Н. П. Бондаренко, Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного оператора Штурма–Лиувилля, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 65–70

DOI: 10.4213/faa3062

УДК 517.984

Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного оператора Штурма–Лиувилля*

© 2012. Н. П. Бондаренко

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу $L = L(Q)$ для матричного уравнения Штурма–Лиувилля

$$\ell Y := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \qquad x \in (0,\pi), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$Y(0) = 0, \quad Y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=1,\dots,m}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр и $Q(x)$ — потенциал, $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=1,\dots,m}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$ — комплекснозначные функции и $Q(x) = Q^*(x)$ при п.в. x на $(0,\pi)$.

В этой работе рассматривается обратная задача спектрального анализа, состоящая в восстановлении матричного оператора, определенного первым равенством в (1) и условиями (2), по его спектральным характеристикам. Обратные задачи для скалярного случая ($m = 1$) изучены достаточно полно (см. монографии [1]–[3] и литературу в них), однако матричный случай является существенно более трудным для исследования. Обратные задачи для уравнения (1) изучались в работах [4]–[11].

В данной работе получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного уравнения Штурма–Лиувилля (1) с краевыми условиями (2). Для исследования используется подход из [10]–[11], основанный на развитии идей метода спектральных отображений.

2. Постановка задачи и основная теорема. Пусть $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$ — матричные решения уравнения (1) при начальных условиях

$$S(0,\lambda) = 0_m, \quad S'(0,\lambda) = I_m, \quad C(0,\lambda) = I_m, \quad C'(0,\lambda) = 0_m,$$

где I_m — единичная $(m \times m)$-матрица, а 0_m — нулевая $(m \times m)$-матрица. Функция $\Delta(\lambda) := \det S(\pi,\lambda)$ называется *характеристической функцией* задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ, ее нули вещественны и совпадают с собственными значениями краевой задачи L с учетом кратностей.

Пусть $\omega = \omega^*$ — некоторая $(m \times m)$-матрица. Будем говорить, что задача $L(Q)$ принадлежит классу $A(\omega)$, если $\frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx = \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $L \in A(\omega)$, где $\omega \in \mathscr{D} = \{\omega : \omega = \operatorname{diag}\{\omega_1,\dots,\omega_m\},$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС) и Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

$\omega_1 \leqslant \dots \leqslant \omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением к задаче L унитарного преобразования.

Лемма 1. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathscr{D}$. Задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nq}\}_{n\geqslant 1, q=1,\dots,m}$, $\lambda_{11} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{1m} \leqslant \lambda_{21} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{2m} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{n1} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{nm} \leqslant \dots$. При этом*

$$\rho_{nq} := \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \qquad \{\varkappa_{nq}\}_{n\geqslant 1} \in l_2,\ q = 1, \dots, m. \tag{3}$$

В работе [8] исследовался случай асимптотически простого спектра: $\omega_1 < \dots < \omega_m$. Для этого случая были получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. В настоящей работе это ограничение не налагается. Преодолеваются принципиальные трудности, связанные с возможностью наличия бесконечного количества групп кратных собственных значений различной кратности. Отметим также, что метод, используемый авторами работы [8], не дает конструктивного решения задачи.

Пусть $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1,\dots,m}$ — матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $\Phi(0, \lambda) = I_m$, $\Phi(\pi, \lambda) = 0_m$. Будем называть $\Phi(x, \lambda)$ *решением Вейля* задачи L. Положим $M(\lambda) := \Phi'(0, \lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,m}$ называется *матрицей Вейля* задачи L. Матрица Вейля представляет собой обобщение функции Вейля для скалярного уравнения Штурма–Лиувилля (см. [1], [3]).

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$M(\lambda) = -(S(\pi, \lambda))^{-1} C(\pi, \lambda).$$

Матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ, ее полюсы совпадают с собственными значениями λ_{nq} задачи L. При этом ранги вычетов этой функции относительно полюсов совпадают с кратностями соответствующих собственных значений.

