И. П. Зиновьев, Контроллер Мамдани–Сугено с нечеткой правой частью как универсальный аппроксиматор,
Исслед. по информ., 2007, выпуск 12, 117–123

КОНТРОЛЛЕР МАМДАНИ-СУГЕНО С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АППРОКСИМАТОР

И. П. Зиновьев

Информационные и компьютерные технологии играют все большую роль во многих сферах человеческой деятельности, включая производственные процессы. В последнее время автоматизация находит широкое применение также и в области гуманитарных наук.

Информатизация может быть проведена достаточно быстро, если процессы в предметной области могут быть описаны в четких математических терминах и хорошо поддаются алгоритмизации. Существуют, однако, случаи, когда даже хорошо известные технические процессы с трудом поддаются определению в виде точной последовательности шагов. В качестве примера можно рассмотреть любой достаточно сложный технический процесс, требующий постоянного контроля со стороны человека, будь то управление электропоездом или слежение за обработкой детали на токарном станке. Специалист, управляющий процессом, часто следует накопленному опыту, и попытка описать эти знания формальным языком терпит неудачу. Однако, можно описать стратегию управления в виде правил «ЕСЛИ условие ТО действие», понятных человеку.

Важной задачей является математическое определение неточных и нечетких понятий, которые неизбежно будут возникать в такого рода правилах (например, «скорость высокая» и «расстояние очень невелико»). Возможность такого описания предоставляет аппарат нечетких множеств, разработанный Л.Заде [1]. Последующие исследования в этой области дали возможность создания так называемых нечетких контроллеров – механизмов, работающих с базами правил и позволяющих в зависимости от условий найти необходимое управляющее воздействие в каждый момент времени.

Несмотря на большие успехи в этой области [2], многие эксперты полагают, что управление на основе нечетких контроллеров не является достаточно эффективной заменой человеку, и требует более четких математических обоснований достигнутых результатов.

Одним из таких обоснований является доказательство теоремы, показывающей, что нечеткий контроллер определенного вида является универсальным аппроксиматором (см., например, работы [3], [4]): если задана некоторая функция, то найдется такая база правил, что нечеткий контроллер, работая с этой базой, сможет аппроксимировать функцию с заданной точностью. Интуитивно понятно, что оптимальное управление можно считать функцией фазового состояния и состояния окружения процесса. Таким образом, в случае справедливости утверждения теоремы управление процессом может быть эффективным образом смоделировано на основе нечеткого контроллера.

В данной работе мы рассмотрим теорему аппроксимации для систем нечеткого вывода, основанных на правилах типа Такаги-Сугено с нечеткой правой частью, описанных в работе [5]. Приведем некоторые необходимые определения.

Определение. Треугольной нормой называется двуместная действительная функция $T:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$T(0,0)=0;\ T(1,b)=b;\ T(a,1)=a;$$
$$T(a,b)\le T(c,d),\ \text{если}\ a\le c,\ b\le d;$$
$$T(a,b)=T(b,a);$$
$$T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c).$$

Определение. Нечеткой импликацией называется двуместная действительная функция $\mathrm{I}:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mathrm{I}(a,b)\ge \mathrm{I}(c,b),\ \text{если}\ a\le c;$$
$$\mathrm{I}(a,b)\le \mathrm{I}(a,d),\ \text{если}\ b\le d;$$
$$\mathrm{I}(1,0)=0;\ \mathrm{I}(a,1)=1, a\in[0;1];\ \mathrm{I}(0,b)=1, b\in[0;1].$$

Далее мы рассматриваем правила вида

$$R^i: \mathit{if}\ X\ \mathit{is}\ A^i\ \mathit{then}\ Y\ \mathit{is}\ B^i,\ B^i=C_1^i x^0+C_0^i,\ i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

где X и Y – лингвистические переменные, соответствующие входным и выходным параметрам правила; A^i, B^i, C_1^i и C_0^i – нечеткие множества; N – количество правил в базе. На вход правила подается нечеткий синглетон A^* в точке x^0. Функция принадлежности нечеткого множества, получаемого на выходе правила, может быть получена по правилу sup-T композиции [1], [2]:

$$\mu_{\tilde{B}_i}(y)=\sup_x T\left(\mu_{A^*}(x),\mu_R(x,y)\right)\overset{\Delta}{=}\sup_x T\left(\mu_{A^*}(x), I\left(\mu_{A^i}(x),\mu_{B^i}(y)\right)\right). \tag{2}$$

