Д. А. Лейтес, А. Н. Сергеев, Ортогональные многочлены дискретной переменной и алгебры Ли матриц комплексного порядка, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 205–236

DOI: 10.4213/tmf599

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 123, № 2
май, 2000

 Д. А. Лейтес*, А. Н. Сергеев†

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И АЛГЕБРЫ ЛИ МАТРИЦ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

Предлагается единая интерпретация классических непрерывных многочленов Чебышева и ортогональных многочленов Хана дискретной переменной в терминах фейгиновской алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. q-Многочлены Чебышева и Хана можно интерпретировать подобным же образом и ввести ортогональные многочлены, соответствующие супералгебрам Ли. Кроме того, описаны квазиконечные модули над алгеброй $\mathfrak{gl}(\lambda)$, вещественная форма этой алгебры и условия унитарности квазиконечных модулей. Вводится также аналог тензоров над $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа представляет собой доклад памяти Миши Савельева. Работа состоит из трех частей: описание ортогональных многочленов (разделы 1, 8, 9), описание производящей функции следа и ее аналогов (раздел 2) и описание квазиконечных модулей над алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ (разделы 3–7).

Уравнение вида

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{1.1}$$

где $\sigma(x)$ – многочлен степени 2, $\tau(x)$ – многочлен степени 1, а λ – константа, называется *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения называются функциями *гипергеометрического типа*. Умножая уравнение (1.1) на подходящую функцию $\rho(x)$, его можно привести к самосопряженному виду

$$\big(\sigma(x)\rho(x)y'\big)' + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad \text{где } \big(\sigma(x)\rho(x)\big)' = \tau(x)\rho(x). \tag{1.2}$$

Пусть y_m и y_n – решения уравнения (1.2), которым соответствуют различные собственные значения λ_m и λ_n. Если для некоторых, не обязательно конечных, чисел a и b функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma(x)\rho(x)x^k\big|_{x=a,b} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots,$$

*Department of Mathematics, University of Stockholm, Stockholm, Sweden.
E-mail: mleites@matematik.su.se
†Балаковский университет техники, технологии и контроля, Балаково, Саратовская обл., Россия

то

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)\,dx = 0. \tag{1.3}$$

(Очевидно, если a и b конечны, достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие $\sigma(x)\rho(x)\big|_{x=a,b} = 0$.)

Примером функции гипергеометрического типа являются *многочлены Якоби* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, определенные при $\alpha, \beta > -1$ как полиномиальные решения уравнения (1.2) для $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\rho = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $(a,b) = (-1,1)$ и $\tau = \beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x$. При $\alpha = \beta = 0$ многочлены Якоби называются многочленами *Чебышева*.

Разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1.1) на однородной решетке, очевидно, имеет вид

$$\sigma(x)\frac{1}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \\ + \frac{\tau(x)}{2}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} + \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \lambda y = 0. \tag{1.4}$$

Положим $h = 1$ и $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Тогда разностное уравнение (1.4) принимает вид

$$\Delta\big(\sigma(x)\rho(x)\nabla y\big) + \lambda\rho(x)y = 0, \quad \text{где} \quad \Delta\big(\sigma(x)\rho(x)\big) = \tau(x)\rho(x). \tag{1.5}$$

Соотношения ортогональности

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i)y_n(x_i)\rho(x_i) = 0 \tag{1.6}$$

выполняются, если функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma(x)\rho(x)x^k\big|_{x=a,b} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots .$$

Многочлен Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N)$ представляет собой полиномиальное решение уравнения (1.5), определенное при $\alpha, \beta > -1$ для $\sigma(x) = x(N+\alpha-x)$,

$$\rho = \frac{\Gamma(N+\alpha-x)\,\Gamma(\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(Nx)},$$

$(a,b) = (0,N)$ и $\tau = (\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x$. Как было отмечено в работе [1], многочлены Хана были в действительности известны и Чебышеву и изучались им; Хан переоткрыл их и их q-аналоги.

Многочлен Чебышева $t_n(x,N)$ представляет собой полиномиальное решение уравнения (1.5), определенное при $\alpha = \beta = 0$, $\sigma(x) = x(N-x)$, $\rho = 1$, $(a,b) = (0,N)$ и $\tau = N - 1 - 2x$.

Обычный способ получения q-аналогов этих многочленов заключается в рассмотрении неоднородных разбиений отрезка $[a,b]$ [2]. Другой способ состоит в применении нашего подхода к алгебре $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ вместо алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$, которая рассматривается в данной работе.

До настоящего времени предполагалось, что стандартные внутренние произведения (1.3) и (1.6) положительно определены. Хотя N, число узлов при однородном разбиении отрезка (a,b), является целым, в выражениях для многочленов $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N)$ и $t_n(x,N)$ его можно заменить любым комплексным числом, поскольку эти многочлены зависят от N аналитически. Было замечено [2], что для чисто мнимых N имеется мера, приводящая к положительно-определенному произведению типа (1.3). Были открыты также многочисленные тождества, которым удовлетворяют ортогональные многочлены; полнота списка этих тождеств никогда не обсуждалась.

Дадим резюме полученных в данной работе результатов. Мы обнаружили, что определение непрерывных многочленов Чебышева и ортогональных многочленов Хана дискретной переменной (и их вариантов для неоднородных решеток, или в современной терминологии q-аналогов), а также все тождества, которым они удовлетворяют, следуют из свойств элементов Казимира алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ матриц комплексного порядка (и ее q-аналога). Отправной точкой нашего подхода была попытка вычислить в явном виде значение квадратичного оператора Казимира на квазиконечных $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модулях, являющееся источником ортогональных соотношений и различных тождеств, которым удовлетворяют вышеупомянутые многочлены. Более подробное описание квазиконечных модулей уровня 1 можно найти в работе [3].

Пусть число $\lambda = n > 0$ целое. Инвариантный функционал (след) на алгебре $\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n)$ порождает невырожденную билинейную форму $(A,B) = \operatorname{tr} AB$. Однородные компоненты $\mathfrak{G}_i$, где $\mathfrak{G}_i$ – пространство матриц с носителем на i-й наддиагонали (при $i > 0$) или поддиагонали (при $i < 0$), ортогональны относительно этой формы, и форма являетя невырожденной на $\mathfrak{G}_{-i} \oplus \mathfrak{G}_i$ и на $\mathfrak{G}_0$. Приведение билинейной формы к каноническому виду на таких пространствах дает классические многочлены дискретной переменной Хана и Чебышева соответственно. Выражая элементы Казимира (генераторы центра алгебры $U(\mathfrak{G})$) в терминах таких многочленов в стандартном базисе, получаем все тождества, которым эти многочлены удовлетворяют. Более точно, мы выражаем элементы как пространства $\mathfrak{G}_0$, так и пространства $\mathfrak{G}_{-i} \oplus \mathfrak{G}_i$ в терминах многочленов от одной переменной H. Детали приводятся в основном тексте статьи, здесь же мы только очертим идею.

Рассмотрим базис

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в алгебре $\mathfrak{sl}(2)$ с коммутационными соотношениями

$$[X,Y] = H, \quad [H,Y] = -2Y, \qquad [H,X] = 2X. \tag{1.7}$$

Рассмотрим *главное* вложение алебры $\mathfrak{sl}(2)$ в алгебру $\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n)$ (это вложение соответствует n-мерному неприводимому $\mathfrak{sl}(2)$-модулю):

$$Y \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}, \qquad H \mapsto \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1) E_{ii}, \qquad X \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) E_{i,i+1}.$$

Тогда $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{|i|\leqslant n-1} \mathfrak{G}_i,$$

где $\mathfrak{G}_i = \{X^i\mathfrak{G}_0\}$ и $\mathfrak{G}_{-i} = \{\mathfrak{G}_0 Y^i\}$ при $i > 0$, а $\mathfrak{G}_0 = \mathbb{C}[H]/\big(P_n(H)\big)$ – подалгебра Картана; здесь

$$P_n(H) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} (H - n + 2i - 1).$$

Применяя данный подход к алгебре $\mathfrak{gl}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, мы проясняем известные результаты относительно так называемых *непрерывных* вариантов классических многочленов дискретной переменной Хана и Чебышева (см. работы [2, 4]), относящиеся к чисто мнимым значениям $N = \lambda$, и получаем некоторые новые результаты. Таким образом, мы начинаем с объяснения того, что такое алгебра Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$, введенная в работе [5].

Квадратичный оператор Казимира алгебры $\mathfrak{sl}(2)$

$$\Omega = 2YX + \frac{1}{2}H^2 + H \tag{1.8}$$

лежит в центре алгебры $U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$. Пусть I_λ – двусторонний идеал в ассоциативной алгебре $U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$, порожденной элементом $\Omega - (\lambda^2-1)/2$. Оказывается, что ассоциативная алгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}_\lambda = U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)/I_\lambda$ проста при $\lambda \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, в остальных случаях $\widetilde{\mathfrak{A}}_\lambda$ содержит идеал такой, что фактор по нему изоморфен матричной алгебре $\mathrm{Mat}\big(|\lambda|\big)$. Положим [6]

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{cases} \widetilde{\mathfrak{A}}_\lambda & \text{при } \ \lambda \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ \mathrm{Mat}\big(|\lambda|\big) & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Ассоциативная алгебра с единицей $\mathfrak{A}_\lambda$ порождается элементами X, Y и H, удовлетворяющими соотношениям (1.7), а также соотношению

$$XY = \frac{1}{4}\big(\lambda^2 - (H-1)^2\big) \tag{1.10}$$

и еще одному соотношению при целых λ

$$X^{|\lambda|} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{1.11}$$

В дальнейшем полагаем $\mathfrak{gl}(\lambda) := L(\mathfrak{A}_\lambda)$, что дает алгебру Ли, получаемую из ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}_\lambda$, при замене произведения, обозначаемого точкой, на произведение, обозначаемое скобками.

Если в соотношении (1.9) заменить $U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$ на ее q-деформацию $U_q\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$, мы получим q-варианты классических многочленов, тождеств и т.д. Соответствующие подробности будут опубликованы отдельно.

Классики рассматривали ортогональные многочлены относительно знакоопределенного скалярного произведения, задаваемого мерой или соответствующей суммой для разностных уравнений. В традиционных подходах существование такой меры для комплексных значений некоторых параметров неочевидно [2, 4, 7]. В нашем подходе явно видно, что мера существует при любых $\lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и при чисто мнимых λ (см. ниже формулу (9.2)). Видно, что формула (9.2) является знакоопределенной при вещественных λ таких, что $0 < |\lambda| < 1$.

Поскольку в точке общего положения скалярное произведение не знакоопределено, естественно также рассматривать и такие скалярные произведения. Более того, если заменить в приведенной выше конструкции алгебру $\mathfrak{sl}(2)$ супералгеброй Ли $\mathfrak{g}$, мы никогда не получим знакоопределеное скалярное произведение на супералгебре Картана. Незнакоопределенные (но невырожденные и симметричные) скалярные произведения рассматривались в литературе. Соответствующие ортогональные многочлены удовлетворяют дифференциальным уравнениям порядка, большего чем 2 [8–10] (мы благодарны Т. Я. Азизову, указавшему нам на эти работы). Подобные уравнения, вероятно, описывают что-то, имеющее отношение к действительности. Васильев в работе [11] показал возможную область применимости этих уравнений. Тем не менее физики предпочитают уравнения второго порядка, поскольку они описывают большинство реальных процессов.

В известных нам попытках обобщить классические непрерывные многочлены дискретной переменной на случай нескольких переменных в действительности рассматривается представление прямой суммы нескольких копий алгебры $\mathfrak{A}_\lambda$ (см. (1.9)) в тензорном произведении модулей Верма над $\mathfrak{sl}(2)$. Это ведет к суммам произведений многочленов от одной переменной, т.е. к несколько более сложным многочленам, но все же многочленам от одной переменной.

Наш подход приводит к многочленам гораздо более сложной структуры, а именно мы предлагаем в описанном выше подходе заменить алгебру $\mathfrak{sl}(2)$ на любую алгебру Ли или супералгебру Ли $\mathfrak{g}$. Это удается сделать при условии, что $\mathfrak{g}$ обладает, во-первых, модулями Верма с большим, но конечным числом генераторов и, во-вторых, несколькими конечномерными представлениями. По-видимому, теория является наиболее богатой, если алгебра $\mathfrak{g}$ простая или близкая к простой (нетривиальное центральное расширение, производная алгебра и т.д.). Такие обобщения алгебр $\mathfrak{gl}(\lambda)$ появляются в моделях спина большего 2 и в модели Калоджеро–Сазерленда [11]. Результаты, полученные таким способом, будут рассмотрены в отдельной работе. В заключение отметим, что недавно один из авторов (А. С.) нашел, как охватить все классические многочлены дискретной переменной, а не только многочлены Чебышева и Хана, способом, несколько более общим, чем описанный в данной работе.

