А. В. Шутов, Е. В. Коломейкина, Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади, *Модел. и анализ информ. систем*, 2015, том 22, номер 2, 295–303

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **2** (2015) 295–303

УДК 514.174.5

Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади

Шутов А. В., Коломейкина Е. В[1]

Владимирский государственный университет
600024 Россия, г. Владимир, ул. Строителей, 11
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005 Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., 5

e-mail: a1981@mail.ru *pihta2@rambler.ru*

получена 5 октября 2014

Ключевые слова: разбиения, полимино

В работе рассматривается задача о числе решетчатых разбиений плоскости на центрально–симметричные полимино заданной площади. Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. В настоящее время активно исследуются различные перечислительные комбинаторные задачи, связанные с полимино. Представляет интерес подсчет числа полимино определенных классов, а также подсчет числа разбиений конечных фигур или плоскости на полимино определенного типа. В частности, разбиение называется решетчатым, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, переводящим все разбиение в себя. Ранее нами было доказано, что если $T(n)$ – число решетчатых разбиений плоскости на полимино площади n, то справедливы неравенства $2^{n-3}+2^{[\frac{n-3}{2}]} \leq T(n) \leq C(n+1)^3(2,7)^{n+1}$. В настоящей работе мы получаем аналогичную оценку для числа решетчатых разбиений, дополнительно обладающих центральной симметрией. Пусть $T_{\text{c}}(n)$ – число решетчатых разбиений плоскости на центрально–симметричные полимино площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$. В работе доказано, что $C_1(\sqrt{2})^n \leq T_{\text{c}}(n) \leq C_2n^2(\sqrt{2.68})^n$. При доказательстве нижней оценки использована явная конструкция, позволяющая построить требуемое число решетчатых разбиений плоскости. Доказательство верхней оценки основано на критерии существования решетчатого разбиения плоскости на полимино, а также на теории самонепересекающихся блужданий на квадратной решетке.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14–01–00360–А, 12–01–33080–мол–а–вед и 11–01–00633–А).

Введение

Полимино, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов (клеток полимино), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Понятие и сам термин “полимино” были введены в 1953 году С. В. Голомбом [10], [1] и с тех пор занимают внимание сначала любителей занимательной математики, а позднее и профессиональных исследователей всего мира.

В частности, в последние годы активно изучаются задачи, связанные с перечислением различных классов полимино. Обзор современных результатов в данной области может быть найден в книге [2].

Одной из самых важных и пока не решенных задач, связанных с полимино, является нахождение необходимого и достаточного условия существования разбиения плоскости на заданные полимино. В работе [3] найдены все классы полимино, разбивающие плоскость, с числом клеток $n \leq 7$. Позднее для $n \leq 9$ аналогичное исследование было проведено в [8]. В работе [9] проведена классификация полимино по типу даваемого ими простейшего разбиения плоскости для $n \leq 25$. Отметим также работы [11] – [14], в которых рассматривались алгоритмы построения правильных разбиений плоскости на полимино с кристаллографической группой симметрии $p2$ и $p4$.

В настоящее время не известно, существует или нет алгоритм для определения, является ли конкретное полимино прототайлом какого-либо разбиения плоскости на полимино. Однако для более общей задачи установления существования разбиения плоскости на полимино из заданного конечного набора полимино (при условии, что любое полимино из набора имеется в неограниченном количестве экземпляров) Голомб [4] установил ее неразрешимость. Позднее Амман, Грюнбаум и Шепард [5] показали, что существует набор из 3 полимино, разбивающих плоскость только непериодически. Они также доказали, что для произвольного набора из трех полимино задача проверки существования для них разбиения плоскости в общем случае неразрешима.

1. Основные понятия

Нас будут интересовать решетчатые разбиения плоскости на полимино.

Определение 1. Разбиение называется *трансляционным*, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру некоторым параллельным переносом.

Определение 2. Разбиение называется *решетчатым*, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.

Без ограничения общности можно считать, что все вершины полимино являются точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$. Очевидно, что решетчатые разбиения плоскости являются подмножеством трансляционных разбиений. Мы будем рассматривать решетчатые разбиения плоскости на полимино, гомеоморфные диску. Также мы будем предполагать, что решетка периодов разбиения является подрешеткой целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.