Функция принадлежности нечеткого множества, получаемого в результате вывода, задается выражением

$$\mu_C(y)=\max_{i=\overline{1,N}}\mu_{\tilde{\tilde{B}}^i}(y), \tag{3}$$

где $\tilde{\tilde{B}}^i$ – нечеткое множество, функция принадлежности которого вычисляется по формулам

$$\mu_{\tilde{\tilde{B}}^i}(y)=T_{bp}\left(w_i,\mu_{\tilde{B}^i}(y)\right), \tag{4}$$

$$w_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j}, \tag{5}$$

$$\alpha_i = \mu_{A^i}\left(x^0\right), \tag{6}$$

где $T_{bp}(a,b) \stackrel{\Delta}{=} \max(0, a+b-1)$; w_i - весовой коэффициент для i-го правила; α_i - степень соответствия синглетона A^* предпосылке i-го правила.

Так как нечеткое множество A^* является синглетоном в точке x^0, то все выражение (2) упрощается до

$$\mu_{\widetilde{B}_i}(y) = I\left(\mu_{A^i}\left(x^0\right), \mu_{B^i}(y)\right). \tag{7}$$

Положим

$$I(a,b) = T^*(a,b) + 1 - a \stackrel{\Delta}{=} a \wedge b + 1 - a \tag{8}$$

– один из возможных вариантов импликации [6]. Определим $\bar{y} = D(C)$ как операцию дефаззификации нечеткого множества C, которая любому множеству ставит в соответствие четкое значение. Потребуем, чтобы при этом выполнялись следующие условия:

$$\forall y \in (-\infty; a): \mu_C(y) = const \;\Rightarrow\; \bar{y} \geq a, \tag{9a}$$

$$\forall y \in (b; +\infty): \mu_C(y) = const \;\Rightarrow\; \bar{y} \leq b, \tag{9b}$$

$$\forall y \in (-\infty; a]: \mu_C(y) = const \;\Rightarrow\; \bar{y} > a, \tag{9c}$$

$$\forall y \in [b; +\infty): \mu_C(y) = const \;\Rightarrow\; \bar{y} < b, \tag{9d}$$

Обозначим выход системы при поданном на ее вход значении x как $f(x)$. Нечеткая система, определенная выражениями (1)-(9), является универсальным аппроксиматором. Сформулируем это утверждение в виде теоремы:

Т е о р е м а. *Пусть* $U \subset R^1$ *– компактное множество,* $g(x)$ *– определенная на нем дифференцируемая функция. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие значения параметров* N, A^i, B^i, C_1^i, C_0^i, $i = \overline{1, N}$, *что для выхода построенной по ним системы* (1)-(9) *будет справедливо неравенство*:

$$\forall x \in U \; |f(x) - g(x)| < \varepsilon .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Введем функцию $\tilde{g}(x \mid x^*)$, где x^* - параметр:

$$\tilde{g}(x \mid x^*) \stackrel{\Delta}{=} g'(x^*) \cdot x + g(x^*) - g'(x^*) \cdot x^* = g'(x^*) \cdot (x - x^*) + g(x^*).$$

Эта функция является касательной к графику функции $g(x)$ в точке x^*. Введем функцию $\delta(x^*)$:

$$\delta(x^*) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{\tilde{\delta}} \left\{ \tilde{\delta} : |x - x^*| < \tilde{\delta} \;\Rightarrow\; |g(x) - \tilde{g}(x \mid x^*)| < \varepsilon/2 \right\}.$$

