. Для иллюстрации данного метода приводятся две квантово-механические системы на некоммутативной плоскости: частица в постоянном поле и гармонический осциллятор.

Ключевые слова: фейнмановский интеграл по траекториям, некоммутативная квантовая механика, системы с квадратичными лагранжианами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже в тридцатые годы прошлого века в поисках подхода к решению проблемы ультрафиолетовых расходимостей Гейзенберг и Шредингер высказали предположение о том, что пространственно-временные координаты могут быть взаимно некоммутативными. Однако первые работы на эту тему появились в конце сороковых годов (см., например, [1], [2]), и лишь спустя пятьдесят лет в различных квантовых теориях возник серьезный интерес к некоммутативности. В частности, в последнее время некоммутативность интенсивно изучалась в струнной/М-теории, квантовой теории поля и квантовой механике (обзор некоммутативной теории поля и некоторых родственных вопросов см., например, в [3]).

*Institute of Physics, University of Belgrade, Belgrade, Serbia and Montenegro. E-mail: dragovich@phy.bg.ac.yu

†Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Belgrade, Serbia and Montenegro. E-mail: zrakic@matf.bg.ac.yu

Бóльшая часть исследований относится к некоммутативной теории поля, включая ее некоммутативное расширение для стандартной модели [4]. Поскольку квантовая механика может рассматриваться как одночастичный нерелятивистский сектор квантовой теории поля, важно изучить ее некоммутативные аспекты, включая связь между обычными и некоммутативными режимами. Для того чтобы предложить некоторые возможные феноменологические проверки некоммутативности, в основном рассматривалась некоммутативная квантовая механика (НККМ) заряженной частицы в постоянных магнитном и электрическом полях в двумерном и трехмерном пространствах (см., например, [5] и приведенную там литературу).

Напомним, что для описания D-мерной квантово-механической системы необходимо использовать гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}^D)$. В обычной квантовой механике (ОКМ) классическим каноническим переменным x_k, p_j соответствуют эрмитовы операторы $\hat{x}_k, \hat{p}_j$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^D)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям Гейзенберга

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}, \qquad [\hat{x}_k, \hat{x}_j] = 0, \qquad [\hat{p}_k, \hat{p}_j] = 0, \quad k, j = 1, 2, \ldots, D. \tag{1}$$

В большинстве случаев в НККМ соотношения $[\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}$ сохраняются, однако предполагается некоторое выполнение соотношений $[\hat{x}_k, \hat{x}_j] \neq 0$ и $[\hat{p}_k, \hat{p}_j] \neq 0$. Здесь мы рассматриваем наиболее простую и обычную НККМ, которая основывается на следующей алгебре:

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}, \qquad [\hat{x}_k, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{kj}, \qquad [\hat{p}_k, \hat{p}_j] = 0, \tag{2}$$

где $\Theta = (\theta_{kj})$ – антисимметричная матрица с постоянными элементами.

Для того чтобы найти элементы $\Psi(x,t)$ гильбертова пространства в ОКМ, обычно используется уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \widehat{H}\Psi(x,t).$$

Однако существует другой подход, основанный на фейнмановском методе интегрирования по траекториям [6]

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \int_{(x')}^{(x'')} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right)\mathcal{D}q, \tag{3}$$

где $\mathcal{K}(x'', t''; x', t')$ – ядро унитарного оператора эволюции $U(t)$, действующего на функции $\Psi(x,t)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^D)$. Функционал

$$S[q] = \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, q, t)\, dt$$

есть действие на траектории $q(t)$ для классического лагранжиана $L(\dot{q}, q, t)$, а $x'' = q(t'')$, $x' = q(t')$ – конечная и начальная точки. Величина $\mathcal{K}(x'', t''; x', t')$ известна также как амплитуда вероятности перехода квантовой частицы из точки x' в момент времени t' в другую точку x'' в момент времени t'' и тесно связана с квантово-механическим пропагатором и функцией Грина. Наглядный смысл интеграла в формуле (3) заключается в том, что квантово-механическая частица может распространяться из точки x' в точку x'' по бесконечному множеству соединяющих эти две точки траекторий и необходимо суммировать амплитуды вероятности по всем этим траекториям. Таким образом, фейнмановский интеграл по траекториям предполагает континуальное (функциональное) суммирование отдельно взятых амплитуд перехода $\exp((i/\hbar)S[q])$ по всем возможным непрерывным траекториям, связывающим точки $x' = q(t')$ и $x'' = q(t'')$.