2. ФОРМУЛА СЛЕДА

Лемма 2.1. *Пусть A – ассоциативная алгебра, порождаемая алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемой как подпространство, т.е. A – фактор алгебры $U(\mathfrak{g})$. Тогда $[A, A] = [\mathfrak{g}, A]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $[x_1 \dots x_n, a] \in [\mathfrak{g}, A]$ для любых $a \in A$ и $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Воспользуемся тождеством $[ab, c] = [a, bc] + [b, ca]$, имеющим место в любой ассоциативной алгебре (см. работу [12]). Тогда

$$\big[x_1(x_2 \dots x_n), a\big] = [x_1, x_2 \dots x_n a] \pm [x_2 \dots x_n, a x_1].$$

По предположению индукции второе слагаемое в правой части лежит в $[\mathfrak{g}, A]$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– простая алгебра Ли или алгебра* $\mathfrak{osp}(1|2n)$. *Тогда* $U(\mathfrak{g}) = Z\big(U(\mathfrak{g})\big) \oplus \big[U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})\big]$.

Доказательство. Пусть

$$U(\mathfrak{g}) = Z\big(U(\mathfrak{g})\big) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\neq 0} n_\lambda L^\lambda\right)$$

– разложение на неприводимые $\mathfrak{g}$-модули относительно присоединенного представления. Поскольку модули L^λ неприводимы,

$$\big[\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})\big] = \left(\bigoplus_{\lambda\neq 0} n_\lambda L^\lambda\right)$$

(этот аргумент не работает для суперапгебр Ли, отличных от $\mathfrak{osp}(1|2n)$, из-за отсутствия полной приводимости), что и требовалось доказать.

В дальнейшем ρ равно полусумме положительных корней.

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathfrak{h}$ *– подалгебра Картана в алгебре* $\mathfrak{g}$, *которая является или простой алгеброй, или конечномерной алгеброй Ли*; *пусть* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *и* $M^{\lambda-\rho}$ *– модуль Верма со старшим весом* λ *(не* $\lambda - \rho$*)*; *пусть* J_λ *– (левый) идеал алгебры* $U(\mathfrak{g})$, *равный ядру представления* $U(\mathfrak{g})$ *в* $M^{\lambda-\rho}$. *Положим* $\mathfrak{A}_\lambda = U(\mathfrak{g})/J_\lambda$. *Тогда* $\mathfrak{A}_\lambda = \mathbb{C} \oplus [\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda]$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1, $[\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{A}_\lambda]$; следовательно, как в следствии 2.1, $\mathfrak{A}_\lambda = Z(\mathfrak{A}_\lambda) \oplus [\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda]$. Однако $Z(\mathfrak{A}_\lambda)$ – гомоморфный образ $Z\big(U(\mathfrak{g})\big)$; следовательно, он равен $\mathbb{C}$, что и требовалось доказать.

Если $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, а λ – старший вес конечномерного модуля, то $P(\lambda) = \dim L^\lambda$ – многочлен от $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Рассмотрим $P(\lambda)$ для любых $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ таких, что

$$\prod_{i\neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Согласно следствию 2.2 имеется только один функционал tr на $\mathfrak{A}_\lambda$ такой, что $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$ и $\mathrm{tr}(1) = P(\lambda)$.

Лемма 2.2. *Пусть* $u \in U(\mathfrak{g})$, *а* $\tilde{u} \in \mathfrak{A}_\lambda$ *– образ этого элемента. Тогда* $\mathrm{tr}(\tilde{u})$ *– также многочлен от* λ.

Доказательство. Пусть $\#\colon Z\big(U(\mathfrak{g})\big) \oplus \big[U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})\big] \to Z\big(U(\mathfrak{g})\big)$ – естественная проекция. По определению $\#$ имеем

$$\mathrm{tr}(\tilde{u}) = \chi_\lambda(u^\#) P(\lambda) = \varphi(u^\#)(\lambda) P(\lambda), \tag{2.1}$$

где $\varphi : Z\big(U(\mathfrak{g})\big) \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ – гомоморфизм Хариш-Чандры [13]. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ – *простая алгебра Ли, а* $\mathfrak{h}$ – *ее подалгебра Картана. Отождествим пространство* $\left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\right)^*$ *с алгеброй формальных степенных рядов от переменных* $t = (t_1, \dots, t_n)$ *следующим образом*:

$$f \mapsto \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)} f\left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!}\right) t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}, \tag{2.2}$$

где $h_1, \dots, h_n$ – *базис в* $\mathfrak{h}$, *а* $\nu_i \in \mathbb{Z}_+$ *для любых* i. *Пусть* $e^{\lambda}(t) = e^{\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n}$ *и все* λ_i *подразумеваются различными. Тогда функционал* tr *соответствует ряду*

$$\psi(\lambda, t) = \frac{\bigoplus_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda)}}{\bigoplus_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho)}}(t). \tag{2.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.2

$$\mathrm{tr}\left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!}\right)$$

– многочлен от λ. Если $\lambda \in P_{++}$ (где P_{++} – множество старших весов конечномерных модулей), то ряд

$$\hat{\psi}(\lambda, t) = \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)} \mathrm{tr}\left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!}\right) t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}$$

согласуется с (2.3) вследствие формулы Вейля для характеров. Однако $\psi(\lambda, t) = \sum_\nu P_\nu t^\nu$, где P_ν – некоторые многочлены. Действительно, поскольку

$$P_\nu(\lambda) = \mathrm{tr}\left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \in P_{++},$$

это справедливо при любых $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Следовательно, $\hat{\psi}(\lambda, t) = \psi(\lambda, t)$. Теорема доказана.

3. СТАРШИЕ ВЕСА КВАЗИКОНЕЧНЫХ МОДУЛЕЙ НАД АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Пусть L^i – неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$-модуль со старшим весом i. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$, рассматриваемая как $\mathfrak{sl}(2)$-модуль относительно присоединенного действия $\mathfrak{sl}(2)$, имеет вид

$$\mathfrak{gl}(\lambda) = \begin{cases} L^0 \oplus L^2 \oplus \dots \oplus L^{2|\lambda|-2} & \text{при} \quad \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ L^0 \oplus L^2 \oplus \cdots & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{3.1}$$

АлгебраЛи $\mathfrak{gl}(\lambda)$ обладает $\mathbb{Z}$-градуировкой

$$\mathfrak{gl}(\lambda) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(\lambda)_i,$$

где

$$\mathfrak{gl}(\lambda)_i = \left\{z \in \mathfrak{gl}(\lambda) : [H, z] = 2iz\right\}, \tag{3.2}$$

и возрастающей фильтрацией

$$\mathfrak{gl}(\lambda)_{(i)} = \bigoplus_{k\leqslant i} \mathfrak{gl}(\lambda)_k.$$

Таким образом, мы можем говорить о *треугольном разложении* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\lambda)$, где

$$\mathfrak{g}_\pm = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathfrak{gl}(\lambda)_{\pm i},$$

а также о *параболических подалгебрах, старших весах* и т.д. [14].

Следуя работе [14], назовем $\mathfrak{g}$-модуль V *квазиконечным*, если $V = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ и $\dim V_j < \infty$ для любых j. Мы рассматриваем только *градуированные* $\mathfrak{g}$-модули, т.е. такие, что $\mathfrak{g}_i V_j \subset V_{i+j}$.

Хорошо известный факт, что $\mathfrak{gl}(n)$ имеет нетривиальное одномерное представление $(A \mapsto \operatorname{tr} A)$, имеет свой аналог и для $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

Подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ называется *параболической*, если она содержит $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ как собственную подалгебру. Например, для любого $P \in \mathbb{C}[H]$ мы полагаем $\mathfrak{p}_{-1}(P) = P\mathbb{C}[H]Y$ и считаем, что $\mathfrak{p}(P)$ порождается $\mathfrak{p}_{-1}(P)$ и $\mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}_+$. Это дает *минимальную* параболическую подалгебру, соответствующую P.

Лемма 3.1. *Минимальная параболическая подалгебра $\mathfrak{p}(P)$ имеет вид*

$$\mathfrak{p}(P) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}(P)_k,$$

где $\mathfrak{p}(P)_k = \mathfrak{g}_k$ при $k \geqslant 0$ и $\mathfrak{p}(P)_{-k} = I_k \cdot Y^k$, а I_k – идеал в $\mathbb{C}[H]$, порожденный $P(H)P(H+2)\dots P(H+2k-2)$.

Доказательство. См. [14] (mutatis mutandis).

Пусть $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, $\mathfrak{g}_+ v_\lambda = 0$ и $M^\lambda = \operatorname{ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+}(\mathbb{C}v_\lambda)$ – соответствующий модуль Верма; пусть L^λ – неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ.

Лемма 3.2 [14]. *Следующие условия эквивалентны*:

I. M^λ *содержит вакуумный вектор, который лежит в $M^\lambda_{(-1)}$ – пространстве фильтрации -1.*

II. *Модуль L^λ является квазиконечным.*

III. L^λ *есть фактор обобщенного модуля Верма $M^{\lambda,P} = \operatorname{ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{p}(P)}(\mathbb{C}v_\lambda)$ для некоторого $P \in \mathbb{C}[H]$.*

Шойхет называет $\deg P$ *уровнем* модуля $M^{\lambda,P}$. В работе [3] он описывает модули уровня 1 более детально, чем мы это делаем здесь.

Мы уже установили, что $\mathfrak{g}_0^* \simeq \big(\mathbb{C}[H]\big)^* \simeq \mathbb{C}\big[[t]\big]$, где изоморфизм алгебр имеет вид

$$F\colon \big(\mathbb{C}[H]\big)^* \to \mathbb{C}\big[[t]\big], \qquad \theta \mapsto F_\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(H^k)}{k!} t^k.$$

Следующая теорема описывает набор формальных степенных рядов, соответствующих старшим весам квазиконечных модулей. Напомним, что *квазимногочлен* представляет собой выражение вида $\sum R_i(t) e^{\alpha_i t}$, где $R_i(t)$ – многочлены.

Теорема 3.1. *Формальный степенной ряд, соответствующий старшему весу любого квазиконечного модуля над* $\mathfrak{gl}(\lambda)$, *имеет вид* $R(t)/(1-e^{-2t})$, *где* $R(t)$ – *квазимногочлен такой, что* $R(0)=0$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что легко доказываются следующие утверждения:

а) если $\theta \in \big(\mathbb{C}[H]\big)^*$, а

$$F_\theta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta(H^k)}{k!}t^k$$

– соответствующий ряд, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta\big((H+a)^k\big)}{k!}t^k=e^{at}F_\theta(t);$$

б) для любого $R(H)\in\mathbb{C}[H]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta\big(R(H)H^k\big)}{k!}t^k=R\left(\frac{d}{dt}\right)F_\theta(t),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta\big(R(H+a)(H+a)^k\big)}{k!}t^k=R\left(\frac{d}{dt}\right)\big(e^{at}F_\theta(t)\big).$$

Если θ – старший вес квазиконечного модуля над $\mathfrak{gl}(\lambda)$, то по лемме 3.2 существует многочлен $P(H)\in\mathbb{C}[H]$ такой, что θ продолжается на одномерное представление минимальной параболической подалгебры, соответствующей P. Нетрудно проверить, что $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\cap\mathfrak{g}_0=[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}_{-1}]$. Следовательно, $\theta\big([\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}_{-1}]\big)=0$.

Обозначим

$$T(H)=XY=\frac{1}{4}\big(\lambda^2-(H+1)^2\big). \tag{3.3}$$

Тогда условие $\theta\big([\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}_{-1}]\big)=0$ можно выразить как $\theta\big(\big[X,P(H)H^kY\big]\big)=0$ или как

$$\theta\big(T(H-2)P(H-2)(H-2)^k-P(H)H^kT(H)\big)=0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta\big(T(H-2)P(H-2)(H-2)^k\big)}{k!}t^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta\big(T(H)P(H)(H)^k\big)}{k!}t^k=$$
$$=T\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\big(e^{-2t}F_\theta(t)\big)-T\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\big(F_\theta(t)\big)=$$
$$=T\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\big((e^{-2t}-1)F_\theta(t)\big)=0.$$

Таким образом, функция $(e^{-2t}-1)F_\theta(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и, следовательно, многочленом. Очевидно, что $R(0)=0$.