Обозначим $\delta = \inf_{x^* \in U} \delta(x^*)$. Так как U - компактное множество, то существует набор точек $\{a^j\}_{j=1}^{M}$ и δ-окрестностей O_{a^j} таких, что $\bigcup_{j=1}^{M} O_{a^j} \supset U$. Построим по этим окрестностям базу правил $\{R^j\}_{j=1}^{M}$:

$$R^j: \; if\ x\ is\ A^j\ then\ y\ is\ B^j,\; B^j = C_1^j \cdot x + C_0^j,$$

где

$$\mu_{A^j}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - a^j|}{\delta}, & |x - a^j| \le \delta \\ 0, & |x - a^j| > \delta \end{cases},$$

$$\mu_{C_i^j}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - c_i^j|}{w_i^j}, & |x - c_i^j| \le w_i^j \\ 0, & |x - c_i^j| > w_i^j \end{cases}, \; i = \overline{0,1}, \tag{10}$$

$$w_1^j = \frac{\varepsilon}{4 \max(|a^j - \delta|, |a^j + \delta|)},\; c_1^j = g'(a^j), \tag{11}$$

$$w_0^j = \frac{\varepsilon}{4},\; c_0^j = -g'(a^j)a^j + g(a^j). \tag{12}$$

Иными словами, множества A^j, C_0^j и C_1^j – нечеткие треугольные множества с центрами в точках a^j, c_0^j, c_1^j и ширинами δ, w_0^j, w_1^j соответственно.

Пусть на вход базы правил $\{R^j\}_{j=1}^{M}$ подается синглетон A^* в точке x^0. При этом порождаются нечеткие множества B^j, $\tilde{B}^j$, $\tilde{\tilde{B}}^j$ и C. Покажем, что справедливы следующие два утверждения:

I) $\exists \bar{y} : \mu_C(\bar{y}) \ne \gamma$, $\gamma = \min_y \mu_C(y)$.

II) $\forall y^* : |y^* - g(x^0)| > \varepsilon \Rightarrow \mu_C(y^*) = \gamma$.

Докажем сначала второе из этих утверждений. Зафиксируем y^* такое, что

$$|y - g(x^0)| > \varepsilon. \tag{13}$$

Рассмотрим правило R^j. Возможны два случая:

1) $\alpha_j = \mu_{A^j}(x^0) = 0$, откуда следует $\mu_{\widetilde{B}^j}(y^*) = T^*(\alpha_j, \mu_{B^j}(y^*)) + 1 - \alpha_j = 1$ и $\mu_{\widetilde{\widetilde{B}}^j}(y^*) = T_{bp}(w_j, \mu_{\widetilde{B}^j}(y)) = w_j = 0$, так как $\alpha_j = 0$.

2) $\alpha_j = \mu_{A^j}(x^0) > 0$. По определению множества A^j отсюда следует $|x^0 - a_j| < \delta$. Из условия выбора δ мы можем заключить, что

$$|g(x^0) - \widetilde{g}(x^0 \mid a_j)| < \varepsilon. \tag{14}$$

Из неравенства треугольника $|y^* - g(x^0)| \le |y^* - \widetilde{g}(x^0 \mid a_j)| + |\widetilde{g}(x^0 \mid a_j) - g(x^0)|$ и (14) непосредственно следует

$$|y^* - g(x^0)| \ge |\widetilde{g}(x^0 \mid a_j) - g(x^0)| + |y^* - g(x^0)| \ge \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2. \tag{15}$$

Согласно [7], центр $P_j(x)$ и ширина $\Delta_j(x)$ нечеткого множества B^j рассчитываются как $P_j(x) = c_1^j \cdot x + c_0^j$, $\Delta_j(x) = w_1^j \cdot |x| + w_0^j$. Из (10)-(12) получаем

$$P_j(x^0) = c_1^j \cdot x^0 + c_0^j = g'(a_j)x^0 - g'(a_j)a_j + g(a_j) = \widetilde{g}(x^0 \mid a_j),$$

$$\Delta_j(x^0) = w_1^j \cdot |x^0| + w_0^j = \frac{\varepsilon \cdot |x^0|}{4\max\{|a_j - \delta|, |a_j + \delta|\}} + \varepsilon/4.$$

Учитывая то, что справедливо $|x^0 - a_j| < \delta$, а также (15), можно заключить

$$\Delta_j(x^0) \le \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2. \tag{16}$$