Положим

$$\alpha_{nq} := -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda).$$

Набор $\Lambda := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 1,\, q=1,\dots,m}$ будем называть *спектральными данными* задачи L.

Обратная задача 1. По заданным спектральным данным Λ построить потенциал Q.

Эта постановка задачи сохраняет преемственность по отношению к одной из классических постановок для скалярного случая [3]. В случае $m = 1$ исследуется задача восстановления оператора по собственным значениям λ_n, $n \geqslant 1$, и весовым числам $\alpha_n := \bigl(\int_0^\pi S^2(x, \lambda_n)\, dx\bigr)^{-1}$. Весовые числа можно ввести эквивалентным образом как вычеты функции Вейля, и именно такой вариант оказывается более удобным для обобщения на матричный случай.

Пусть $\{\lambda_{n_k q_k}\}_{k\geqslant 1}$ — множество всех различных собственных значений из набора $\{\lambda_{nq}\}_{n\geqslant 1,\, q=1,\dots,m}$. Положим

$$\alpha'_{n_k q_k} := \alpha_{n_k q_k}, \quad k \geqslant 1, \qquad \alpha'_{nq} = 0_m, \quad (n, q) \notin \{(n_k, q_k)\}_{k\geqslant 1}.$$

Пусть $\omega = \mathrm{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_m\} \in \mathscr{D}$. Обозначим через $\{\omega_{m_s}\}_{s=1,\dots,p}$ множество всех различных значений среди $\{\omega_q\}_{q=1,\dots,m}$, причем

$$1 = m_1 < \dots < m_{p+1} = m + 1,$$
$$\omega_{m_s} = \omega_{m_s+1} = \dots = \omega_{m_{s+1}-1}, \qquad s = 1, \dots, p.$$

Введем обозначение

$$\alpha_n^{(s)} = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \alpha'_{nq}, \qquad s = 1, \dots, p.$$

Лемма 3. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathscr{D}$. Тогда верны асимптотические формулы*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2n^2}{\pi}\left(I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}\right), \qquad \{\|\varkappa_n^{(s)}\|\}_{n\geqslant 1} \in l_2,\ s = 1, \dots, m, \tag{4}$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=1,\dots,m}, \qquad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & j = k,\ \omega_j = \omega_s, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и $\|\cdot\|$ — норма матрицы, $\|a\| = \max_{j,k} |a_{jk}|$.

Будем писать $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 1, q=1,\dots,m} \in \mathrm{Sp}$, если из равенства $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ следует, что $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$.

Теорема 1. *Пусть $\omega \in \mathscr{D}$. Для того чтобы набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 1, q=1,\dots,m} \in \mathrm{Sp}$ был спектральными данными некоторой задачи $L \in A(\omega)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

1. *Верны асимптотические формулы* (3) *и* (4).

2. *Все λ_{nq} вещественны, $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 1$, $q = 1, \dots, m$ и ранги матриц α_{nq} равны кратностям собственных значений λ_{nq}.*

3. *Для любого вектора-строки $\gamma(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, который является целой функцией и удовлетворяет оценке $\gamma(\lambda) = O(\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\pi))$ при $|\lambda| \to \infty$, из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ при всех $n \geqslant 1$, $q = 1, \dots, m$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.*

Данная теорема является обобщением известного результата для скалярного случая (см. [1]–[3]). Однако в скалярном случае условие 3 следует из условий 1 и 2, в то время как в матричном случае это неверно.

Отметим, что доказательство теоремы 1 конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи 1.