Обратно, если $R(t)$ представляет собой квазимногочлен, $R(0)=0$ и $P(d/dt)R(t)=0$, мы имеем

$$T\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)R(t)=0,$$

и условие $\theta\big([\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}_{-1}]\big)=0$ для $\mathfrak{p}_{-1}=P(H)\mathfrak{g}_0Y$ удовлетворяется, если мы положим

$$F_\theta(t)=\frac{R(t)}{e^{-2t}-1}$$

(что корректно определено, поскольку $R(0)=0$). Следовательно, θ является старшим весом квазиконечного модуля. Теорема доказана.

Рассмотрим след на $\mathfrak{gl}(0)$. Если $P=1$, то параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(0)$ совпадает с полной алгеброй и поэтому $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{g}_0=[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_{-1}]\cap\mathfrak{g}_0\not\ni 1$. Это доказывает, что $\mathfrak{g}\neq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ и тем самым что существует инвариантный функционал θ на $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(\lambda)$. Таким образом, функция $R=(1-e^{-2t})F_\theta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T\left(\frac{d}{dt}\right)R\left(t\right)=0,$$

которое в явном виде записывается как

$$\left(\lambda^2-\left(\frac{d}{dt}+1\right)^2\right)R(t)=0.$$

Если $\lambda\neq 0$, то решения имеют вид $R(t)=c_1e^{(\lambda-1)t}+c_2e^{-(\lambda+1)t}$, а из начального условия $R(0)=0$ следует, что

$$F_\theta(t)=c\frac{e^{(\lambda-1)t}-e^{-(\lambda+1)t}}{1-e^{-2t}}.$$

Отождествим скаляры со скалярными матрицами и нормируем функционал θ (след) естественным образом, т.е. полагая $\theta(1)=\lambda$. Такая нормировка фиксирует значение $c=1$.

Ясно, что при $\lambda=0$ характеристическое уравнение имеет много корней и

$$F_\theta(t)=c\frac{te^{-t}}{1-e^{-2t}}.$$

Таким образом, $\mathfrak{sl}(0)$ является бесконечномерной алгеброй Ли с ∞-мерным тождественным модулем.

4. АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{gl}(\lambda)$ И $\mathfrak{gl}^-(\infty)$, $\mathfrak{gl}^+(\infty)$, $\mathfrak{gl}(\infty)$

Пусть V – векторное пространство с фиксированным базисом v_i, $i \in \mathbb{Z}$, пусть V^+ – подпространство, порожденное элементами v_i при $i \geqslant 0$, а V^- – подпространство, порожденное элементами v_i при $i < 0$. Пусть $\mathfrak{gl}^-(\infty)$, $\mathfrak{gl}^+(\infty)$ и $\mathfrak{gl}(\infty)$ – алгебры Ли линейных преобразований соответственно пространств V^-, V^+ и V таких, что их матрицы в фиксированных базисах имеют носитель на конечном числе диагоналей, параллельных главной (это число зависит от матрицы).

На алгебре $\mathfrak{gl}(\infty)$ имеется (единственный) нетривиальный 2-коцикл

$$c(A,B) = \operatorname{tr}\bigl([J,A]B\bigr), \qquad \text{где} \qquad J = \sum_{i\leqslant 0} E_{ii} - \sum_{i>0} E_{ii}. \tag{4.1}$$

Обозначим через $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ соответствующее центральное расширение; скобка в $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ имеет вид

$$[A,B] = AB - BA + \operatorname{tr}\bigl([J,A]B\bigr)\cdot z,$$

где z – новый центральный элемент.

В частности, для матричных элементов имеем

$$[E_{ij},E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj} + \delta_{il}\delta_{jk}\bigl(\kappa(i)-\kappa(j)\bigr)\cdot z,$$

где $\kappa(i)=1$, если $i\leqslant 0$, и $\kappa(i)=0$ в других случаях.

Модули Хариш-Чандры $M^{\lambda,s} = \operatorname{Span}(v_i\colon i\in\mathbb{Z})$ для любых $\lambda, s\in\mathbb{C}$ определяются над алгеброй $\mathfrak{sl}(2)$ как линейная оболочка элементов v_i, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} Hv_i &= (s+2i)v_i,\\ Xv_i &= \frac12\sqrt{(\lambda-s-2i-1)(\lambda+s+2i+1)}\,v_{i+1},\\ Yv_i &= \frac12\sqrt{(\lambda-s-2i+1)(\lambda+s+2i-1)}\,v_{i-1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Легко видеть, что квадратичный оператор Казимира Ω действует на $M^{\lambda,s}$ как скалярный оператор умножения на $(\lambda^2-1)/2$ и $M^{\lambda,s}\simeq M^{\lambda,s'}$, если $s-s'\in 2\mathbb{Z}$.

Предположим, что $\lambda\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Тогда согласно [13] $M^{\lambda,s}$ неприводим, если $\lambda-s\notin 2\mathbb{Z}+1$, и $M^{\lambda,s} = M_+^{\lambda,s}\oplus M_-^{\lambda,s}$, если $\lambda-s\in 2\mathbb{Z}+1$, где $M_+^{\lambda,s}$ – неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$-модуль с младшим весом $\lambda+1$, а $M_-^{\lambda,s}$ – неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$-модуль со старшим весом $\lambda-1$; эти модули исчерпывают все неприводимые $\mathfrak{sl}(2)$-модули с диагональным H-действием таким, что Ω действует как скалярный оператор умножения на $(\lambda^2-1)/2$.

Существует более прозрачная реализация модулей Хариш-Чандры. Положим

$$X^+ = x\frac{\partial}{\partial y} - 2(\lambda-1)\frac{x}{y}, \qquad X^- = y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \left(\text{т.е. } H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - (\lambda-1)\right)$$

и $w_i = x^{a+i}y^{b-i}$. Тогда $\lambda = a+b+1$, $s=a-b$ и $w_i = v_i$ с точностью до скалярного множителя.

Модуль $M^{\lambda,s}$ над $\mathfrak{gl}(\lambda)$ определяет вложение $\phi\colon \mathfrak{gl}(\lambda)\to\mathfrak{gl}(\infty)$. Поскольку $H^2\big(\mathfrak{gl}(\lambda)\big)=0$ [5], существует подъем ϕ до гомоморфизма $\hat\phi\colon\mathfrak{gl}(\lambda)\to\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$, который имеет вид $\hat\phi(u)=\phi(u)+\theta(u)\cdot z$, где θ – линейный функционал на $\mathfrak{gl}(\lambda)$ такой, что $\theta\big([u,v]\big)=c\big(\phi(u),\phi(v)\big)$ в терминах коцикла на $\mathfrak{gl}(\infty)$, который превращает эту алгебру в $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$. Заметим, что θ определяется однозначно с точностью до функционала, пропорционального следу на $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

Следующая теорема описывает $\hat\phi$ более явным образом.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(\lambda)$. *Тогда* $\hat\phi(\mathfrak{g}_i)=\phi(\mathfrak{g}_i)$ *при* $i\neq 0$ *и*

$$\hat\phi(e^{tH})=\phi(e^{tH})-\frac{e^{st}-e^{-(\lambda+1)t}}{1-e^{-2t}}z. \tag{4.3}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\phi(X)&=\sum\alpha_iE_{i+1,i}, &&\text{где}\quad \alpha_i=\frac12\sqrt{(\lambda-s-2i-1)(\lambda+s+2i+1)}\,,\\
\phi(H)&=\sum\gamma_iE_{i,i}, &&\text{где}\quad \gamma_i=s+2i,\\
\phi(Y)&=\sum\beta_iE_{i-1,i}, &&\text{где}\quad \beta_i=\frac12\sqrt{(\lambda-s-2i+1)(\lambda+s+2i-1)}\,.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Следовательно,

$$\big[J,\phi(X)\big]=\sum\big(\kappa(i)-\kappa(i+1)\big)\alpha_iE_{i+1,i}$$

и $\phi(H^k)\phi(Y)=\sum\gamma_i^k\beta_{i+1}E_{i,i+1}$. Отсюда

$$\big[J,\phi(X)\big]\phi(H^k)\phi(Y)=\sum\gamma_i^k\beta_{i+1}\alpha_i\big(\kappa(i)-\kappa(i+1)\big)E_{i+1,i+1}$$

и

$$\begin{aligned}
c\big(\phi(X),\phi(H^kY)\big)&=\operatorname{tr}\big(\big[J,\phi(X)\big]\phi(H^kY)\big)=\sum\gamma_i^k\beta_{i+1}\alpha_i\big(\kappa(i)-\kappa(i+1)\big)=\\
&=\gamma_0^k\beta_1\alpha_0=\frac14s^k\big(\lambda^2-(s+1)^2\big)=T(s)s^k.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{d}{dt}\right)(e^{st})&=T(s)e^{st}=\sum_{k\geqslant0}\frac{T(s)s^k}{k!}t^k=\sum_{k\geqslant0}\frac{c\big(\phi(X),\phi(H^kY)\big)}{k!}t^k=\\
&=\sum_{k\geqslant0}\frac{\theta\big([X,H^kY]\big)}{k!}t^k=\sum_{k\geqslant0}\frac{\theta(XH^kY-H^kYX)}{k!}t^k=\\
&=\sum_{k\geqslant0}\frac{\theta\big(T(H-2)(H-2)^k-H^kT(H)\big)}{k!}t^k=T\left(\frac{d}{dt}\right)\big((e^{-2t}-1)\theta(e^{tH})\big).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$T\left(\frac{d}{dt}\right)\big((e^{-2t}-1)\theta(e^{tH})-e^{st}\big)=0$$

и

$$(e^{-2t}-1)\theta(e^{tH}) = \begin{cases} e^{st}+c_1e^{-(\lambda+1)t}+c_2e^{(\lambda-1)t}, & \text{если } \lambda\neq 0,\\ e^{st}+c_1e^{-t}+c_2te^{-t}, & \text{если } \lambda=0.\end{cases}$$

В обоих случаях, вычитая слагаемое, пропорциональное следу, получим

$$(e^{-2t}-1)\theta(e^{tH}) = e^{st}-e^{-(\lambda+1)t}.$$

Теорема 4.1 доказана.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$ над алгеброй усеченных многочленов. Пусть $R_m = \mathbb{C}[\varepsilon]$, где $\varepsilon^{m+1}=0$. Расширяя модуль $M^{\lambda,s}$ до модуля $M_{R_m}^{\lambda,s}$ над R_m, т.е. считая, что $s\in R_m$, можно определить действие алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ *теми же* формулами. Если v_i – исходный базис, то в качестве фиксированного базиса в расширенном модуле $M_{R_m}^{\lambda,s}$ мы возьмем $\varepsilon^j v_i$ для всех $i\in\mathbb{Z}$ и $j=1,\dots,m$. Заметим, что в этом базисе в $M_{R_m}^{\lambda,s}$ действие элемента H недиагонально.

Алгебра $\mathfrak{gl}(\infty;R_m)$ и ее подалгебры $\mathfrak{gl}^{\pm}(\infty;R_m)$ определены естественным образом. Центральное расширение $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty;R_m)$ определяется теми же формулами.

Рассматривая $s+\varepsilon$ вместо $s\in\mathbb{C}$, получим следующее следствие теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *Гомоморфизм* $\hat\phi\colon \mathfrak{gl}(\lambda)\to\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty;R_m)$, *индуцированный вложением* $\phi\colon \mathfrak{gl}(\lambda)\to\mathfrak{gl}(\infty;R_m)$, *удовлетворяет равенству* $\hat\phi\big(\mathfrak{gl}(\lambda)_i\big)=\phi\big(\mathfrak{gl}(\lambda)_i\big)$ *при* $i\neq 0$ *и*

$$\hat\phi(e^{tH}) = \phi(e^{tH}) - \left(\frac{e^{st}-e^{-(\lambda+1)t}}{1-e^{-2t}} + \frac{e^{st}}{1-e^{-2t}}\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon^j t^j}{j!}\right)z. \tag{4.5}$$

Заметим, что мы "вынуждены" рассматривать центральное расширение $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ для описания квазиконечных модулей над $\mathfrak{gl}(\lambda)$, поскольку $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ имеет большее число квазиконечных представлений, чем $\mathfrak{gl}(\infty)$, и рассмотрение только $\mathfrak{gl}(\infty)$-модулей оказывается недостаточным.

Следующие утверждения описывают условия на старший вес неприводимого модуля, которые являются необходимыми и достаточными, для того чтобы модуль был квазиконечным.