Континуальный интеграл, в его наиболее общей формулировке, включает интегрирование по траекториям в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2D} = \{(p,q)\}$ с фиксированными крайними точками x' и x'' и без ограничений на начальные и конечные значения импульсов, т.е.

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \int_{(x')}^{(x'')} \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\int_{t'}^{t''} [p_k \dot{q}_k - H(p,q,t)]\,dt\right)\mathcal{D}q\,\mathcal{D}p. \tag{4}$$

Однако для гамильтонианов, которые являются квадратичными по импульсам p_k полиномами, можно, используя гауссовы интегралы, осуществить в явном виде интегрирование по переменным $-\infty < p_k < +\infty$, и соответствующий континуальный интеграл сведется к виду (3) (см. приложение).

Для квадратичных лагранжианов фейнмановский интеграл по траекториям может быть вычислен аналитически (см., например, книгу [7] и статью [8]), и точное выражение для амплитуды вероятности имеет вид

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \frac{1}{(ih)^{D/2}}\sqrt{\det\left(-\frac{\partial^2 \overline{S}}{\partial x''_k\,\partial x'_j}\right)}\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\overline{S}(x'',t'';x',t')\right), \tag{5}$$

где $\overline{S}(x'',t'';x',t')$ – действие для классической траектории. Величина $\mathcal{K}(x'',t'';x',t')$ может быть определена уравнением

$$\Psi(x'',t'') = \int \mathcal{K}(x'',t'';x',t')\Psi(x',t')\,dx', \tag{6}$$

и фейнмановский интеграл по траекториям можно рассматривать как метод ее вычисления.

Помимо своего фундаментального значения в общем формализме квантовой теории, метод континуального интеграла является подходящим инструментом вычисления квантовых фаз. С этой целью он отчасти рассматривался в некоммутативной плоскости для эффекта Ааронова–Бома [9]–[11] и для квантовой системы во вращающейся системе координат [12]. Наш подход включает в себя эти и всевозможные другие системы с квадратичными лагранжианами (гамильтонианами) (относительно трех других подходов к фейнмановскому континуальному интегралу в НККМ см. [13]–[15]). Трудность при непосредственном обобщении обычного континуального интеграла на случай НККМ вызвана наличием неопределенности координат x' и x'' начального и конечного положений. Эти координаты не могут быть строго фиксированы, поскольку $\Delta x'_k \Delta x'_j \geqslant \hbar\theta_{kj}/2$ и $\Delta x''_k \Delta x''_j \geqslant \hbar\theta_{kj}/2$ в силу коммутационных соотношений (2).

В разделе 2 мы начнем с квадратичного лагранжиана, который связан с ОКМ, и найдем соответствующий квадратичный гамильтониан. Затем мы введем квантовый гамильтониан с некоммутирующими пространственными координатами и преобразуем его в эффективный гамильтониан, соответствующие координаты которого коммутируют. С этой целью заметим, что алгебра (2) операторов $\hat{x}_k$, $\hat{p}_j$ может быть заменена эквивалентной алгеброй

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}, \qquad [\hat{q}_k, \hat{q}_j] = 0, \qquad [\hat{p}_k, \hat{p}_j] = 0 \tag{7}$$

с помощью линейного преобразования

$$\hat{x}_k = \hat{q}_k - \frac{\theta_{kj}\hat{p}_j}{2}, \tag{8}$$

причем импульсы $\hat{p}_k$ не претерпевают изменений, а по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование. Благодаря преобразованию (8) НККМ, отвечающая классическому фазовому пространству с точками (p, x), может рассматриваться как ОКМ на другом фазовом пространстве (p, q). Таким образом, в q-представлении $\hat{p}_k = -i\hbar(\partial/\partial q_k)$ в формулах (7) и (8). Альтернативный способ нахождения коммутативного аналога квантово-механической системы на некоммутативном пространстве состоит в использовании $*$-произведения Мойала [2] в уравнении Шредингера. Такое рассмотрение эквивалентно замене потенциала $V(\hat{x})$ с использованием преобразования (8) [16]. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением лагранжианов, квадратичных по переменным q и $\dot{q}$. Переходя от нового гамильтониана к лагранжиану, мы найдем эффективный лагранжиан, относящийся к системе с некоммутирующими пространственными координатами. В разделе 3 мы дадим общую формулу для континуального интеграла, выраженную в терминах классического действия для некоммутативных квадратичных лагранжианов. В разделе 4 содержатся выводы и краткое обсуждение результатов. В приложении показан переход от континуального интеграла в фазовом пространстве к обычному фейнмановскому интегралу в координатном пространстве для квадратичных гамильтонианов в общем случае.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НА НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Начнем с рассмотрения классической системы, описываемой квадратичным лагранжианом, наиболее общий вид которого в трехмерном пространстве есть

$$L(\dot{x}, x, t) = \langle\alpha\dot{x}, \dot{x}\rangle + \langle\beta x, \dot{x}\rangle + \langle\gamma x, x\rangle + \langle\delta, \dot{x}\rangle + \langle\eta, x\rangle + \phi, \tag{9}$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначает обычное скалярное произведение. Элементы матриц

$$\alpha = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\alpha_{ij}(t)\right), \qquad \beta = (\beta_{ij}), \qquad \gamma = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\gamma_{ij}(t)\right),$$