3. Алгоритм решения обратной задачи 1. Предположим, что нам известны спектральные данные Λ краевой задачи $L = L(Q) \in A(\omega)$, $\omega \in \mathscr{D}$. Положим

$$D(x, \lambda, \mu) = \frac{\langle S^*(x, \bar{\mu}), S(x, \lambda)\rangle}{\lambda - \mu}, \qquad \langle Y, Z\rangle := Y'Z - YZ'.$$

Выберем модельную краевую задачу $\widetilde{L} = L(\widetilde{Q}) \in A(\omega)$ (например, можно взять $\widetilde{Q}(x) = 2\omega/\pi$). Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$. Положим

$$\xi_n = \sum_{q=1}^{m} |\rho_{nq} - \tilde\rho_{nq}| + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\rho_{nq} - \rho_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\tilde\rho_{nq} - \tilde\rho_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p} n^{-2} \|\alpha_n^{(s)} - \tilde\alpha_n^{(s)}\|.$$

Согласно леммам 1 и 3,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\xi_n)^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n < \infty. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_{nq0} = \lambda_{nq}, \quad \lambda_{nq1} = \tilde\lambda_{nq}, \quad \alpha'_{nq0} = \alpha'_{nq}, \quad \alpha'_{nq1} = \tilde\alpha'_{nq},$$
$$S_{nqi}(x) = S(x, \lambda_{nqi}), \;\; \tilde S_{nqi}(x) = \tilde S(x, \lambda_{nqi}), \;\; F_{klj,nqi}(x) = (-1)^j \alpha'_{klj} D(x, \lambda_{nqi}, \lambda_{klj}),$$
$$\tilde F_{klj,nqi}(x) = (-1)^j \alpha'_{klj} \tilde D(x, \lambda_{nqi}, \lambda_{klj}), \qquad n, k \geqslant 1, \; q, l = 1, \dots, m, \; i, j = 0, 1.$$

Пусть $\chi_n := \xi_n^{-1}$ при $\xi_n \neq 0$ и $\chi_n = 0$ при $\xi_n = 0$. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ определим матрицы $\psi_{nqi}(x)$ формулами

$$\begin{gathered} \psi_{nm_s0}(x) = n\chi_n(S_{nm_s0}(x) - S_{nm_s1}(x)), \quad \psi_{nm_s1}(x) = nS_{nm_s1}(x), \\ \psi_{nqi}(x) = n\chi_n(S_{nqi}(x) - S_{nm_si}(x)), \\ n \geqslant 1, \; s = 1, \dots, p, \; m_s < q < m_{s+1}, \; i = 0, 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим векторы-строки с матричными компонентами

$$S_n(x) = [S_{n10}(x), S_{n11}(x), S_{n20}(x), S_{n21}(x), \dots, S_{nm0}(x), S_{nm1}(x)],$$
$$\psi_n(x) = [\psi_{n10}(x), \psi_{n11}(x), \psi_{n20}(x), \psi_{n21}(x), \dots, \psi_{nm0}(x), \psi_{nm1}(x)].$$

Тогда определения (6) можно переписать в виде $\psi_n(x) = S_n(x) X_n$, где X_n — числовые $(2m \times 2m)$-матрицы. Введем также $R_{k,n}(x) = X_k^{-1} F_{k,n}(x) X_n$ через матрицы $F_{k,n}(x)$ и аналогично определим $\tilde\psi_n(x)$ и $\widetilde R_{k,n}(x)$. Стандартным образом [3, п. 1.4.1] можно получить оценки

$$\|\psi_{nqi}(x)\|, \|\tilde\psi_{nqi}(x)\| \leqslant C, \qquad \|\widetilde R_{klj,nqi}(x)\| \leqslant \frac{C\xi_k}{|n-k|+1}, \tag{7}$$

где C не зависит от x, n, q, i, k, l, j.

Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей $a = [a_n]_{n\geqslant 1}$, $a_n = [a_{nqi}]_{q=1,\dots,m,\, i=0,1}$, где a_{nqi} суть $(m \times m)$-матрицы, с нормой $\|a\|_B = \sup_n \max_{q,i} \|a_{nqi}\|$. Из (5) и (7) следует, что при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ вектор $\psi(x) = [\psi_n(x)]_{n\geqslant 1}$ принадлежит B и оператор $I + \widetilde R(x)$ (где I — единичный оператор, $\widetilde R(x) = [\widetilde R_{k,n}(x)]_{k,n\geqslant 1}$), действующий из B в B, является линейным ограниченным оператором.