Обозначим через $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ и $\mathfrak{gl}_f^{\pm}(\infty)$ соответственно подалгебры в $\mathfrak{gl}(\infty)$ и $\mathfrak{gl}^{\pm}(\infty)$, состоящие из матриц с конечным носителем. Пусть $\mathfrak{h}$ обозначает подалгебру Картана любой из этих алгебр Ли; рассмотрим ее как порожденную диагональными элементами E_{ii}. Заметим, что ограничение вложения $\hat\phi\colon \mathfrak{gl}_f(\infty)\to\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ на $\mathfrak{h}$ имеет вид $E_{ii}\mapsto\phi(E_{ii})+\kappa(i)z$, где ϕ – естественное вложение $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ в $\mathfrak{gl}(\infty)$. Если θ – вес модуля (со старшим весом) над одной из указанных алгебр Ли ($\mathfrak{gl}(\infty)$ и ее подалгебры, а также $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ и ее подалгебры), мы можем найти координаты $\theta_i=\theta(E_{ii})$ веса θ, рассматривая $\mathfrak{h}$ указанным выше способом.

Предложение 4.1. $\mathfrak{gl}_f(\infty)$-*Модуль со старшим весом* Λ *является квазиконечным, если и только если существует лишь конечное число различных координат* $\lambda_i=\Lambda(E_{ii})$.

Доказательство. Пусть V квазиконечен и генерируется вектором старшего веса v. Поскольку $\dim V_{-1} < \infty$ для конечного множества I $V_{-1} = \operatorname{Span}(E_{i+1,i}v)_{i\in I}$. Пусть $k \notin I$ и $k+1 \notin I$. Тогда

$$E_{k+1,k}v = \sum_{i\in I} \alpha_i E_{i+1,i}v,$$

поэтому $E_{k,k+1}(E_{k+1,k}v) = 0$ или, что эквивалентно, $(E_{k,k} - E_{k+1,k+1})v = 0$, т.е. $\lambda_k = \lambda_{k+1}$.

Обратное утверждение очевидно.

Предложение 4.2. *$\mathfrak{gl}(\infty)$-Модуль V со старшим весом Λ, где $\lambda_i = \lambda(E_{ii})$, является квазиконечным, если и только если существует лишь конечное число ненулевых координат λ_i, где $\lambda_i = \Lambda(E_{ii})$.*

Доказательство. Рассматривая V как $\mathfrak{gl}_f(\infty)$-модуль, мы видим, что имеется только конечное число различных координат λ_i, откуда следует, что $\lambda_k = \lambda_+$ и $\lambda_{-k} = \lambda_-$ при достаточно больших k. Поэтому $E_{k,k+1}(E_{k+1,k}v) = 0$ и, поскольку V является неприводимым, $E_{k+1,k}v = 0$ для всех, кроме конечного числа, k.

Пусть

$$A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+1}, \qquad B_k = \sum_{i\geqslant k} E_{i+1,i}.$$

Тогда

$$[A, B_k] = \sum_{i\geqslant k} E_{i,i} - \sum_{i\geqslant k} E_{i+1,i+1} = E_{k,k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}[A, B_k]v &= E_{k,k}v = \lambda_k v = AB_k v - B_k A v = AB_k v = A\Bigg(\sum_{i\geqslant k, i\in I} E_{i+1,i}v\Bigg) = \\ &= \sum_{i\geqslant k, i\in I} [A, E_{i+1,i}]v = \sum_{i\geqslant k, i\in I} (E_{i,i} - E_{i+1,i+1})v = \\ &= \Bigg(\sum_{i\geqslant k, i\in I} (\lambda_i - \lambda_{i+1})\Bigg)v = (\lambda_k - \lambda_j)v,\end{aligned}$$

где j – наибольший индекс в конечном множестве I. Поэтому $\lambda_k = \lambda_k - \lambda_j$ и $\lambda_j = 0$.

Аналогично, если

$$C_k = \sum_{i\leqslant k} E_{i+1,i},$$

то

$$[A, C_k] = \sum_{i\leqslant k} E_{i,i} - \sum_{i\leqslant k} E_{i+1,i+1} = E_{k+1,k+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}[A, C_k]v &= \lambda_{k+1}v = AC_k v = A\Bigg(\sum_{i\leqslant k} E_{i+1,i}\Bigg)v = \sum_{i\leqslant k}[A, E_{i+1,i}]v = \\ &= \sum_{i\leqslant k}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1})v = \sum_{i\leqslant k}(\lambda_i - \lambda_{i+1})v = (\lambda_j - \lambda_{k+1})v.\end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_j = 0$ для достаточно больших j. Обратное утверждение следует из предложения 4.1, что и требовалось доказать.

Предложение 4.3. *$\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$-Модуль V со старшим весом (Λ, c), где c – значение центрального заряда на z, квазиконечен, если и только если имеется лишь конечное число ненулевых координат λ_i, где $\lambda_i = \Lambda(E_{ii})$.*

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 4.2, покажем, что имеется только конечное число различных координат λ_i и $E_{k+1,k}v \neq 0$ для конечного числа значений k.

Пусть
$$A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+1}, \qquad J = \sum_{i\leqslant 0} E_{i,i}.$$

Тогда $[A, J] = E_{01}$, следовательно, $c(A, B) = \operatorname{tr}(E_{01}B)$ для любых $B \in \mathfrak{gl}(\infty)$ и, таким образом, $c(A, B_k) = \kappa(k)$. Имеем

$$\begin{aligned}
[A, B_k]v &= E_{k,k}v = \bigl(E_{k,k} + \kappa(k)z\bigr)v = AB_kv = A\Biggl(\sum_{i\geqslant k,\, i\in I} E_{i+1,i}v\Biggr) = \\
&= \sum_{i\geqslant k,\, i\in I} [A, E_{i+1,i}]v = \sum_{i\geqslant k,\, i\in I} (E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + \delta_{i0}z)v = \\
&= \kappa(k)z + \Biggl(\sum_{i\geqslant k,\, i\in I} (\lambda_i - \lambda_{i+1})\Biggr)v = \kappa(k)cv + (\lambda_k - \lambda_+)v = \kappa(k)c + (\lambda_k)v,
\end{aligned}$$

поэтому $\lambda_+ = 0$.

Для $C_k = \sum_{i\leqslant k} E_{i+1,i}$ имеем $c(A, C_k) = \kappa(-k)$, следовательно,

$$\begin{aligned}
[A, C_k]v &= \bigl(-E_{k+1,k+1} - \kappa(-k)\bigr)v = \bigl(-\lambda_{k+1} - \kappa(-k)c\bigr)v = AC_kv = \\
&= A\sum_{i\leqslant k} E_{i+1,i}v = \sum_{i\leqslant k}[A, E_{i+1,i}]v = \sum_{i\leqslant k}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + \delta_{i0}z)v = \\
&= \bigl(\kappa(-k)c + \lambda_- - \lambda_{k+1}\bigr)v.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_- = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – одна из алгебр Ли $\mathfrak{gl}(\infty; R_m)$ или $\mathfrak{gl}^{\pm}(\infty; R_m)$, или их вариантов с крышками; $\mathfrak{g}$-модуль V со старшим весом θ, заданный своими координатами $\theta_{ij} = (\varepsilon^j E_{ii})$, является квазиконечным, если и только если имеется лишь конечное число ненулевых координат θ_{ij}.*

Доказательство аналогично доказательствам предложений 4.1, 4.2 и теоремы 4.1.

Пусть V – один из модулей $M_{R_m}^{\lambda,s}$ или, если $M_{R_m}^{\lambda,s}$ приводим, один из его неприводимых подмодулей. Получаем гомоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty; R_m)$ или $\mathfrak{gl}^{\pm}(\infty; R_m)$. Пусть θ – линейный функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 4.2. Мы можем рассматривать θ как линейный функционал на подалгебре Картана алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$. Вычислим соответствующую производящую функцию.

Теорема 4.3. *Производящая функция $F_\theta(t)$ для функционала θ имеет вид*:
I. *Для* $M^{\lambda,s}_{R_m}$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(s-2i)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij}-\theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1-e^{-2t}} - \\ - \left(\frac{e^{st}-e^{-(\lambda+1)t}}{1-e^{-2t}}c + \frac{e^{st}}{1-e^{-2t}}\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{j!}\right). \tag{4.6}$$

II. *Для модуля со старшим весом* $\lambda-1$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda-2i-1)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij}-\theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1-e^{-2t}}. \tag{4.7}$$

III. *Для модуля со старшим весом* $-\lambda-1$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(-\lambda-2i-1)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij}-\theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1-e^{-2t}}. \tag{4.8}$$

IV. *Для модуля с младшим весом* $\lambda+1$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda+2i+1)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij}-\theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1-e^{-2t}}. \tag{4.9}$$

V. *Для модуля с младшим весом* $1-\lambda$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(1-\lambda+2i)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij}-\theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1-e^{-2t}}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Докажем только утверждение I, остальные доказываются аналогично. Пусть ϕ – гомоморфизм, определяющий $\mathfrak{gl}(\lambda)$-действие на $M^{\lambda,s}$. Тогда

$$\phi(H) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(s+\varepsilon-2i)E_{ii},$$

следовательно,

$$\phi(e^{tH}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(s+\varepsilon-2i)t}E_{ii}$$

и

$$\phi\big((1-e^{-2t})e^{tH}\big) = \phi(e^{tH}) - \phi\big(e^{t(H-2)}\big) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(s+\varepsilon-2i)t}(E_{ii}-E_{i-1,i-1}) = \\ = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(s-2i)t}\sum_{j=0}^m \varepsilon^j(E_{ii}-E_{i-1,i-1})\frac{t^j}{j!}.$$

Поэтому

$$(1-e^{-2t})F_\theta(t) = \theta\big(\phi(e^{tH}) - \phi\big(e^{t(H-2)}\big)\big) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(s-2i)t}\sum_{j=0}^m \frac{\theta_{ij}-\theta_{i-1,j}}{j!}t^j.$$

Поскольку только конечное число координат θ_{ij} не равно нулю, все суммы в действительности являются конечными, что и требовалось доказать.

5. КВАЗИКОНЕЧНЫЕ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Ниже мы покажем, что не все квазиконечные модули над $\mathfrak{gl}(\lambda)$ могут быть представлены в каноническом виде, как это было сделано для $W_{1+\infty}$ в работе [14].

Пусть $\mathfrak{gl}^{\mathrm{hol}}(\lambda)$ – голоморфное пополнение алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$, т.е. алгебра функций от H, голоморфных на всей комплексной прямой $\mathbb{C}$, и пусть $\mathfrak{gl}_i^{\mathrm{hol}}(\lambda) = \{f(H)X^i\}$ при $i > 0$, $\mathfrak{gl}_i^{\mathrm{hol}}(\lambda) = \{f(H)Y^{-i}\}$ при $i < 0$ и $f \in \mathfrak{gl}_0^{\mathrm{hol}}(\lambda)$. Соотношения в пополненной алгебре следуют из уравнений (1.7) и (1.10):

$$Xf(H) = f(H-2)X, \qquad Yf(H) = f(H+2)Y, \qquad XY = \frac{1}{4}\bigl(\lambda^2 - (H-1)^2\bigr).$$

Следующее предложение доказывается аналогично соответствующему утверждению работы [14].

Предложение 5.1. *Пусть V – квазиконечный $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль. Тогда $\mathfrak{gl}(\lambda)$-действие естественно продолжается до $\mathfrak{gl}_i^{\mathrm{hol}}(\lambda)$-действия при $i \neq 0$.*

Введем на $\mathbb{C}$ соотношение эквивалентности, положив

$$[s] = \begin{cases} s + 2\mathbb{Z}, & \text{если } s + \lambda \notin 2\mathbb{Z} + 1, \\ s - 2\mathbb{Z}_+, & \text{если } s = \pm\lambda + 1, \\ s + 2\mathbb{Z}_+, & \text{если } s = \pm\lambda - 1. \end{cases}$$

Поставим в соответствие каждому классу $[s]$ неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$-модуль M^s с диагональным действием генератора H, множество собственных значений которого совпадает с $[s]$; обозначим через $\mathfrak{gl}_s(\infty)$ алгебру Ли линейных преобразований в M^s с конечным числом ненулевых диагоналей в H-диагональном базисе.

Следующая теорема аналогична и доказывается так же, как соответствующая теорема в работе [14].