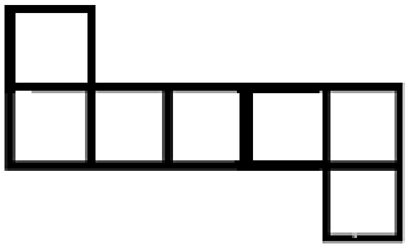


Рис. 1. Полимино

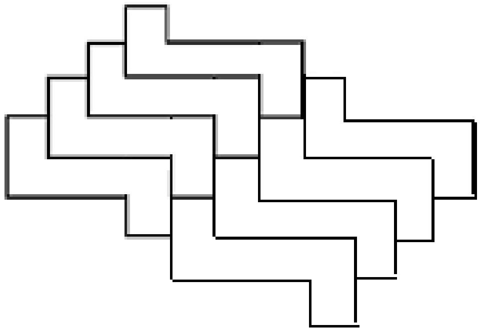


Рис. 2. Пример решетчатого разбиения

Можно доказать, что существует ровно два топологически различных типа решетчатых разбиений плоскости, а именно: правильные разбиения плоскости на квадраты и шестиугольники. Пусть n — площадь полимино, то есть полимино состоит из n квадратов площадью 1 квадратная единица каждый. Возникает задача подсчитать число $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n. Числа $T(n)$ для малых значений n были вычислены в работах Глена Роудса [8] и Малеева А.В. [15]. В работе [16] также рассматривались решетчатые разбиения плоскости на полимино, решетки трансляции которых принадлежат заданному семейству. Число трансляционных разбиений плоскости на полимино заданной площади, топологически эквивалентных правильному разбиению плоскости на квадраты, рассмотрено в работе Брлеко и Фросини [17]. Кроме того, в работе [20] был предложен алгоритм сложности $O(n^2)$, позволяющий определить, порождает ли полимино площади n трансляционное разбиение плоскости. Позднее данный алгоритм был усовершенствован в работе [6]. В работе [19] для числа $T(n)$ были доказаны оценки

$$2^{n-3} + 2^{[\frac{n-3}{2}]} \leq T(n) \leq C(n+1)^3(2.7)^{n+1}.$$

В настоящей работе рассматривается задача о числе решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Для числа $T_c(n)$ решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади n справедлива следующая оценка:*

$$\mathrm{C}_1 * (\sqrt{2})^n \leq T_c(n) \leq C_2 * n^2(\sqrt{2.68})^n.$$

2. Нижняя оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади

Для получения нижней оценки предъявим явную конструкцию требуемого числа разбиений.

Пусть n — площадь полимино. Возьмем произвольную центрально-симметричную последовательность w из нулей и единиц длины $n-1$. Строим по ней ломаную следующим образом: 0 в последовательности соответствует сдвигу вправо, 1 в последовательности соответствует сдвигу вверх. Далее сдвигаем ломаную на вектор $(-1;1)$. Полученная ломаная с исходной не пересекаются. Дополняем эти две ломаные двумя уголками до образования полимино. Легко видеть, что мы получили полимино площади n. Также легко видеть, что в силу центральной симметричности исходной последовательности, полученное полимино также будет центрально-симметричным.

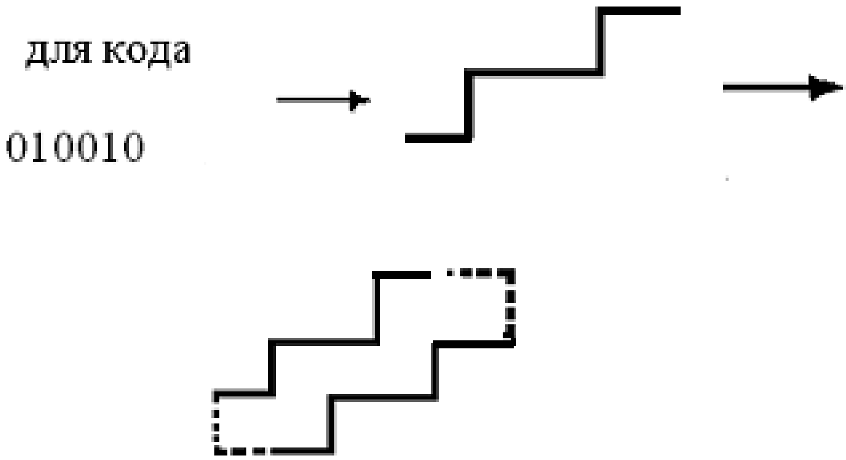


Рис. 3. Пример образования полимино из кода

Нетрудно убедиться, что все построенные нами полимино порождают решетчатые разбиения плоскости, причем соответствующая решетка имеет базис (-1;1) и (n;1), то есть зависит только от площади полимино n.