векторов $\delta = (\delta_i(t))$, $\eta = (\eta_i(t))$ и скаляр $\phi = (\phi(t))$ могут быть некоторыми аналитическими функциями от времени t. Матрица α является невырожденной ($\det\alpha \neq 0$). Используя соотношения $p_j = \partial L/\partial\dot{x}_j$, $j = 1, 2, 3$, запишем $\dot{x}$ в виде $\dot{x} = \alpha^{-1}(p - \beta x - \delta)/2$.

Тогда соответствующий классический гамильтониан $H(p,x,t) = \langle p, \dot{x}\rangle - L(\dot{x},x,t)$ становится также квадратичным, т.е.

$$H(p,x,t) = \langle Ap,p\rangle + \langle Bx,p\rangle + \langle Cx,x\rangle + \langle D,p\rangle + \langle E,x\rangle + F, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} &A = \frac{1}{4}\alpha^{-1}, \qquad B = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}\beta, \qquad C = \frac{1}{4}\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta - \gamma, \\ &D = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}\delta, \quad E = \frac{1}{2}\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\delta - \eta, \quad F = \frac{1}{4}\delta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\delta - \phi, \end{aligned} \tag{11}$$

индекс T обозначает операцию транспонирования. Заметим, что матрицы A и C симметричны ($A^{\mathrm{T}} = A$ и $C^{\mathrm{T}} = C$), так как симметричны α и γ. Поскольку лагранжиан $L(\dot{x},x,t)$ невырожден ($\det\alpha \neq 0$), то и гамильтониан $H(p,x,t)$ также невырожден ($\det A \neq 0$). Из (11) следует, что обратное отображение дается теми же соотношениями.

В случае некоммутативных пространственных координат $[\hat{x}_k, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{kj}$, их можно заменить, используя преобразование (8). Нетрудно проверить, что $\hat{q}_i$, $i = 1,2,3$, суть взаимно коммутирующие операторы (но не коммутирующие с операторами импульсов, т.е. $[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}$).

Проквантовав невырожденный квадратичный гамильтониан (10) и использовав замену координат (8), мы снова получаем квадратичный квантовый гамильтониан

$$H_\theta(\hat{p},\hat{q},t) = \langle A_\theta\hat{p},\hat{p}\rangle + \langle B_\theta\hat{q},\hat{p}\rangle + \langle C_\theta\hat{q},\hat{q}\rangle + \langle D_\theta,\hat{p}\rangle + \langle E_\theta,\hat{q}\rangle + F_\theta, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &A_\theta = \left(A - \frac{1}{4}B\Theta + \frac{1}{4}\Theta B^{\mathrm{T}} - \frac{1}{4}\Theta C\Theta\right), \qquad B_\theta = B + \Theta C, \\ &C_\theta = C, \qquad D_\theta = D + \frac{1}{2}\Theta E, \qquad E_\theta = E, \qquad F_\theta = F. \end{aligned} \tag{13}$$

Для достаточно малых θ_{kj} этот гамильтониан также невырожден.

Чтобы вычислять континуальные интегралы для вышеупомянутых систем, необходимы классические лагранжианы. Ясно, что произвольному квадратичному квантовому гамильтониану можно сопоставить классический гамильтониан, заменив операторы на соответствующие классические переменные. Затем, используя уравнения $\dot{q}_k = \partial H_\theta/\partial p_k$, $k = 1,2,3$, можно перейти от такого гамильтониана обратно к соответствующему лагранжиану

$$L_\theta(\dot{q},q,t) = \langle p,\dot{q}\rangle - H_\theta(p,q,t), \tag{14}$$

где в правой части сделана замена $p = A_\theta^{-1}(\dot{q} - B_\theta q - D_\theta)/2$. В сущности, наша идея заключается в том, чтобы найти связь между лагранжианами некоммутативных и соответствующих коммутативных квантово-механических систем (с $\theta = 0$). Это означает, что нужно найти композицию следующих трех отображений: $L_\theta = (\varphi\circ\psi\circ\varphi)(L)$, где