Теорема 5.1. *Пусть $[s_i]$ – различные, а m_i – неотрицательные целые числа. Пусть*

$$\phi\colon \mathfrak{gl}(\lambda) \longrightarrow \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{gl}_{s_i}(\infty; R_{m_i})$$

определяется модулем $\bigoplus_{i=1}^k M^{s_i}_{R_{m_i}}$. Тогда для любого квазиконечного $\mathfrak{g}$-модуля V любой его $\mathfrak{gl}(\lambda)$-подмодуль является $\mathfrak{g}$-подмодулем. В частности, если V неприводим как $\mathfrak{g}$-модуль, он неприводим и как $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль.

Опишем, следуя работе [14], структуру квазиконечных $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модулей. Пусть θ – старший вес квазиконечного $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуля и

$$F_\theta(t) = \frac{R(t)}{1 - e^{-2t}},$$

где $R(t) = \sum r_i(t)e^{s_i t}$ – соответствующий формальный степенной ряд (см. раздел 3). Многочлены $r_i(t)$ называются *кратностями.*

Для каждого s обозначим через $R_s(t)$ сумму всех квазимногочленов с показателями из класса $[s]$. Тогда $R(t) = \sum R_s(t)$, где сумма идет по представителям различных классов эквивалентности. Пусть $R_s(t) = \sum r_{is}(t)e^{(s-2i)t}$. Из определений легко получить следующие свойства квазимногочленов:

а) $R(0) = 0$;

б) сумма всех кратностей $R_{\lambda+1}(t)$, а также сумма всех кратностей $R_{-\lambda+1}(t)$ равны нулю;

в) сумма всех кратностей $R_{\lambda-1}(t)$, а также сумма всех кратностей $R_{-\lambda-1}(t)$ равны константе.

Введем обозначение $\Lambda = [\lambda-1] \cap [\lambda+1] \cap [-\lambda-1] \cap [-\lambda+1]$. Квазимногочлену R, удовлетворяющему свойствам "а"–"в", поставим в соответствие $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль $V(s)$ следующим образом:

1) если $s \notin \Lambda$, то $V(s)$ – неприводимый $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$-модуль с центральными зарядами

$$c_j = -\sum_{i\in I} r_i^{(j)}(0),$$

где $j = 0, \dots, \max(\deg r_i)$, а остальные координаты старшего веса равны

$$\theta_{ij} = \sum_{l\leqslant i}\bigl(r_l^{(j)}(0) + \delta_{l0}c_j\bigr);$$

2) если $s \notin [\lambda-1] \cap [-\lambda-1]$ и

$$R_s = \sum_i r_i(y)e^{s-2i},$$

положим

$$c = -\sum_{i\in I} r_i(0), \qquad \theta_{ij} = \sum_{l\leqslant i}\bigl(r_l^{(j)}(0) + \delta_{l0}\delta_{j0}c_j\bigr),$$

тогда $V(s)$ – соответствующий $\mathfrak{gl}^-(\infty)$-модуль;

3) если $s \notin [-\lambda+1] \cap [\lambda+1]$, положим

$$\theta_{ij} = \sum_{l\leqslant i} r_l^{(j)}(0),$$

тогда $V(s)$ – соответствующий $\mathfrak{gl}^+(\infty)$-модуль.

Теорема 5.2. *Пусть квазимногочлен*

$$R = \sum_{i=1}^{k} R_{s_i}(t)$$

разложен по различным классам эквивалентности показателей; пусть R удовлетворяет перечисленным выше свойствам "а"–"в". Тогда неприводимый квазиконечный модуль со старшим весом $R(t)$ изоморфен модулю

$$V = V(s_1) \otimes \dots \otimes V(s_k) \otimes (\alpha\,\mathrm{tr}),$$

где $\alpha\,\mathrm{tr}$ – неприводимый 1-мерный модуль, соответствующий следу на $\mathfrak{gl}(\lambda)$, а модули $V(s_i)$ построены так, как это описано выше.

Доказательство. Согласно теореме 4.3 модуль V неприводим как $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль. Поэтому достаточно показать, что ограничение старшего веса этого модуля на $\mathfrak{gl}(\lambda)$ равно $R(t)/(1-e^{-2t})$. Пусть $s=s_i$ – один из показателей такой, что $s\notin\Lambda$. Тогда предложение 5.1 означает, что существует старший вес θ_s для $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty;R_m)$, производящая функция которого равна

$$\frac{R_s(t)+c_se^{-(\lambda+1)t}}{1-e^{-2t}},$$

где $c_s=-R_s(0)$.

Если $s\in\Lambda$, то же предложение означает, что производящая функция равна $R_s(t)/(1-e^{-2t})$, где сумма всех показателей R_s равна нулю.

Наконец, производящая функция следа есть

$$\alpha\frac{e^{(\lambda-1)t}-e^{-(\lambda+1)t}}{1-e^{-2t}}.$$

Поэтому для нашего модуля V производящая функция имеет вид $R(t)/(1-e^{-2t})$, где при соответствующем выборе c_s

$$\begin{aligned}R(t)=\sum_{s\notin\Lambda}&\big(R_s(t)+c_se^{-(\lambda+1)t}\big)+\\&+R_{\lambda+1}(t)+R_{-\lambda+1}(t)+R'_{-\lambda-1}(t)+R'_{\lambda-1}(t)+\alpha\big(e^{(\lambda-1)t}-e^{-(\lambda+1)t}\big)=\\=\sum_{s\notin\Lambda}&R_s(t)+R_{\lambda+1}(t)+R_{-\lambda+1}(t)+\\&+\big(R'_{-\lambda-1}(t)-\alpha e^{-(\lambda+1)t}\big)+\big(R'_{\lambda-1}(t)+\alpha e^{(\lambda-1)t}\big)=\sum_{s\notin\Lambda}R_s(t),\end{aligned}$$

что требовалось доказать.

6. УНИТАРНЫЕ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Напомним, что *антиинволюция* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ – это $\mathbb{R}$-линейное отображение $\omega\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ такое, что

$$\omega(\alpha x)=\bar\alpha\omega(x),\qquad \omega\big([x,y]\big)=\big[\omega(x),\omega(y)\big],\qquad \omega^2=\mathrm{id}$$

для любых $\alpha\in\mathbb{C}$ и $x,y\in\mathfrak{g}$.

Задав антиинволюцию ω, мы можем снабдить модуль V^*, дуальный к $\mathfrak{g}$-модулю V, другой структурой $\mathfrak{g}$-модуля, а именно

$$(xl)(v)=l\big(\omega(x)v\big)\quad\text{для любых } l\in V^*,\ v\in V \text{ и } x\in\mathfrak{g}. \tag{6.1}$$

В частности, если $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+$ и ω переставляет $\mathfrak{g}_-$ и $\mathfrak{g}_+$, то $\mathfrak{g}$-гомоморфизм $M\to M^*$ является хорошо определенным; здесь M – модуль Верма с вектором старшего веса v, а структура $\mathfrak{g}$-модуля на M^* задается уравнением (6.1).

Действительно, пусть $v^*\in M^*$, причем $v^*(v)=1$ и $v^*(u)=0$ для любых u с весом, меньшим чем вес v. Следовательно, если $x\in\mathfrak{g}_+$, то $(xv^*)(u)=v^*\big(\omega(x)u\big)=0$ и, таким образом, v^* также является вектором старшего веса. Если $\theta\big(\omega(H)\big)=\overline{\theta(H)}$, где

θ – вес вектора v, то вес вектора v^* также равен θ. Поэтому существует $\mathfrak{g}$-изоморфизм $M \to M^*$ или эрмитова $\mathfrak{g}$-инвариантная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на M. Если $\langle\cdot,\cdot\rangle$ положительно определена, модуль M называется *унитарным*.

В данном разделе мы укажем условия на старший вес квазиконечного $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуля, для того чтобы этот модуль был унитарен. Сначала опишем автоморфизмы алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

Как хорошо известно, описание автоморфизмов алгебры функций $\mathcal{F}$ (в особенности многочленов) представляет собой сложную задачу. Столь же сложна и задача описания автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{Der}(\mathcal{F})$ дифференцирований алгебры $\mathcal{F}$. Для уменьшения числа автоморфизмов до разумного значения представляется естественным рассматривать только *внешние* автоморфизмы, т.е. классы автоморфизмов по модулю группы *внутренних* автоморфизмов. Какие автоморфизмы следует рассматривать как внутренние? Для алгебры $\mathfrak{Der}(\mathcal{F})$ естественным образом подходят автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами алгебры $\mathcal{F}$. Аналогично можно сказать, что автоморфизм ϕ алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ является *внутренним*, если он является также автоморфизмом ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}_\lambda$.

Распространим это определение на алгебру $LU_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ и назовем автоморфизм этой алгебры внутренним, если он также является автоморфизмом ассоциативной алгебры $U_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.

Напомним, что линейное отображение $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ есть *антиавтоморфизм* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $\phi\big([x,y]\big) = \big[\phi(y),\phi(x)\big]$. Для ассоциативных алгебр определение антиавтоморфизма аналогично. Например, отображение t такое, что ${}^t|_{\mathfrak{g}} = -\operatorname{id}$, называется *главным антиавтоморфизмом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Главный антиавтоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ можно продолжить до антиавтоморфизма ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$: ${}^t(x\otimes y) = {}^ty \otimes {}^tx$. Ясно, что t сохраняет элементы Казимира.

Теорема 6.1. *Группа внешних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/2$ и порождена классом элемента $-t$, где $-t\colon x \mapsto -{}^tx$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in \operatorname{Aut}\big(\mathfrak{gl}(\lambda)\big)$. Тогда $\psi(Y)$, $\psi(H)$ и $\psi(X)$ порождают алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}(2)$. Более того, они порождают $\mathfrak{A}_\lambda$, потому что вес $\psi(X)^n$ равен $2n$ относительно веса $\psi(H)$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм

$$\tau\colon U\big(\mathfrak{sl}(2)\big) \to \mathfrak{A}_\lambda, \qquad X \mapsto \psi(X), \qquad H \mapsto \psi(H), \qquad Y \mapsto \psi(Y).$$

Поскольку $\tau(\Omega) \in \mathbb{C}$, то существует такое $\mu \in \mathbb{C}$, при котором $\tau(\Omega) = (\mu^2-1)/2$. Поэтому мы получаем сюръективный гомоморфизм и, следовательно, изоморфизм $\mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{A}_\lambda$. В работе [6] Диксмье доказал, что это возможно, только если $\lambda^2 = \mu^2$. Таким образом, можно считать, что $\lambda = \mu$ и τ является автоморфизмом. Пусть $\psi_1 = \tau^{-1}\psi$, тогда $\psi_1|_{\mathfrak{sl}(2)} = \operatorname{id}$.

Следовательно, ψ_1 является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$, рассматриваемой как $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Поэтому $\psi_1|_{L^{2i}} = c_i \in \mathbb{C}$. Поскольку L^2 и L^4 порождают алгебру Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$, можно заключить, что $c_i = c_2^{i-1}$ для любых $i \geqslant 1$. Более того, из условия $[L^4,L^4] \supset L^2$ следует, что $c_2^2 = 1$. Поэтому $c_2 = \pm 1$. Если $c_2 = 1$, то $\psi_1 = \operatorname{id}$, а если $c_2 = -1$, то $\psi_1 = \phi$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Если $\lambda^2 \notin \mathbb{R}$, то $\mathfrak{gl}(\lambda)$ не имеет вещественных форм, т.е. инволютивных антилинейных автоморфизмов.*

Доказательство. Пусть ω – инволютивный антилинейный автоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$. Тогда $\omega(X), \omega(H)$ и $\omega(Y)$ порождают $\mathfrak{A}_\lambda$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм

$$\tau : U\big(\mathfrak{sl}(2)\big) \to \mathfrak{A}_\lambda, \qquad \tau = \mathrm{id} \quad \text{на} \quad X, H, Y,$$

откуда мы получаем изоморфизм $\tau : \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{A}_\lambda$. Согласно работе [6] это возможно, только если $\lambda^2 = \mu^2$. Следовательно, $\lambda = \mu$ и τ является автоморфизмом. Тогда $\omega_1 = \tau^{-1}\omega$ – антилинейный автоморфизм $\mathfrak{gl}(\lambda)$ такой, что

$$\omega_1(X) = X, \qquad \omega_1(H) = H, \qquad \omega_1(Y) = Y.$$

Положим $z_i = (\operatorname{ad} X)^i(Y^2)$, в частности $z_0 = z$. Тогда $\mathrm{Span}(z_i : i = 1, \ldots, 4)$ образует базис L^4 и, если $\omega_1(Y^2) = cY^2$, то очевидно, что $\omega_1(z_i) = cz_i$ при $i = 1, \ldots, 4$. Согласно [15] в $\mathfrak{gl}(\lambda)$ выполнены соотношения

$$\begin{gathered} 3[z_1, z_2] - 2[z, z_3] = 24(\lambda^2 - 4)Y, \\ 4\big[z_3, [z, z_1]\big] - 3\big[z_2, [z, z_2]\big] = 576(\lambda^2 - 9)z. \end{gathered}$$

Применив ω_1 к обеим частям этих соотношений, получим

$$\begin{gathered} c^2(\lambda^2 - 4) = \bar{\lambda}^2 - 4, \\ c^3(\lambda^2 - 9) = c(\bar{\lambda}^2 - 9), \end{gathered}$$

откуда $c^2 = 1$ и $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Если $\lambda^2 \neq \bar{\lambda}^2$, то $\mathfrak{gl}(\lambda)$ не имеет инволютивных антилинейных автоморфизмов.*

Доказательство. Пусть ω – инволютивный антилинейный автоморфизм; очевидно, что $\tau : X \leftrightarrow Y$ и $\tau(H) = H$ определяет антиавтоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$. Тогда $\tau \circ \omega$ – инволютивный антилинейный автоморфизм, что и требовалось доказать.