Заметим, что число различных центрально-симметричных последовательностей из нулей и единиц ранво $2^{\frac{n-1}{2}}$ для четного $n-1$ и равно $2^{\frac{n}{2}-1}$ для нечетного $n-1$. Однако разбиения, полученные таким образом, могут повторяться.

На множестве последовательностей из нулей и единиц определено преобразование инвертирования, состоящее в замене всех нулей последовательности на единицы и наоборот. Данное преобразование сохраняет свойство центральной симметричности и не имеет неподвижных точек на множестве центрально-симметричных последовательностей. При этом построенные нами решетчатые разбиения плоскости на полимино, полученные из пары инвертированных последовательностей, всегда оказываются эквивалентными с точностью до движения. Таким образом, количество построенных нами разбиений ровно в два раза меньше количества различных центрально-симметричных последовательностей нулей и единиц длины $n-1$.

Таким образом, нами доказана нижняя оценка

$$T_c(n) \geq \begin{cases} \frac{2^{n/2}}{2} = (\sqrt{2})^{n-2}, & n-1\text{– нечетно} \\ \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{2} = (\sqrt{2})^{n-3}, & n-1\text{– четно,} \end{cases}$$

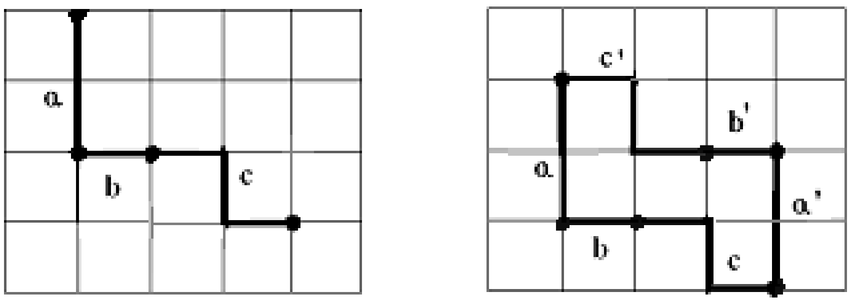
которая легко преобразуется к оценке из теоремы 1.

3. Верхняя оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади

Для доказательства верхней оценки нам потребуется описание решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино.

Для этого воспользуемся критерием из работы Гамбини и Вьюилона [20]. Любую ломаную на квадратной решетке можно закодировать словом из 4 символов, например: 1 – вправо, 2 – вверх, 3 – влево, 4 – вниз.

Ломаная AB, соединяющая точки A и B, имеет направление от точки, расположенной левее и ниже, к точке, расположенной правее и выше друг относительно друга. Для незамкнутой ломаной данное кодирование единственно, для замкнутой ломаной — нет. Для слова a определим обратное слово a' как код той же самой ломаной, взятый в обратном порядке. Покажем на рис. 5 пример полимино при $a = 44$, $b = 1$, $c = 141$. Тогда $a' = 22$, $b' = 3$, $c' = 323$:



ломаная abc граница $abca'b'c'$ полимино

Рис. 4. Восстановление полимино по коду

Сформулируем теорему из работ [18], [20]:

Теорема. *Полимино дает трансляционное разбиение тогда и только тогда, когда его граница представима в виде $abca'b'c'$ для некоторых a, b, c, причем слово c может быть пустым. При этом различным решетчатым разбиениям соответствуют различные представления границы.*

Данная теорема имеет достаточно простой геометрический смысл. Дело в том, что каждое полимино решетчатого разбиения граничит либо с шестью, либо с четырьмя другими полимино, в зависимости от топологического типа разбиения. Соответственно, для разбиения, топологически эквивалентного разбиению плоскости на правильные шестиугольники, граница полимино разбивается на шесть участков, которые и кодируются словами a, b, c, a', b', c'. Если же разбиение топологически эквивалентно разбиению плоскости на квадраты, то граница состоит из четырех участков и слова c, c' необходимо считать пустыми.