Теорема 2. 1. *При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ вектор $\psi(x) \in B$ удовлетворяет уравнению*

$$\tilde\psi(x) = \psi(x)(I + \widetilde R(x)) \tag{8}$$

в банаховом пространстве B.

2. *Оператор* $I+\widetilde{R}(x)$ *имеет ограниченный обратный, т.е. уравнение* (8) *однозначно разрешимо.*

Уравнение (8) называется *основным уравнением* обратной задачи. Таким образом, нелинейная обратная задача 1 сведена к линейному уравнению (8), что дает следующий алгоритм ее решения.

Алгоритм 1. *Дан набор* $\Lambda=\{\lambda_{nq},\alpha_{nq}\}_{n\geqslant 1,\,q=1,\dots,m}$.

1. *Выбираем* $\widetilde{L}\in A(\omega)$ *и вычисляем* $\tilde{\psi}(x)$ *и* $\widetilde{R}(x)$.
2. *Находим* $\psi(x)$ *из уравнения* (8) *и вычисляем* $S_n(x)=\psi_n(x)X_n^{-1}$.
3. *Строим* $Q(x)$ *по формуле*

$$Q(x)=\widetilde{Q}(x)+\varepsilon(x),\quad \varepsilon(x):=-2\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j S_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{S}^*_{klj}(x)\biggr)'. \tag{9}$$

4. Схема доказательства теоремы 1. Наибольший интерес представляет доказательство достаточности условий теоремы 1. Приведем общую схему доказательства, отсылая читателя за подробностями к работе [11], в которой доказана аналогичная теорема для случая с другими краевыми условиями.

Пусть дан набор $\{\lambda_{nq},\alpha_{nq}\}_{n\geqslant 1,\,q=1,\dots,m}\in\mathrm{Sp}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Выберем $\widetilde{L}\in A(\omega)$, построим $\tilde{\psi}(x)$, $\widetilde{R}(x)$ и рассмотрим уравнение (8).

Лемма 4. *При каждом фиксированном* $x\in[0,\pi]$ *оператор* $I+\widetilde{R}(x)$, *действующий из* B *в* B, *имеет ограниченный обратный и основное уравнение* (8) *имеет единственное решение* $\psi(x)\in B$.

Доказательство. Заметим, что к $\widetilde{R}(x)$ сходится последовательность конечномерных операторов $\widetilde{R}^s(x)=[\widetilde{R}^s_{k,n}(x)]_{k,n\geqslant 1}$, $R^s_{k,n}(x)=R_{k,n}(x)$ при $k\leqslant s$ и $R^s_{k,n}(x)=0$ при $k>s$, $s=1,2,\dots$. Поэтому для $\widetilde{R}(x)$ справедлива первая теорема Фредгольма. Для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что однородное уравнение

$$\beta(x)(I+\widetilde{R}(x))=0 \tag{10}$$

имеет только нулевое решение. Пусть $\beta(x)\in B$ — решение уравнения (10), $\gamma_n(x):=\beta_n(x)X_n$.

Построим матрицы-функции $\gamma(x,\lambda)$, $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ по формулам

$$\gamma(x,\lambda)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\biggl[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde{S}^*_{kl0}(x),\tilde{S}(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl0}}-\gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde{S}^*_{kl1}(x),\tilde{S}(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl1}}\biggr],$$

$$\Gamma(x,\lambda)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\biggl[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde{S}^*_{kl0}(x),\tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl0}}-\gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde{S}^*_{kl1}(x),\tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl1}}\biggr],$$

$$B(x,\lambda)=\gamma^*(x,\bar{\lambda})\Gamma(x,\lambda).$$

Нетрудно показать, что $\gamma(x,\lambda)$ — целая функция по λ, она удовлетворяет оценке

$$\|\gamma(x,\lambda)\|\leqslant C(x)|\rho|^{-1}\exp(|\mathrm{Im}\,\rho|\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1},\qquad \rho=\sqrt{\lambda},\ |\rho|>\rho^*, \tag{11}$$

и $\gamma(x,\lambda)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ при каждом фиксированном $x\in[0,\pi]$.