Если $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$, то $\mathfrak{A}_\lambda$ обладает инволютивным антилинейным автоморфизм ω:

$$\omega(X) = Y, \qquad \omega(Y) = X, \qquad \omega(H) = H. \tag{6.2}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать унитарные модули относительно такого автоморфизма.

Теорема 6.3. *Пусть $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ и пусть $F_\theta(t) = R(t)/(1 - e^{-2t})$, где $R(t)$ – квазимногочлен, у которого ни одна из экспонент s_i не принадлежит $\Lambda = [\lambda - 1] \cap [\lambda + 1] \cap [-\lambda - 1] \cap [-\lambda + 1]$. $\mathfrak{gl}(\lambda)$-Модуль с характером $F_\theta(t)$ унитарен, если и только если*

$$F_\theta(t) = \sum n_i \frac{e^{-(\lambda+1)t} - e^{s_i t}}{1 - e^{-2t}}, \qquad \text{где} \qquad n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Пусть V – неприводимый модуль с характером $F_\theta(t)$, а $P(H)$ – аннигилятор Yv, где v – вектор старшего веса. Тогда $P(H)$ – характеристический многочлен оператора H в V_{-1}. Однако поскольку унитарная форма инвариантна и $\omega(H)=H$, H является самосопряженным; следовательно, все корни многочлена P вещественны. Далее, если α – кратный корень кратности $m>1$, многочлен P имеет вид $P=(H-\alpha)^m Q(H)$. При $u=(H-\alpha)^{m-1}Q(H)v$ имеем

$$\langle u,u\rangle = \big\langle (H-\alpha)^{m-1}Q(H)v, (H-\alpha)^{m-1}Q(H)v\big\rangle = \big\langle Q(H)v, (H-\alpha)^{2m-2}Q(H)v\big\rangle = 0.$$

Вследствие эрмитовости $u=0$. Таким образом, $m=1$.

Согласно теореме 5.2 V имеет вид $V(s_1)\otimes\cdots\otimes V(s_k)$, где $V(s_i)$ – неприводимые $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$-модули. Очевидно, что V унитарен, если и только если каждый $V(s_i)$ унитарен. Далее, согласно работе [14] мы знаем, что $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$-модуль $V(s)$ унитарен, если и только если $\theta_i-\theta_{i+1}+\delta_{i0}c\in\mathbb{Z}_+$ при любых i, где θ_i – координаты старшего веса, а c – значение центрального заряда. Теорема доказана.

7. АЛГЕБРА $\mathfrak{gl}(\lambda)$ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

В данном разделе мы строим явную реализацию некоторых неприводимых $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модулей. А именно мы раскладываем тензорные степени модуля Верма над $\mathfrak{sl}(2)$ и указываем соответствующие характеристические многочлены и q-характеры.

Лемма 7.1. *Пусть A – ассоциативная алгебра, пусть $\mathfrak{S}_n$ действует естественным образом на $A^{\otimes n}$. Тогда алгебра $\mathfrak{S}_n$-инвариантов $(A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ порождается элементами вида*

$$a\otimes 1\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1+\cdots+1\otimes 1\otimes 1\otimes\cdots\otimes a.$$

Доказательство. Обозначим

$$s(a_1,\dots,a_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\sigma(n)}.$$

Пусть B – алгебра, порожденная элементами $s(a,1,\dots,1)$ при любых $a\in A$. Пусть $|s(a_1,\dots,a_n)|$ – число элементов a_i, отличных от 1. Докажем, что $B\simeq\big(A^{\otimes n}\big)^{\mathfrak{S}_n}$.

Индукцией по $\big|s(a_1,\dots,a_n)\big|$ покажем, что $s(a_1,\dots,a_n)\in B$. Действительно, если $\big|s(a_1,\dots,a_n)\big|=1$, то по определению $s(a_1,\dots,a_n)=s(a,1,\dots,1)\in B$. Пусть $\big|s(a_1,\dots,a_n)\big|=l>1$. Рассмотрим

$$s(a_1,\dots,a_{l-1},1,\dots,1)s(a_l,1,\dots,1)=\alpha s(a_1,\dots,a_l,1,\dots,1)+\cdots,$$

где α – отличная от нуля постоянная, а точки означают линейную комбинацию членов $s(b_1,\dots,b_m,1,\dots,1)$, в которых $m<l$, что и требовалось доказать.

Теорема 7.1. *Пусть* $V = M^{\lambda-1}$ *– модуль Верма со старшим весом* $\lambda - 1$ *над* $\mathfrak{sl}(2)$ *(и* $\mathfrak{gl}(\lambda)$*). Тогда*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\nu} V^{\nu} \otimes S^{\nu},$$

где V^{ν} *– неприводимый* $\mathfrak{gl}(\lambda)$*-модуль,* S^{ν} *– неприводимый* $\mathfrak{S}_n$*-модуль, а* ν *пробегает разбиения* n*.*

Доказательство. Ясно, что V неприводим не только как $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль, но и как $\mathfrak{A}_\lambda$-модуль. Тогда очевидно, что $W = V^{\otimes n}$ неприводим как $\mathfrak{A}_\lambda^{\otimes n}$-модуль.

Образ $U\big(\mathfrak{gl}(\lambda)\big)$ в $\operatorname{End}(W)$ соответствует подалгебре, порожденной элементами $s(a,1,\dots,1)$ при $a \in \mathfrak{gl}(\lambda)$, следовательно, согласно лемме 7.1 он изоморфен $(\mathfrak{A}_\lambda^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.

Разложим W на изотопические $\mathfrak{S}_n$-модули $W = \bigoplus_\nu W^\nu$ и представим каждый W^ν в виде $W^\nu = V^\nu \otimes S^\nu$, где V^ν – неприводимый $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль. Такое представление не является единственным; мы можем, например, положить $V^\nu = e_\nu(W)$ для всех минимальных идемпотентов в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, соответствующих разбиению ν.

Чтобы показать, что V^ν неприводим как $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль, рассмотрим $V_1^\nu = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(S^\nu, W)$. Как $\mathfrak{gl}(\lambda)$-модуль V_1^ν изоморфен модулю V^ν. Пусть $\phi, \psi \in V_1^\nu$ и $\phi \neq 0$. Покажем, что существует вектор $u \in U\big(\mathfrak{gl}(\lambda)\big)$ такой, что $u\phi = \psi$. Действительно, поскольку W неприводим как $\mathfrak{A}_\lambda^{\otimes n}$-модуль, теорема плотности [16, гл. XVII, §3, теорема 1] утверждает, что существует $w \in \mathfrak{A}_\lambda^{\otimes n}$ такой, что $w\phi(v_i) = \psi(v_i)$, где v_i образуют базис в S^ν. (Поскольку S^ν неприводим и $\phi \neq 0$, векторы $\psi(v_i)$ являются линейно независимыми при $i = 1, \dots, \dim S^\nu$.)

Усредним элемент $w\phi$ по $\mathfrak{S}_n$:

$$(w\phi)^{\#} = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum \sigma(w\phi)\sigma^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum \sigma(w)\sigma^{-1}(\phi) = w^{\#}\phi.$$

С другой стороны, поскольку $w\phi = \psi$, мы видим, что $(w\phi)^{\#} = (\psi)^{\#} = \psi$, т.е. $w^{\#}\phi = \psi$, и мы можем считать, что $w \in (\mathfrak{A}_\lambda^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$. Таким образом, существует вектор $u \in U\big(\mathfrak{gl}(\lambda)\big)$ такой, что $u\phi = \psi$. Другими словами, V_1^ν неприводим, что и требовалось доказать.

Следствие 7.1.

1. *Пусть* $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$*. Производящая функция, соответствующая старшему весу* ν*, имеет вид*

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i e^{(\lambda-2i+1)t}. \tag{7.1}$$

2. *Представим* ν *в виде* $\nu = (\theta_1^{\alpha_1} \dots \theta_m^{\alpha_m})$*, где* $\theta_1 > \dots > \theta_m > 0$ *и* $\alpha_i \neq 0$ *для любых* i*, а* θ^α *обозначает произведение* $\theta \dots \theta$ *из* α *элементов. Тогда характеристический многочлен модуля* V^ν *есть*

$$P(H) = \prod_{i=1}^{m} (H - \lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \ldots - 2\alpha_i - 1).$$

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 4.3. Для доказательства утверждения 2 умножим (7.1) на $1 - e^{-2t}$ и получим

$$\nu_1 e^{(\lambda-1)t} + \sum_{i=1}^{n-1} (\nu_{i+1} - \nu_i) e^{(\lambda-2i+1)t} - \nu_n e^{(\lambda-2n-1)t}. \tag{7.2}$$

Следовательно сумма (7.2) без первого слагаемого является решением обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, чье характеристическое уравнение имеет в точности указанный вид. Следствие 7.1 доказано.

Следствие 7.2. *Пусть $a = e^\lambda$ и $q = e^{-\alpha}$, где α – положительный корень алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. Тогда q-характер модуля V^ν есть*

$$\chi_\nu = \frac{a^{|\nu|} q^{n(\nu)}}{\prod_{x\in\nu} \left(1 - q^{h(x)}\right)}, \tag{7.3}$$

где $|\nu|$ – число клеток в диаграмме Юнга, соответствующей ν,

$$n(\nu) = \sum_{i\geqslant 1} \nu_i,$$

а $h(x)$ – длина крюка, соответствующего клетке x.

Доказательство. Согласно работе [17, пример 2 в разд. 3] для S-функции s_ν имеем

$$\chi_\nu = s_\nu(a, aq, aq^2, \dots) = a^{|\nu|} s_\nu(1, q, q^2, \dots),$$

что и равно правой части формулы (7.3). Следствие доказано.

8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{gl}(n)$

Теорема 8.1. *В алгебре $\mathfrak{gl}(n)$ имеют место следующие утверждения:*
I. *Для базиса $e_{kl} = (\operatorname{ad} Y)^{k-l}(X^k)$, где $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $-k \leqslant l \leqslant k$, имеем*

$$\langle e_{kl}, e_{k'l'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{l+l',0}.$$

II. *Пусть элементы f_{kl} определяются уравнениями $(0 \leqslant l \leqslant k)$*

$$(\operatorname{ad} Y)^{k-l}(X^k) = X^l f_{kl},$$
$$(\operatorname{ad} Y)^{k+l}(X^k) = f_{k,-l} Y^l.$$

Положим $T_i(H) = \left(n^2 - (H + 2i - 1)^2\right)/4$ и $\alpha_i = n - 2i + 1$ при $i = 1, \dots, n$. При фиксированном $l \geqslant 0$ и любых $k \geqslant l$ многочлены f_{kl} образуют базис, ортогональный относительно формы

$$\langle f, g \rangle = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=l+1}^{n} f(\alpha_i) g(\alpha_i) T_1(\alpha_i) \dots T_l(\alpha_i) & \text{для} \quad l > 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) g(\alpha_i) & \text{для} \quad l = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

III. *С точностью до постоянного множителя многочлены f_{kl} соответствуют многочленам Хана одной дискретной переменной*

$$f_{kl}(H) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} l-k, l+k+1, \frac{1}{2}(1-n-H) \\ l+1, l+1-n \end{matrix}\,\middle|\, 1\right) \times T_0(\alpha_{l+1})\dots T_0(\alpha_k), \tag{8.2}$$

где

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i(\alpha_3)_i}{(\beta_1)_i(\beta_2)_i}\frac{z^i}{i!} \tag{8.3}$$

– обобщенная гипергеометрическая функция, $(\alpha)_0 = 1$ *и* $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1)$ *при* $i > 0$.