$L_\theta = \varphi(H_\theta)$, $H_\theta = \psi(H)$ и $H = \varphi(L)$ (здесь используется тот факт, что φ есть инволютивное отображение, заданное формулами (11), а ψ задается формулами (13)). Более точно, если лагранжиан $L(\dot{x}, x, t)$ задан формулой (9) и

$$L_\theta(\dot{q}, q, t) = \langle \alpha_\theta \dot{q}, \dot{q} \rangle + \langle \beta_\theta q, \dot{q} \rangle + \langle \gamma_\theta q, q \rangle + \langle \delta_\theta, \dot{q} \rangle + \langle \eta_\theta, q \rangle + \phi_\theta,$$

то соотношения между коэффициентами лагранжианов имеют вид

$$\begin{aligned}
\alpha_\theta &= \left[\alpha^{-1} - \frac{1}{2}\left(\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1} - \alpha^{-1}\beta\Theta\right) + \Theta\gamma\Theta - \frac{1}{4}\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta\Theta\right]^{-1}, \\
\beta_\theta &= \alpha_\theta\left(\alpha^{-1}\beta - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta + 2\Theta\gamma\right), \\
\gamma_\theta &= \frac{1}{4}\left(\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1} + \frac{1}{2}\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta\Theta - 2\gamma\Theta\right)\alpha_\theta\left(\alpha^{-1}\beta - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta + 2\Theta\gamma\right) - \\
&\quad - \frac{1}{4}\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta + \gamma, \\
\delta_\theta &= \alpha_\theta\left(\alpha^{-1}\delta - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\delta + \Theta\eta\right), \\
\eta_\theta &= \frac{1}{2}\left(\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1} + \frac{1}{2}\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\beta\Theta - 2\gamma\Theta\right)\alpha_\theta\left(\alpha^{-1}\delta - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\delta + \Theta\eta\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\delta + \eta, \\
\phi_\theta &= \frac{1}{4}\left\langle \delta_\theta, \alpha^{-1}\delta - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\delta + \Theta\eta\right\rangle - \frac{1}{4}\langle \alpha^{-1}\delta, \delta\rangle + \phi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ясно, что эти формулы весьма сложны и что нахождение явных точных соотношений между элементами матриц в общем случае представляет собой очень трудную задачу. Однако соотношения (15) весьма полезны во всех частных случаях. К вышеупомянутым классическим аналогам квадратичных гамильтонианов и лагранжианов может быть применена обычная техника классической механики.

3. НЕКОММУТАТИВНЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Хотя результаты предыдущего раздела были получены для трехмерного пространства, они справедливы для пространства произвольной размерности D. Если известен лагранжиан (9) и алгебра (2), то можно получить соответствующий эффективный лагранжиан, пригодный для квантования посредством континуального интеграла в НККМ. Используя уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\theta}{\partial \dot{q}_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, D,$$

можно получить классическую траекторию $q_k = q_k(t)$, соединяющую заданные начальную $x' = q(t')$ и конечную $x'' = q(t'')$ точки. Для этой классической траектории можно вычислить действие

$$\overline{S}_\theta(x'', t''; x', t') = \int_{t'}^{t''} L_\theta(\dot{q}, q, t)\, dt.$$

Континуальный интеграл в НККМ является прямым аналогом величины (5) и получается с помощью замены

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') \to \mathcal{K}_\theta(x'',t'';x',t'), \qquad \overline{S}(x'',t'';x',t') \to \overline{S}_\theta(x'',t'';x',t').$$

Приведем здесь два примера для случая $D = 2$.

3.1. Частица в постоянном поле. Лагранжиан на коммутативном конфигурационном пространстве имеет вид

$$L(\dot{x},x) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \eta_1 x_1 - \eta_2 x_2. \tag{16}$$

Соответствующие данные суть $\alpha = (m/2)I$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\eta^{\mathrm{T}} = (-\eta_1, -\eta_2)$, $\phi = 0$, где I – единичная (2×2)-матрица. Используя общие формулы (15), легко находим

$$\alpha_\theta = \frac{m}{2}I, \qquad \beta_\theta = 0, \qquad \gamma_\theta = 0, \qquad \delta_\theta^{\mathrm{T}} = \frac{m\theta}{2}(-\eta_2,\eta_1), \qquad \eta_\theta = \eta, \qquad \phi_\theta = \frac{m\theta^2}{8}(\eta_1^2+\eta_2^2).$$