Принимая во внимание тот факт, что множество B^j является треугольным, а также (13), (16), получаем

$$\mu_{B^j}(y^*) = 0,$$
$$\mu_{\widetilde{B}^j}(y^*) = T^*(\alpha_j, \mu_{B^j}(y^*)) + 1 - \alpha_j = 1 - \alpha_j,$$
$$\mu_{\widetilde{\widetilde{B}}^j}(y^*) = T_{bp}(w_j, \mu_{\widetilde{B}^j}(y^*)) = T_{bp}(w_j, 1 - \alpha_j).$$

Положим $\widetilde{\gamma}_j \overset{\Delta}{=} 0$ при $\alpha_j = \mu_{A^j}(x^0) = 0$ и $\widetilde{\gamma}_j \overset{\Delta}{=} T_{bp}(w_j, 1 - \alpha_j)$ при $\alpha_j = \mu_{A^j}(x^0) > 0$, а также $\widetilde{\gamma} = \max\limits_j \widetilde{\gamma}_j$. Из (3) получаем $\mu_C(y^*) = \widetilde{\gamma}$. Заметим, что как только точка x^0 зафиксирована, значение $\widetilde{\gamma}$ не зависит от выбора y^*, если только справедливо (13).

Покажем теперь, что $\widetilde{\gamma} = \gamma = \max\limits_y \mu_C(y)$. Рассмотрим произвольную точку $y^{**} \ne y^*$. В случае $|y^{**} - g(x^0)| > \varepsilon$ справедливы все приведенные выше рассуждения и $\mu_C(y^{**}) = \tilde{\gamma}$. Пусть $\left|y^{**} - g(x^0)\right| \le \varepsilon$. Рассмотрим три случая:

a) $\mu_{A^j}(x^0) = 0 = \alpha_j$, откуда $\mu_{\tilde{\tilde{B}}^j}(y^{**}) = 0 = \tilde{\gamma}_j$;

b) $\mu_{A^j}(x^0) > 0$ и $\left|y^{**} - \tilde{g}(x^0 \mid a^j)\right| > \Delta_j(x^0)$. Следовательно,

$$\mu_{\tilde{\tilde{B}}_j}(y^{**}) = T_{bp}(w_j, 1 - \alpha_j) = \tilde{\gamma}_j;$$

c) $\mu_{A^j}(x^0) > 0$ и $\left|y^{**} - \tilde{g}(x^0 \mid a^j)\right| \le \Delta_j(x^0)$. Тогда $\mu_{B^j}(y^{**}) > 0$ и $\mu_{\tilde{B}^j}(y^{**}) = T^*(\alpha_j, \mu_{B^j}(y^{**})) + 1 - \alpha_j > 1 - \alpha_j$. Отсюда по свойству треугольных норм $\mu_{\tilde{\tilde{B}}^j}(y^{**}) > T_{bp}(w_j, 1 - \alpha_j) = \tilde{\gamma}_j$.

Рассмотрев случаи a), b) и c), заключаем, что для всех y^{**} выполняется $\mu_{\tilde{\tilde{B}}^j}(y^{**}) \ge \tilde{\gamma}_j$, $j = \overline{1, M}$. Из (3) получаем:

$$\mu_C(y^{**}) = \max_{j = \overline{1,M}} \mu_{\tilde{\tilde{B}}^j}(y) \ge \max_{j = \overline{1,M}} \tilde{\gamma}_j = \tilde{\gamma}.$$

Кроме того, $\exists y^* : \mu_C(y^*) = \tilde{\gamma}$. Поэтому $\tilde{\gamma} = \gamma = \min\limits_y \mu_C(y)$, и утверждение II доказано.

Докажем теперь утверждение I.