Доказательство. I. Заметим, во-первых, что подпространства L^{2k} в разложении $\mathfrak{gl}(n) = L^0 \oplus L^2 \oplus \dots \oplus L^{2n-2}$ попарно ортогональны. Действительно, форма $A, B \mapsto \operatorname{tr} AB$ определяет инвариантное спаривание пространств L^k и L^l и, следовательно, $\mathfrak{sl}(2)$-гомоморфизм $L^k \to L^l$, что возможно только при $k = l$. Более того, ясно, что $\langle \mathfrak{gl}(n)_k, \mathfrak{gl}(n)_l \rangle \neq 0$, если и только если $k + l = 0$. Теперь заметим, что $\mathfrak{gl}(n)_l \cap L^{2k} = \operatorname{Span}\big((\operatorname{ad} Y)^{k-l}(X)\big)$. Это доказывает утверждение I.

II. Пусть $X^l f(H) \in \mathfrak{gl}(n)_l$ и $g(H)Y^l \in \mathfrak{gl}(n)_{-l}$. Тогда

$$\operatorname{tr}\big(g(H)Y^lX^lf(H)\big) = \operatorname{tr}\big(f(H)g(H)T_1(H)\dots T_l(H)\big).$$

Как легко проверить,

$$\operatorname{tr} f(H) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} f(\alpha_i) \qquad \text{для любых} \qquad f(H) \in \mathfrak{gl}(n)_0.$$

Отсюда следует (8.1).

Более того, утверждение I означает, что для любого фиксированного l, лежащего между $-k$ и k, многочлены f_{kl} и $f_{k,-l}$ образуют два двойственных базиса, т.е. $\langle f_{kl}, f_{kl'}\rangle = \delta_{l+l',0}$. Однако степени многочленов f_{kl} и $f_{k,-l}$ равны, что означает совпадение этих многочленов с точностью до множителя. Это доказывает утверждение II.

Утверждение III следует из того факта, что ортогональные многочлены однозначно определяются весовой функцией и интервалом, на котором рассматривается скалярное произведение. Уравнение (8.2) следует из сравнения коэффициентов при старших членах. Теорема 8.1 доказана.

Замечание. Многочлены Хана определены для трех параметров α, β и N следующим образом:

$$h_p^{(\alpha,\beta)}(z,N) = \frac{(-1)^p\Gamma(N)(\beta)_p}{p!\,\Gamma(N-p)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} -p, \alpha+\beta+p+1, -z \\ \beta+1, l-N \end{matrix}\,\middle|\, 1\right). \tag{8.4}$$

Наши многочлены f_{kl} совпадают с точностью до множителя с $h_p^{(\alpha,\beta)}(z,N)$ при $\alpha = \beta = l$, $p = k - l$, $z = (H+n-1)/2$ и $N = n-1$.

Теперь покажем, как основные свойства многочленов Хана следуют из теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. Для любого $f(H) \in \mathbb{C}[H]$ положим

$$\Delta f(H) = f(H+2) - f(H), \qquad \nabla f(H) = f(H) - f(H-2). \tag{8.5}$$

ТЕОРЕМА 8.2. *Рассмотрим* $\mathfrak{gl}(n)$ *как* $\mathfrak{sl}(2)$*-модуль относительно образа главного вложения, и пусть* Ω *– квадратичный оператор Казимира* (1.8).

I. *Оператор* Ω *является самосопряженным по отношению к форме* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, а многочлены* $X^l f_{kl}$ *– собственные функции* Ω*, соответствующие собственным значениям* $2k(k+1)$*. Многочлены* f_{kl} *удовлетворяют разностному уравнению*

$$T_0(H)\nabla\Delta(f)-(l+1)(H+l)\Delta(f)+(k-l)(k+l+1)f=0. \tag{8.6}$$

II. *Имеет место формула*

$$f_{kl}=\begin{cases}\frac{\nabla^{k-l}(T_1\dots T_k)}{T_1\dots T_l}, & \text{если}\quad l>0,\\ \nabla^k(T_1\dots T_k), & \text{если}\quad l=0.\end{cases} \tag{8.7}$$

III. *Имеет место формула*

$$\langle f_{kl},f_{kl}\rangle=\frac{(k-l)!\,(k!)^2}{(k+l)!\,(2k+1)}n(n^2-1^2)\dots(n^2-k^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Поскольку форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\mathfrak{sl}(2)$-инвариантна, $\big\langle[w,u],v\big\rangle=-\big\langle u,[w,v]\big\rangle$ при любых $u,v\in\mathfrak{gl}(n)$ и $w\in\mathfrak{sl}(2)$. Через $*$ обозначим $U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$-действие на $\mathfrak{gl}(n)$; по индукции заключаем, что $\langle w*u,v\rangle=-\langle u,w^t*v\rangle$, где теперь $w\in U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$, а t – главная антиинволюция. Поскольку, как легко проверить, $\Omega^t=\Omega$, мы имеем $\langle\Omega*u,v\rangle=\langle u,\Omega*v\rangle$, т.е. оператор Ω является самосопряженным. Так как $\mathfrak{gl}(n)=\oplus L^{2i}$ и $X^lf_{kl}=(\operatorname{ad}Y)^{k-l}(X^k)\in L^{2k}$, мы видим, что X^lf_{kl} является собственной функцией оператора Ω с собственным значением $2k(k+1)$. Применяя Ω к X^lf_{kl}, получаем уравнение (8.6).

II. Напомним тождество

$$(\operatorname{ad}y)^p(a)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}y^{p-j}ay^j.$$

Положим в нем $a=X^k,\ p=k-l$ и умножим на Y^l слева. Получим

$$\begin{aligned}Y^lX^lf_{kl}&=Y^l(\operatorname{ad}Y)^{k-l}(X^k)=Y^l\Bigg(\sum_{j=0}^{k-l}(-1)^j\binom{k-l}{j}Y^{k-l-j}X^kY^j\Bigg)=\\&=\sum_{j=0}^{k-l}(-1)^j\binom{k-l}{j}y^{k-j}X^kY^j=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}T_{j-1}\dots T_0T_1\dots T_{k-j}.\end{aligned}$$

Однако

$$\nabla^{k-l}(f)(H)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f(H-2j)$$

для любой функции f и, следовательно,

$$Y^lX^lf_{kl}=\nabla^{k-l}(T_1\dots T_k).$$

Поскольку $Y^l X^l = T_1 \dots T_l$, утверждение II доказано.

III. Модуль L^{2k} является линейной оболочкой векторов $v_l = (\operatorname{ad} Y)^{k-l}(X^k)$ при $-k \leqslant l \leqslant k$; следовательно,

$$\langle v_l, v_m \rangle = -\langle v_{l-1}, v_{m+1} \rangle = \dots = (-1)^l \langle v_0, v_{l+m} \rangle$$

согласно инвариантности формы. Таким образом, $\langle v_l, v_{-l} \rangle = (-1)^l \langle v_0, v_0 \rangle$. Однако $v_l = X^l f_{kl} = (\operatorname{ad} Y)^{k-l}(X^k)$ и $v_{-l} = f_{k,-l} Y^l = (\operatorname{ad} Y)^{k+l}(X^k)$.

Теперь напомним, что многочлены f_{kl} и $f_{k,-l}$ совпадают с точностью до постоянного множителя, и сравним старшие коэффициенты. Мы видим, что

$$f_{k,-l} = (-1)^l \frac{(k+l)!}{(k-l)!} f_{k,l}.$$

Следовательно,

$$\langle f_{k,l}, f_{k,l} \rangle = \operatorname{tr}(f_{k,l} Y^l \cdot X^l f_{k,l}) = (-1)^l \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \langle v_l, v_{-l} \rangle = \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Остается показать, что

$$\langle v_0, v_0 \rangle = \frac{n(n^2-1^2)\dots(n^2-k^2)}{2k+1}(k!)^2.$$

Очевидно, что $f_k = \big((\operatorname{ad} Y)^k (X^k)\big)^2 \in U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$, отсюда $\langle v_0, v_0 \rangle = \operatorname{tr}_n \phi_n(f_k)$, где tr_n – след на $\mathfrak{gl}(n)$ и ϕ_n – гомоморфизм из $U\big(\mathfrak{sl}(2)\big)$ в $\mathfrak{gl}(n)$, индуцированный главным вложением. Теперь ясно, что $P_k(n) = \operatorname{tr}_n\big(\phi_n(f_k)\big)$ – многочлен степени $2k+1$. Более того, этот многочлен является нечетным. Однако $\phi_n(X^k) = 0$ при $n \leqslant k$ и $\phi_n(f_k) = 0$. Следовательно, $P_k(n) = 0$, если $n \leqslant k$, и $P_k(-n) = 0$, потому что P_k – нечетный многочлен. Отсюда имеем

$$P_k(n) = c_k n(n^2-1^2)\dots(n^2-k^2).$$

Чтобы найти постоянную c_k, достаточно вычислить $P_k(k+1) = \operatorname{tr}_{k+1}\big(\phi_{k+1}(f_k)\big)$. Однако в этом случае $X^k = (k!)^2 e_{1,k+1}$ и

$$(\operatorname{ad} Y)^k(X^k) = (k!)^2 (\operatorname{ad} Y)^k (e_{1,k+1}) = (k!)^2 \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} e_{k+1-j,k+1-j}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tr}_{k+1}\big(\phi_{k+1}(f_k)\big) = (k!)^4 \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 = (k!)^4 \binom{2k}{k},$$

откуда следует, что

$$c_k = \frac{(k!)^2}{2k+1}.$$

Теорема 8.2 доказана.

Предложение 8.1. *Имеют место соотношения ортогональности*:

$$\sum_i f_{kl}(\alpha_i) f_{k_1,l}(\alpha_i) T_1(\alpha_i)\dots T_l(\alpha_i) = \delta_{k,k_1} c_{k,l}, \tag{8.8}$$

где $c_{k,l} = \frac{(k-l)!\,(k!)^2}{(k+l)!\,(2k+1)} n(n^2-1^2)\dots(n^2-k^2)$;

$$\sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_i) f_{kl}(\alpha_j) T_1(\alpha_i)\dots T_l(\alpha_i) = \delta_{ij} \qquad \text{\textit{для любых}} \qquad i,j>l. \tag{8.9}$$

Доказательство. Формула (8.8) следует из теоремы 8.2 (утверждение III). Чтобы доказать формулу (8.9), выразим e_{ij} через $X^l f_{kl}$ и $f_{k,-l}Y^l$. Имеем, в частности,

$$e_{i,i+l} = \sum_{k=l}^{n-1} \alpha_{ik} X^l f_{kl}$$

для любых k между l и $n-1$. Однако, как легко проверить,

$$f_{kl}Y^l = \left(\sum_{i=1}^{n} f_{kl}(\alpha_i)e_{ii}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1,i}\right)^l =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f_{kl}(\alpha_i)e_{ii}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-l} e_{i+l,i}\right) = \sum_{i=1}^{n-l} f_{kl}(\alpha_{i+l}) e_{i+l,i}.$$

Следовательно, согласно теореме 8.2 имеем

$$f_{kl}(\alpha_{i+l}) = \langle e_{i,i+l}, f_{kl}Y^l\rangle = \alpha_{ik}\langle f_{kl}Y^l, X^l f_{kl}\rangle = \alpha_{ik} c_{kl}.$$

Другими словами,

$$e_{i,i+l} = \sum_{k=l}^{n-1} \frac{f_{kl}(\alpha_{i+l})}{c_{kl}} X^l f_{kl}.$$

Аналогично можно записать

$$e_{i+l,i} = \sum_{k=l}^{n-1} \frac{f_{kl}(\alpha_{i+l}) T_1(\alpha_{i+1})\dots T_l(\alpha_{i+l-1})}{c_{kl}} f_{kl} Y^l.$$

Поэтому, полагая $i' = i+l$, $j' = j+l$, заключаем, что

$$\langle e_{i+l,i}, e_{j,j+l}\rangle = \sum_{i=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_{i+l}) f_{kl}(\alpha_{j+l}) T_1(\alpha_{i+1})\dots T_l(\alpha_{i+l-1}) =$$
$$= \sum_{i=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_{i'}) f_{kl}(\alpha_{j'}) T_1(\alpha_{i'-1})\dots T_l(\alpha_{i'-l+1}) =$$
$$= \sum_{i=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_{i'}) f_{kl}(\alpha_{j'}) T_1(\alpha_{i'})\dots T_l(\alpha_{i'}),$$

что и требовалось доказать.