Предположим теперь, что рассматриваемое нами полимино является центрально-симметричным. Тогда для любой пары соседних полимино в разбиении существует преобразование центральной симметрии, переводящее одно полимино в другое.

Общая часть границы должна переходить в себя при этом преобразовании, а значит, быть центрально-симметричной. Таким образом, мы получили, что в случае центрально-симметричного полимино все шесть слов a, b, c, a', b', c' являются центрально-симметричными (пустое слово по определению будем считать центрально-симметричным).

Пусть теперь $t_c(p)$ – число различных решетчатых разбиений плоскости на полимино полупериметра p. Данное определение корректно, так как периметр любого полимино – четное число.

Заметим, что каждое из слов a, b, c кодирует центрально-симметричную несамопересекающуюся ломаную, а суммарная длина всех трех ломаных равна p.

Известно [21], что для числа $m(l)$ несамопересекающихся ломаных длины l на квадратной решетке существует предел

$$\mu = \lim_{l\to\infty}(m(l))^{1/l}).$$

Константа μ называется постоянной связности для решетки $\mathbb{Z}^d$. Отсюда получаем, что для любого положительного ε справедливо неравенство

$$m(l) \le C(\varepsilon)(\mu+\varepsilon)^l.$$

Пусть $m_c(l)$ — число несамопересекающихся-центрально симметричных ломаных длины l. Ясно, что такая ломаная полностью определяется своей половиной, которая также является несамопересекающейся. Таким образом, справедлива оценка

$$m_c(l) \le \begin{cases} m((l+1)/2), & l\text{– нечетно} \\ m(l/2), & l\text{– четно} \end{cases}.$$

Отсюда получаем, что

$$m_c(l) \le m((l+1)/2) \le C(\varepsilon)(\sqrt{\mu+\varepsilon})^l$$

для всех l.

Пусть теперь ломаные, кодируемые словами a, b, c, имеют длины l_1, l_2, l_3 соответственно. Тогда для числа решетчатых разбиений плоскости на центрально–симметричные полимино полупериметра p верно следующее:

$$t(p) = m(p) \le \sum_{l_1+l_2+l_3=p, l_i\ge 0} m(l_1)m(l_2)m(l_3) \le$$

$$\le C(\varepsilon) \sum_{l_1+l_2+l_3=p, l_i\ge 0} (\sqrt{\mu+\varepsilon})^{l_1}(\sqrt{\mu+\varepsilon})^{l_2}(\sqrt{\mu+\varepsilon})^{l_3} \le$$

$$\le C(\varepsilon) \sum_{l_1+l_2+l_3=p, l_i\ge 0} (\sqrt{\mu+\varepsilon})^{l_1+l_2+l_3} \le C(\varepsilon)(\sqrt{\mu+\varepsilon})^p \sum_{l_1+l_2+l_3=p, l_i\ge 0} 1 \le C(\varepsilon)(\sqrt{\mu+\varepsilon})^p \cdot p^2.$$

Итак, мы получили, что число трансляционных разбиений на полимино с периметром p не превосходит

$$t_c(p) \le C(\varepsilon)p^2(\sqrt{\mu+\varepsilon})^p.$$

Осталось перейти к площади. Методом математической индукции легко получить связывающее площадь и полупериметр неравенство $2p \leq 2n+2$. Для получения верхней оценки числа трансляционных разбиений плоскости на полимино остается просуммировать предыдущую оценку по p от 1 до $n+1$:

$$T_c(n) \leq \sum_{p=1}^{n+1} t_c(p) \leq \sum_{p=1}^{n+1} C(\varepsilon) p^2 (\sqrt{\mu + \varepsilon})^p.$$

Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon) x^2 (\sqrt{\mu+\varepsilon})^x dx$ и учитывая, что

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right),$$

получаем

$$T_c(n) \leq C_1(\varepsilon) n^2 (\sqrt{\mu+\varepsilon})^n.$$

В настоящее время лучшие доказанные оценки для μ имеют вид [21]

$$2.625622 \leq \mu \leq 2.679193.$$

Для простоты, мы ограничимся неравенством

$$\mu < 2.68,$$

из которого и вытекает требуемый результат. Отметим также, что компьютерный эксперимент дает гипотетическое значение

$$\mu = 2.638158...$$

однако оно остается недоказанным.