Лагранжиан $L_\theta(\dot{q},q,t)$ имеет вид

$$L_\theta = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{m\theta}{2}(\eta_1\dot{q}_2 - \eta_2\dot{q}_1) - \eta_1 q_1 - \eta_2 q_2 + \frac{m\theta^2}{8}(\eta_1^2 + \eta_2^2).$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа $m\ddot{q}_1 = -\eta_1, m\ddot{q}_2 = -\eta_2$ дают решения

$$q_1(t) = -\frac{\eta_1 t^2}{2m} + tC_2 + C_1, \qquad q_2(t) = -\frac{\eta_2 t^2}{2m} + tD_2 + D_1,$$

где C_1, C_2, D_1 и D_2 – константы, которые должны быть определены из условий $q_1(0) = x_1'$, $q_1(T) = x_1''$, $q_2(0) = x_2'$, $q_2(T) = x_2''$. После нахождения соответствующих констант имеем

$$q_j(t) = x_j' - \frac{\eta_j}{2m}t^2 + t\left(\frac{1}{T}(x_j''-x_j') + \frac{\eta_j T}{2m}\right), \qquad \dot{q}_j(t) = -\frac{\eta_j}{m}t + \frac{1}{T}(x_j''-x_j') + \frac{\eta_j T}{2m}, \quad j = 1,2.$$

Классическое действие имеет вид

$$\begin{aligned}\overline{S}_\theta(x'',T;x',0) = \frac{m}{2T}[(x_1''-x_1')^2 + (x_2''-x_2')^2] - \frac{T}{2}[\eta_1(x_1''+x_1') + \eta_2(x_2''+x_2')] + \\ + \frac{m\theta}{2}[\eta_1(x_2''-x_2') - \eta_2(x_1''-x_1')] - \frac{T^3}{24m}(\eta_1^2+\eta_2^2) + \frac{m\theta^2 T}{8}(\eta_1^2+\eta_2^2).\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\theta(x'',T;x',0) = \frac{1}{ih}\frac{m}{T}\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\overline{S}_\theta(x'',T;x',0)\right) = \mathcal{K}_0(x'',T;x',0)\times \\ \times \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\frac{m\theta}{2}\left[\eta_1(x_2''-x_2') - \eta_2(x_1''-x_1') + \frac{\theta T}{4}(\eta_1^2+\eta_2^2)\right]\right),\end{aligned} \tag{17}$$

где ядро $\mathcal{K}_0(x'',T;x',0)$ связано с лагранжианом (16). Следовательно, различие заключается только в фазовом множителе. Заметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\mathcal{K}_\theta(x'',T;x',0) = \mathcal{K}_0\left(x'' + \frac{\theta T}{2}J\eta, T; x', 0\right), \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

3.2. Гармонический осциллятор. Коммутативный лагранжиан в данном случае имеет вид

$$L(\dot{x}, x) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{19}$$

и мы имеем $\alpha = (m/2)I,\ \beta = 0,\ \gamma = -(m\omega^2/2)I,\ \delta = \eta = 0,\ \phi = 0$. Используя формулы (15), легко находим

$$\alpha_\theta = \frac{m}{2\kappa}I, \qquad \beta_\theta = \frac{m^2\omega^2\theta}{2\kappa}J^{\mathrm{T}}, \qquad \gamma_\theta = -\frac{m\omega^2}{2\kappa}I, \qquad \delta_\theta = \eta_\theta = 0, \qquad \phi_\theta = 0,$$

где $\kappa = 1 + m^2\omega^2\theta^2/4$.

Соответствующий некоммутативный лагранжиан имеет вид

$$L_\theta(\dot{q}, q) = \frac{m}{2\kappa}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{m^2\omega^2\theta}{2\kappa}(\dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_1 q_2) - \frac{m\omega^2}{2\kappa}(q_1^2 + q_2^2). \tag{20}$$

Из (20) получаем уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\ddot{q}_1 - m\omega^2\theta\dot{q}_2 + \omega^2 q_1 = 0, \qquad \ddot{q}_2 + m\omega^2\theta\dot{q}_1 + \omega^2 q_2 = 0.$$

Заметим, что эти уравнения образуют связанную систему дифференциальных уравнений второго порядка, более сложную, чем в коммутативном случае ($\theta = 0$). Данную систему уравнений можно преобразовать к виду

$$q_1^{(4)} + \omega^2(2 + m^2\omega^2\theta^2)q_1^{(2)} + \omega^4 q_1 = 0, \qquad q_2^{(4)} + \omega^2(2 + m^2\omega^2\theta^2)q_2^{(2)} + \omega^4 q_2 = 0.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_1\cos(y_1 t) + C_2\sin(y_1 t) + C_3\cos(y_2 t) + C_4\sin(y_2 t), \\ q_2(t) &= D_1\cos(y_1 t) + D_2\sin(y_1 t) + D_3\cos(y_2 t) + D_4\sin(y_2 t), \end{aligned} \tag{21}$$