Выражая элементы Казимира $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$ алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ через ортогональные многочлены, а не через матричные единицы, мы можем вывести различные тождества, связывающие эти многочлены. Некотрые из этих тождеств могут даже оказаться новыми, по крайней мере для нецелых значений n (см. предположение 9.1 ниже). Например, для Ω_2 имеет место следующее предложение.

Предложение 8.2. *В алгебре* $\mathfrak{gl}(n)$ *имеет место соотношение*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}^2+2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}f_{kl}^2T_1\dots T_l-\frac{2k+1}{n}\right)=-H.$$

Доказательство. Перепишем оператор Казимира для алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, выраженный в терминах матричных элементов,

$$\Omega_2=\sum_{k=1}^{n}e_{kk}\otimes e_{kk}+\sum_{i<j}(e_{ij}\otimes e_{ji}+e_{ji}\otimes e_{ij})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}e_{kk}\otimes e_{kk}+\sum_{k=1}^{n}(n-2k+1)e_{kk}+2\sum_{i<j}e_{ji}\otimes e_{ij}$$

через ортогональные многочлены:

$$\Omega_2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}\otimes f_{k0}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{c_{kl}}(X^lf_{kl}\otimes f_{kl}Y^l+f_{kl}Y^l\otimes X^lf_{kl})=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}\otimes f_{k0}+2\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{c_{kl}}f_{kl}Y^l\otimes X^lf_{kl}+\sum_{k>l}\frac{1}{c_{kl}}[X^lf_{kl},f_{kl}Y^l].$$

Теперь преобразуем последнюю сумму. Для этого рассмотрим гомоморфизм φ: $U\big(\mathfrak{gl}(n)\big)\to\mathfrak{gl}(n)$, индуцированный тождественным представлением. Поскольку

$$\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}\otimes f_{k0}+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}(X^lf_{kl}\otimes f_{kl}Y^l+f_{kl}Y^l\otimes X^lf_{kl})$$

представляет собой $\mathfrak{sl}(2)$-инвариант, его образ в $\mathfrak{gl}(n)$ также является $\mathfrak{sl}(2)$-инвариантом, т.е. постоянной величиной $D(k)$:

$$\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}\cdot f_{k0}+2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}f_{kl}Y^l\cdot X^lf_{kl}+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}[X^lf_{kl},f_{kl}Y^l]=D(k).$$

Вычисляя следы обеих частей, получаем

$$nD(k)=\frac{1}{c_{k0}}\operatorname{tr}(f_{k0}^2)+2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}\operatorname{tr}(f_{kl}^2T_1\dots T_l)=2k+1,$$

откуда

$$D(k)=\frac{2k+1}{n}.$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}[X^lf_{kl},f_{kl}Y^l]=\frac{2k+1}{n}-\left(\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}\cdot f_{k0}+2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}f_{kl}Y^l\cdot X^lf_{kl}\right).$$

Суммируя по k, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{c_{k0}}f_{k0}\cdot f_{k0}+2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}f_{kl}Y^l\cdot X^l f_{kl}-\frac{2k+1}{n}\right)=-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}}[X^l f_{kl}, f_{kl}Y^l].$$

Линейные части одного и того же оператора Казимира, выраженные в различных базисах, совпадают, и, следовательно, последняя сумма равна

$$-\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)e_{ii}=-H,$$

что и требовалось доказать.

9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И АЛГЕБРА $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Полученные выше результаты для $\mathfrak{gl}(n)$, $n=1,2,\dots$, имеют место с необходимыми изменениями и для $\mathfrak{gl}(\lambda)$ при любых комплексных $\lambda\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. В этом разделе будем рассматривать только такие значения λ.

Заметим, что алгебра $\mathfrak{gl}(\lambda)$ в отличие от алгебр $\mathfrak{gl}(\infty)$ или $\mathfrak{gl}^{\pm}(\infty)$ не имеет базиса, состоящего из матричных единиц. Однако мы можем представить эту алгебру в виде

$$\mathfrak{gl}(\lambda)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}L^{2k}\quad \text{и}\quad \mathfrak{gl}(\lambda)=\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}\mathfrak{gl}(\lambda)_i,$$

где $\mathfrak{gl}(\lambda)_0=\mathbb{C}[H]$, в то время как $\mathfrak{gl}(\lambda)_i=X^i\mathfrak{gl}(\lambda)_0$ и $\mathfrak{gl}(\lambda)_{-i}=\mathfrak{gl}(\lambda)_0Y^i$ при $i>0$.

Как было показано выше, существует след на алгебре $\mathfrak{gl}(\lambda)$, ограничение которого на $\mathfrak{gl}(\lambda)_0$ имеет производящую функцию

$$\frac{e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}}{e^t-e^{-t}},\quad \text{если}\quad \lambda\neq 0,\qquad \text{и}\qquad \frac{2t}{e^t-e^{-t}},\quad \text{если}\quad \lambda=0.$$

В первом случае мы нормировали след так, что $\operatorname{tr}(1)=\lambda$ по аналогии со случаем конечной размерности, когда скаляры естественным образом представлены скалярными матрицами и $\operatorname{tr}(1_n)=n$. Во втором случае, $\lambda=0$, мы считаем, что $\operatorname{tr}(1)=1$.

Заметим, что при целых $\lambda=n$

$$\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{e^t-e^{-t}}=e^{(1-n)t}+e^{(3-n)t}+\dots+e^{(n-3)t}+e^{(n-1)t}$$

и соответствующий функционал имеет вид

$$\operatorname{tr}\bigl(f(H)\bigr)=\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i),\qquad \alpha_i=n-2i+1.$$

Функционал tr на $\mathfrak{gl}(\lambda)$ порождает невырожденую симметричную инвариантую билинейную форму $\langle u,v\rangle=\operatorname{tr}uv$.

Теорема 9.1. *В обозначениях раздела* 8 *имеем*:

I. $\langle e_{k,l},e_{k',l'}\rangle=\delta_{k,k'}\delta_{l+l',0}$.

II. *Многочлены* $f_{k,l}$ *при фиксированном* $l \geqslant 0$ *и* $k \geqslant l$ *образуют ортогональный базис относительно скалярного произведения* (8.1).

III. *Многочлены* $f_{k,l}$ *совпадают с точностью до постоянного множителя с непрерывными многочленами Хана дискретной переменной, которые определяются уравнениями* (8.2) *при* $n = \lambda$.

Доказательство. Доказательство утверждений I и II аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 8.1 при целых λ. Для доказательства утверждения III заметим, что для неотрицательного целого уравнение (8.2) выполняется согласно теореме 8.1. Однако обе части уравнения (8.2) являются многочленами от H, причем их коэффициенты – многочлены по λ. Вследствие непрерывности этих выражений в топологии Зариского наше утверждение доказано.

Теорема 9.2. *Пусть* Ω – *квадратичный оператор Казимира для* $\mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{gl}(\lambda)$.

I. Ω *является самосопряженным относительно формы* (8.1), *и многочлены* $X^l f_{kl}$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $l \in [-k, k] \cap \mathbb{Z}$ – *собственные функции* Ω *с собственными значениями* $2k(k+1)$. *Многочлены* f_{kl} *удовлетворяют разностному уравнению* (8.6) *и имеют вид* (8.7).

II. *Имеет место формула*

$$\langle f_{kl}, f_{kl}\rangle = \begin{cases} \dfrac{(k-l)!}{(k+l)!}\dfrac{(k!)^2}{2k+1}\lambda(\lambda^2-1^2)\dots(\lambda^2-k^2), & \text{\textit{если}} \quad \lambda \neq 0, \\ (-1)^k \dfrac{(k-l)!}{(k+l)!}\dfrac{(k!)^4}{2k+1}, & \text{\textit{если}} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Доказательство. Доказательство утверждения I аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 8.2. Если $\lambda \neq 0$, то обе части уравнения (9.1) являются многочленами от λ, которые совпадают при целых λ и, следовательно, равны по непрерывности в топологии Зариского. Чтобы охватить случай $\lambda = 0$, рассмотрим $\lim_{\lambda\to 0}(\mathrm{tr}/\lambda)$; как и ранее, обе части уравнения становятся многочленами от λ, откуда следует утверждение II, что и требовалось доказать.

Несколько неожиданным является тот факт, что дуальные соотношения ортогональности выполнены при достаточно больших значениях $|\lambda|$. Действительно, положим

$$c_{kl} = \begin{cases} \dfrac{(k-l)!}{(k+l)!}\dfrac{(k!)^2}{2k+1}(\lambda^2-1^2)\dots(\lambda^2-k^2), & \text{если} \quad \lambda \neq 0, \\ (-1)^k \dfrac{(k-l)!}{(k+l)!}\dfrac{(k!)^4}{2k+1}, & \text{если} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Предположение 9.1. *При достаточно больших значениях* $|\lambda|$ *имеем* (*для* $\alpha_i = \lambda - 2i + 1$)

$$\sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_i) f_{kl}(\alpha_j) T_1(\alpha_i)\dots T_l(\alpha_i) = \delta_{ij} \quad \text{\textit{при}} \quad i, j > l, \tag{9.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{c_{k0}} f_{k0}(\alpha_i)^2 + 2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_i)^2 T_1(\alpha_i)\dots T_l(\alpha_i) - \frac{2k+1}{\lambda}\right) = -\alpha_i \tag{9.4}$$

при $i \in \mathbb{N}$.

Априори $|\lambda|$ зависит от l. Нам не известно единообразного доказательства, мы проверили данное предположение только в некоторых частных случаях.

Из приведенных выше формул становится ясно, что если мы разделим форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на λ и рассмотрим многочлены только четной степени, то получим знакоопределенную форму не только при целых значениях λ, но и при таких вещественных значениях, при которых $0<|\lambda|<1$, а также при чисто мнимых λ. Последнее обстоятельство подсказывает деление следа на λ с самого начала.

Благодарности. Мы благодарны NFR за финансовую поддержку, М. Васильеву за стимулирующий вопрос, П. Грозману и особенно В. Гердту (раздел 9), которые помогли нам с численными экспериментами с помощью программ Maple и MATHEMATICA. Представляется, что Maple является программой, более подходящей для наших задач.

Список литературы

[1] *R. Roy*. The work of Chebyshev on orthogonal polynomials. In: Topics in polynomials of one and several variables and their applications. Eds. Rassias Th. et. al. Singapore: World Scientific, 1993. P. 495–512; *Я. Л. Геронимус*. Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1950.

[2] *А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров*. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.

[3] *B. Shoikhet*. Certain topics on the Lie algebra $\mathfrak{gl}(\lambda)$ representation theory. q-alg/9703029.

[4] *А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров*. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.

[5] *Б. Л. Фейгин*. УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 157–158.

[6] *J. Dixmier*. J. Algebra. 1973. V. 24. P. 551–564.

[7] *N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk*. Representation of Lie groups and special functions. Vol. 1–3. Dordrecht: Kluwer, 1991, 1992, 1993; Representation of Lie groups and special functions. Recent advances. Dordrecht: Kluwer, 1995.

[8] *L. Littlejohn, A. Krall.* Rocky Mt. J. Math. 1986. V. 16. № 3. P. 435–479; Acta Appl. Math. 1989. V. 17. P. 99–170.

[9] *A. Mingarelli, A. Krall.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1981. V. 90. P. 147–153.

[10] *В. Деркач.* Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 4. С. 509–521.

[11] *M. Vasiliev.* Int. J. Mod. Phys. D. 1996. V. 5. P. 763–797.

[12] *S. Montgomery.* J. Algebra. 1997. V. 195. № 2. P. 558–579.

[13] *J. Dixmier*. Algèbres envellopentes. Paris: Gautier-Villars, 1974; Enveloping algebras. Providence, RI: AMS, 1996.

[14] *V. Kač, A. Radul.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 429–457.

[15] *P. Grozman, D. Leites*. Lie superalgebras of supermatrices of complex size and integrable dynamical systems. In: Complex Analysis and Related Topics (Proc. of the International Symposium, Cuernavaca, Mexica, November 18–22, 1996). Eds. N. Vasilevsky et. al. Basel: Birkhauser, 1999. P. 73–105.

[16] *С. Ленг*. Алгебра. М.: Мир, 1968.

[17] *I. G. Macdonald*. Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. New York: Clarendon Press, Oxford University Press, 1995.