Рассмотрим контуры $\Gamma_N = \{\lambda\colon |\lambda| = (N+1/2)^2\}$. Вычисляя предел контурных интегралов

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} B(x,\lambda)\,d\lambda$$

при $N\to\infty$ двумя способами (см. [11, лемма 9]): используя (11) и аналогичную оценку для $\Gamma(x,\lambda)$ и с помощью теоремы о вычетах, приходим к соотношению $\gamma(x,\lambda_{kl0})\alpha_{kl0} = 0_m$, $k \geqslant 1$, $l = 1,\ldots,m$. Согласно условию 3 теоремы 1, $\gamma(x,\lambda) \equiv 0$. Отсюда следует, что $\beta(x)\equiv 0$. □

Пусть $\psi(x)$ — решение уравнения (8). Получим $S_n(x) = \psi_n(x)X_n^{-1}$ и построим $Q(x)$ по формулам (9). Осталось показать, что $L = L(Q)$ — краевая задача со спектральными данными $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$, что можно проделать аналогично тому, как это делалось в [11].

Литература

[**1**] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984. [**2**] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова Думка, Киев, 1977. [**3**] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007. [**4**] З. С. Агранович, В. А. Марченко, *Обратная задача теории рассеяния*, Изд-во ХГУ, Харьков, 1960. [**5**] R. Carlson, J. Math. Anal. Appl., **267**:2 (2002), 564–575. [**6**] M. M. Malamud, in: Sturm–Liouville Theory. Past and present, Birkhauser, Basel, 2005, 237–270. [**7**] V. A. Yurko, Inverse Problems, **22**:4 (2006), 1139–1149. [**8**] D. Chelkak, E. Korotyaev, J. Funct. Anal., **257**:5 (2009), 1546–1588. [**9**] Ya. V. Mykytyuk, N. S. Trush, Inverse Problems, **26**:1 (2010), 015009. [**10**] Н. П. Бондаренко, Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. матем. мех. информ., **10**:4 (2010), 3–13. [**11**] N. Bondarenko, *Spectral analysis for the matrix Sturm–Liouville operator on a finite interval*, `http://arxiv.org/abs/1008.4339v1`.

Саратовский государственный университет
e-mail: BondarenkoNP@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
13 января 2011 г.

УДК 517.9

Оценка собственных значений весового p-лапласиана на компактных многообразиях с краем*

© 2012. Ван Линьфэн, Чжу Юэпин

1. Введение. Пусть (M^n, g) — компактное риманово многообразие с выпуклым краем ∂M (это означает, что вторая фундаментальная форма края ∂M неотрицательна на векторе внешней нормали). Ли и Яу [6] получили оценку снизу для первого ненулевого собственного значения задачи Неймана для оператора Лапласа Δ на M. Для некоторой функции $h \in C^\infty(M)$ обозначим через $d\mu = e^{h(x)}\,dV(x)$ взвешенную меру, где $dV(x)$ — мера Римана–Лебега. При рассмотрении меры $d\mu$ всегда используют m-мерную кривизну Бакри–Эмери $\mathrm{Ric}_m = \mathrm{Ric}\text{-}\mathrm{Hess}\,h - \frac{\nabla h\otimes\nabla h}{m-n}$ вместо кривизны Риччи. Здесь $m \geqslant n$, причем $m = n$ тогда и только тогда, когда h постоянна [9]. Для $p > 1$ определим ве-

*Поддержано ГФЕН (гранты 10971066, 11171254 и 10971228).