где $y_1 = (m\theta\omega^2 + 2\omega\sqrt{\kappa})/2,\ y_2 = (m\theta\omega^2 - 2\omega\sqrt{\kappa})/2$. Требуя выполнения дифференциальных связей между q_1 и q_2, получаем следующие соотношения между константами C и D: $D_1 = C_2,\ D_2 = -C_1,\ D_3 = C_4,\ D_4 = -C_3$. Из условий $q_1(0) = x_1',\ q_1(T) = x_1''$, $q_2(0) = x_2',\ q_2(T) = x_2''$ получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}[x_1' + x_2'\operatorname{ctg} K - (x_2''\cos\Lambda + x_1''\sin\Lambda)\operatorname{cosec} K], \\ C_2 &= \frac{1}{2}[x_2' - x_1'\operatorname{ctg} K + (x_1''\cos\Lambda - x_2''\sin\Lambda)\operatorname{cosec} K], \\ C_3 &= \frac{1}{2}[x_1' - x_2'\operatorname{ctg} K + (x_2''\cos\Lambda + x_1''\sin\Lambda)\operatorname{cosec} K], \\ C_4 &= \frac{1}{2}[x_2' + x_1'\operatorname{ctg} K - (x_1''\cos\Lambda - x_2''\sin\Lambda)\operatorname{cosec} K], \end{aligned}$$

где $\operatorname{cosec} K = 1/\sin K$ и $K = \omega\sqrt{\kappa}T,\ \Lambda = m\theta\omega^2 T/2$.

Подставляя полученную выше классическую траекторию в (20), находим

$$\begin{aligned} L_\theta(\dot q, q) = \frac{m\omega^2}{2\sin^2 K}((x_1''^2 + x_2''^2)\cos(2\omega\sqrt{\kappa}t) + (x_1'^2 + x_2'^2)\times \\ \times \cos(2\omega\sqrt{\kappa}(T-t)) - 2\cos(2\omega\sqrt{\kappa}(T-t))((x_1'x_1'' + x_2'x_2'')\times \\ \times \cos\Lambda + (x_1''x_2' - x_1'x_2'')\sin\Lambda)). \end{aligned} \tag{22}$$

Соответствующее классическое действие имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{S}_\theta(x'', T; x', 0) = \frac{m\omega}{2\sqrt{\kappa}\sin K}((x_1'^2 + x_2'^2 + x_1''^2 + x_2''^2)\cos K - \\ - 2(x_1'x_1'' + x_2'x_2'')\cos\Lambda + 2(x_1'x_2'' - x_2'x_1'')\sin\Lambda), \end{aligned} \tag{23}$$

и окончательно получаем

$$\mathcal{K}_\theta(x'', T; x', 0) = \frac{1}{ih}\frac{m\omega}{\sqrt{\kappa}|\sin K|}\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\overline{S}_\theta(x'', T; x', 0)\right). \tag{24}$$

Заметим, что в этом случае не так просто найти соотношение между ядрами для гармонических осцилляторов в коммутативном ($\theta = 0$) и некоммутативном режимах. А именно, в коммутативном случае ($\theta = 0$ и $\kappa = 1$) мы имеем

$$\overline{S}_0(x'', T; x', 0) = \frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}[(x_1'^2 + x_2'^2 + x_1''^2 + x_2''^2)\cos(\omega T) - 2(x_1'x_1'' + x_2'x_2'')]$$

и, следовательно,

$$\mathcal{K}_0(x'', T; x', 0) = \frac{1}{ih}\frac{m\omega}{|\sin(\omega T)|}\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\overline{S}_0(x'', T; x', 0)\right).$$

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Используя преобразование для некоммутирующих координат $\hat{x}_k$ в квадратичном гамильтониане, мы снова получаем квадратичный гамильтониан, но с коммутирующими пространственными координатами $\hat{q}_k$. Для того чтобы применить фейнмановский континуальный интеграл, мы вывели соответствующий эффективный квадратичный лагранжиан и связь коэффициентов (15) в некоммутативном режиме ($\theta \neq 0$) с аналогичными коэффициентами в коммутативном режиме ($\theta = 0$). Переход от гамильтониана к лагранжиану осуществляется с помощью обычной формулы (14). Напомним, что этот переход может быть также осуществлен в результате интегрирования по импульсам в фазовом пространстве континуального интеграла (см. приложение и работу [12]). Поскольку наш лагранжиан $L_\theta(\dot q, q, t)$ квадратичный, можно использовать общее аналитическое выражение для фейнмановского континуального интеграла (5). Амплитуды вероятности на некоммутативной плоскости вычисляются для частицы в постоянном поле (17) и гармонического осциллятора (24).