Для синглетона в точке x^0 можно найти меры соответствия предпосылкам правил $\{\alpha_j\}_{j=1}^M$, причем в силу того, что O_{a_j} является δ-сетью, существует поднабор $\{j_k\}_{k=1}^m$ такой, что $\alpha_{j_k} > 0$. Выберем $j_0 = \arg\max\limits_j \alpha_j$ и положим $\bar{y} = \tilde{g}(x^0 \mid a_{j_0})$. Тогда, очевидно, $\mu_{B^{j_0}}(\bar{y}) = 1$, т.к. $\bar{y}$ совпадает с центром множества B^{j_0}. Далее

$$\mu_{\tilde{B}^{j_0}}(\bar{y}) = T^*(\alpha_{j_0}, \mu_{B^{j_0}}(\bar{y})) + 1 - \alpha_{j_0} = 1,$$

$$\mu_{\tilde{\tilde{B}}^{j_0}}(\bar{y}) = T_{bp}(w_{j_0}, \mu_{\tilde{B}^{j_0}}(\bar{y})) = w_{j_0}.$$

Из того, что $\alpha_{j_0} = \max\limits_j \alpha_j$, следует, что $w_{j_0} = \max\limits_j w_j$. Покажем, что $w_{j_0} = \mu_C(\bar{y})$. Найдется j^*: $\alpha_{j^*} \le \alpha_{j^0}$, тогда из (5) следует, что $w_{j^*} \le w_{j^0}$. Имеем: $\mu_{\tilde{B}^{j^*}}(\bar{y}) \le 1 = \mu_{\tilde{B}^{j_0}}(\bar{y})$. По свойству треугольных норм

$$\mu_{\tilde{\tilde{B}}_{j^*}}(\bar{y}) = T_{bp}\left(w_{j^*}, \mu_{\tilde{B}_{j^*}}(\bar{y})\right) \le T_{bp}\left(w_{j_0}, \mu_{\tilde{B}_{j_0}}(\bar{y})\right) = \mu_{\tilde{\tilde{B}}_{j_0}}(\bar{y}) = w_{j^0}.$$

Отсюда и из (3) следует, что $\mu_C(\bar{y}) = w_{j_0}$. Очевидно, что $\mu_C(\bar{y}) > 0$. Также справедливо

$$\mu_C(\tilde{y}) = w_{j_0} = \max_j w_j \geq w_j = T_{bp}(w_j, 1) > T_{bp}(w_j, 1-\alpha_j).$$

В силу того, что ограниченное произведение обладает свойством строгой монотонности, утверждение I доказано.

Учитывая произвольность x^0, мы можем утверждать, что оператор дефаззификации $\tilde{y} = D(C) = D(C(x))$ применим для любой точки x. Заметим также, что

$$\forall y \notin (g(x) - \varepsilon;\, g(x) + \varepsilon) \Rightarrow \mu_C(y) = \gamma = \min_{\tilde{y}} \mu_C(\tilde{y}).$$

Отсюда и из (9) следует, что $\tilde{y} = D(C) \in (g(x) - \varepsilon;\, g(x) + \varepsilon)$, откуда непосредственно выводится утверждение теоремы.

Отметим, что рассмотренная схема нечеткого вывода является обобщением и гибридом контроллеров типа Мамдани и Такаги-Сугено. Важная особенность первых – возможность описания правил на естественном человеческом языке, достоинство вторых – использование функций в правой части правил, что повышает гибкость системы. Обобщенный контроллер обладает обоими этими свойствами, и доказательство теоремы должно послужить шагом к его дальнейшему развитию и использованию.

Литература

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.

2. Lee C.C. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller. Part I, II. // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1990. – Vol. 20. – P. 404-435.

3. Castro J.L., Delgado M. Fuzzy Systems With Defuzzification Are Universal Approximators // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1996. – Vol. 26. – P. 149-152.

4. Nguyen H.T., Kreinovich V., Sirisaengtaksin O. Fuzzy Control as Universal Control Tool // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol. 80, No. 1. – P. 71-86.

5. Салахутдинов Р.З., Зиновьев И.П. Системы нечеткого вывода, основанные на аддитивных генераторах // Исслед. по информатике. Вып. 10. – Казань: Отечество, 2007. – С. 57-67.

6. Салахутдинов Р.З., Зиновьев И.П. Об одном подходе к построению обобщенных нечетких контроллеров // Системный анализ в проектировании и управлении. Тр. XI междунар. научно-практ. конф. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. – С. 40-43.

7. Tanaka H., Uejima S., Asai K. Linear Regression Analysis with Fuzzy Model // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1982. – Vol. 12. – P. 903-907.