Отметим, что алгебра НККМ вида

$$[\hat{x}_a, \hat{p}_b] = i\hbar\left(\delta_{ab} - \frac{1}{4}\theta_{ac}\sigma_{cb}\right), \qquad [\hat{x}_a, \hat{x}_b] = i\hbar\theta_{ab}, \qquad [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = i\hbar\sigma_{ab} \tag{25}$$

с помощью линейного преобразования

$$\hat{x}_a = \hat{q}_a - \frac{\theta_{ab}\hat{k}_b}{2}, \qquad \hat{p}_a = \hat{k}_a + \frac{\sigma_{ab}\hat{q}_b}{2} \tag{26}$$

также может быть сведена к обычной алгебре Гейзенберга (1) для операторов $\hat{q}_a$, $\hat{k}_b$. В двумерном случае мы имеем $\theta_{ac}\sigma_{cb} = -\theta\sigma\delta_{ab}$, и это дает $[\hat{x}_a, \hat{p}_b] = i\hbar(1 + \theta\sigma/4)\delta_{ab}$ (см. также [17]). Для некоммутативного фазового пространства (25) и квадратичных лагранжианов можно осуществить процедуру, аналогичную описанной в предыдущих разделах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Континуальный интеграл на фазовом пространстве для квадратичных гамильтонианов

Покажем, что континуальный интеграл на фазовом пространстве может быть сведен к континуальному интегралу на конфигурационном пространстве в том случае, когда гамильтониан $H(p,q,t)$ является произвольным квадратичным полиномом по импульсам p. Начнем с континуального интеграла (4), в котором гамильтониан $H(p,q,t)$ задается выражением (10) или (12).

Разобьем временной интервал $t'' - t'$ на равные промежутки $\epsilon = (t'' - t')/(N+1)$ и $t_n = t' + n\epsilon$, $n = 0, 1, \ldots, N+1$. Пусть $q(t_n)^{\mathrm{T}} = q_n^{\mathrm{T}} = (q_{n,1}, q_{n,2}, \ldots, q_{n,D})$ и $p(t_n)^{\mathrm{T}} = p_n^{\mathrm{T}} = (p_{n,1}, p_{n,2}, \ldots, p_{n,D})$ суть координаты и импульсы в момент времени t_n. Можно записать

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{DN}} \int_{\mathbb{R}^{D(N+1)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S_N\right) \prod_{n=1}^{N} d^D q_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d^D p_n}{h^D}, \tag{П.1}$$

где

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=1}^{N+1} (\langle p_n, q_n - q_{n-1}\rangle - \epsilon(\langle A_n p_n, p_n\rangle + \langle B_n q_n, p_n\rangle + \\ + \langle C_n q_n, q_n\rangle + \langle D_n, p_n\rangle + \langle E_n, q_n\rangle + F_n)), \end{aligned} \tag{П.2}$$

A_n, B_n, C_n, D_n, E_n и F_n – соответствующие матрицы ($\det A_n \neq 0$) и векторы, элементы которых взяты в момент времени $t = t_n$. Используя гауссов интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^D} \exp\left(\frac{2\pi i}{h}[\langle ux, x\rangle + \langle v, x\rangle]\right) d^D x = \\ = \frac{1}{\sqrt{(i/h)^D \det(-2u)}} \exp\left(\frac{-2\pi i}{4h}\langle u^{-1}v, v\rangle\right), \end{aligned} \tag{П.3}$$

в котором u – невырожденная симметричная $(D \times D)$-матрица, а v – D-мерный вектор, можно осуществить интегрирование по импульсам и получить

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{DN}}\prod_{n=1}^{N}\frac{d^D q_n}{\sqrt{(ih)^D\det(2\epsilon A_n)}}\times$$
$$\times\exp\biggl(\frac{2\pi i\epsilon}{4h}[\langle A_n^{-1}B_n q_n, B_n q_n\rangle - \langle A_n^{-1}\dot q_n, B_n q_n\rangle - \langle A_n^{-1}B_n q_n,\dot q_n\rangle +$$
$$+\langle A_n^{-1}\dot q_n,\dot q_n\rangle - 2\langle A_n^{-1}D_n,\dot q_n\rangle + 2\langle A_n^{-1}D_n, B_n q_n\rangle + \langle A_n^{-1}D_n, D_n\rangle -$$
$$-4\langle C_n q_n, q_n\rangle - 4\langle E_n, q_n\rangle - 4F_n]\biggr). \tag{П.4}$$

Переписывая это выражение в виде

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{DN}}\prod_{n=1}^{N+1}\sqrt{\left(\frac{2}{ih\epsilon}\right)^D\det\alpha_n}\times$$
$$\times\exp\biggl(\frac{2\pi i\epsilon}{h}[\langle\alpha_n\dot q_n,\dot q_n\rangle + \langle\beta_n q_n,\dot q_n\rangle + \langle\gamma_n q_n, q_n\rangle +$$
$$+\langle\delta_n,\dot q_n\rangle + \langle\eta_n, q_n\rangle + \phi_n]\biggr)\prod_{n=1}^{N} d^D q_n \tag{П.5}$$

и сравнивая полученное выражение с исходным, имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{4}A_n^{-1}, & \beta_n &= -\frac{1}{2}A_n^{-1}B_n,\\
\gamma_n &= \frac{1}{4}B_n^{\mathrm T}A_n^{-1}B_n - C_n, & \delta_n &= -\frac{1}{2}A_n^{-1}D_n,\\
\eta_n &= \frac{1}{2}B_n^{\mathrm T}A_n^{-1}D_n - E_n, & \phi_n &= \frac{1}{4}D_n^{\mathrm T}A_n^{-1}D_n - F_n.
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Отметим, что приведенные выше формулы – такие же, как формулы (11), полученные другим способом.

Теперь переходя к пределу $N\to\infty$, можно переписать (П.5) в виде (3),

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \int\exp\biggl(\frac{2\pi i}{h}\int_{t'}^{t''}L(\dot q,q,t)\,dt\biggr)\mathcal{D}q, \tag{П.7}$$

где лагранжиан $L(\dot q,q,t)$ имеет вид (9) и

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}q &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}d\tilde q_n,\\
d\tilde q_n &= \left(\left(\frac{2}{ih\epsilon}\right)^D\det\alpha(t'')\right)^{1/N}\sqrt{\left(\frac{2}{ih\epsilon}\right)^D\det\alpha_n}\,dq_n.
\end{aligned} \tag{П.8}$$

Аналитическое вычисление континуального интеграла (П.7) дает (5) (см., например, [7], [8]).

Благодарности. Данная работа была завершена в период пребывания Б. Драговича в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН. Эта работа была частично поддержана Serbian Ministry of Science, Technologies and Development (контракты № 1426 и № 1646). Работа Б. Драговича была также частично поддержана РФФИ (грант № 02-01-01084).

Список литературы

[1] *H. S. Snyder*. Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.
[2] *J. M. Moyal*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1949. V. 45. P. 99.
[3] *M. R. Douglas, N. A. Nekrasov*. Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 977.
[4] *P. Aschieri, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess*. Nucl. Phys. B. 2003. V. 651. P. 45; hep-th/0205214.
[5] *S. Bellucci*. Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 105014; hep-th/0301227.
[6] *R. P. Feynman, A. R. Hibbs*. Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill, 1965.
[7] *C. Grosche, F. Steiner*. Handbook of Feynman Path Integrals. Berlin: Springer, 1998.
[8] *C. C. Grosjean*. J. Comput. Appl. Math. 1988. V. 23. P. 199.
[9] *M. Chaichian, A. Demichev, P. Prešnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu*. Phys. Lett. B. 2002. V. 527. P. 149; hep-th/0012175.
[10] *M. Chaichian, A. Demichev, P. Prešnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu*. Nucl. Phys. B. 2001. V. 611. P. 383; hep-th/0101209.
[11] *O. F. Dayi, A. Jellal*. J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 4592; Erratum. 2004. V. 45. P. 827; hep-th/0111267.
[12] *H. R. Christiansen, F. A. Schaposnik*. Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 086005; hep-th/0106181.
[13] *G. Mangano*. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2584; gr-qc/9705040.
[14] *C. Acatrinei*. JHEP. 2001. V. 0109. P. 007; hep-th/0107078.
[15] *A. Smailagic, E. Spallucci*. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. L467.
[16] *L. Mezincescu*. Star operation in quantum mechanics. hep-th/0007046.
[17] *M. Demetrian, D. Kochan*. Acta Phys. Slovaca. 2002. V. 52. № 1. P. 1; hep-th/0102050.

Поступила в редакцию 5.XI.2003 г.,
после доработки 12.I.2004 г.