Список литературы

[1] Golomb S. W., “Checkerboards and polyominoes”, *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954), 672–682.

[2] Guttman A. J., *Polygons, polyominoes and polycubes*, Springer, 2009.

[3] Гарднер М., *Путешествие во времени*, Мир, М., 1990, 341 с.; Gardner M., *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, 1988.

[4] Golomb S. W., “Tiling with sets of polyominoes”, *Journal of Combinatorial Theory*, **9** (1970), 60–71.

[5] Ammann R., Grunbaum B., Shephard G., “Aperiodic tiles”, *Discrete and Computational Geometry*, 1991, № 6, 1–25.

[6] Brlek S., Provencal X., Fedou J.-M., “On the tiling by translation problem”, *Discrete Applied Mathematics*, **157** (2009), 464–475.

[7] Wijshoff H. A. G., van Leeuwen J., “Arbitrary versus Periodic Storage Schemes and Tesselations of the Plane Using One Type of Polyomino”, *Information and control*, **62** (1984), 1–25.

[8] Rhoads G. C., “Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **174** (2005), 329–353.

[9] Myers J., "Polyomino, polyhex and polyiamond tiling", http://www.srcf.ucam.org/jsm28/tiling/.

[10] Голомб С., *Полимино*, Мир, 1975; Golomb S. W., *Polyominoes*, 1975.

[11] Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D., "A Method to Generate Polyominoes and Polyiamonds for Tilings with Rotational Symmetry", *Graphs and Combinatorics*, **23**:1 (June 2007), 259–267.

[12] Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D., "Enumeration of Polyominoes, Polyiamonds and Polyhexes for Isohedral Tilings with Rotational Symmetry", Lecture Notes in Computer Science, **4535**, 2008, 68–78.

[13] Fukuda H., Kanomata Ch., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D., "Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains of Isohedral Tilings with Rotational Symmetry", *Symmetry*, **3**:4 (2011), 828.

[14] Horiyama T., Samejima M., "Enumeration of Polyominoes for p4 Tiling", *IEICE Tech. Rep. COMP2009-17*, **109**:54 (2009), 51–55.

[15] Малеев А. В., "Алгоритм и компьютерная программа перебора вариантов упаковок полимино в плоскости", *Кристаллография*, **58**:5 (2013), 749–756; English transl.: Maleev A. V., "Algorithm and Computer-program Search for Variants of Polyomino Packings in Plane", *Crystallography reports*, **58**:5 (2013), 760–767.

[16] Малеев А. В., Шутов А. В., "О числе трансляционных разбиений плоскости на полимино", *Математические исследования в естественных науках: Труды IX Всероссийской научной школы*, Апатиты: K & M, 2013, 101–106; [Maleev A. V., Shutov A. V., "O chisle translyatsionnykh razbieniy ploskosti na polimino", *Matematicheskie issledovaniya v estestvennykh naukakh: Trudy IX Vserossiyskoy nauchnoy shkoly*, Apatity: K & M, 2013, 101–106, (in Russian).]

[17] Brlek S., Frosini A., Rinaldi S., Vuillon L., "Tilings by translation: enumeration by a rational language approach", R15, *The electronic journal of combinatorics*, **13** (2006).

[18] Beauquier D., Nivat M., "On Translating One Polyomino To Tile the Plane", *Discrete Comput. Geom.*, **6** (1991), 575—592.

[19] Шутов А. В., Коломейкина Е. В., "Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:5 (2013), 148–157; [Shutov A. V., Kolomeykina E. V., "The Estimation of the Number of Lattice Tilings of a Plane by a Given Area Polyomino", *Modeling and analysis of information systems*, **20**:5 (2013), 148–157, (in Russian).]

[20] Gambini I., Vuillon L., "An algorothm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations", *RAIRO – Theoretical Informatics and Applications 41.2*, 2007, 147–155.

[21] Bauerschmidt R., Duminil-Copin H., Goodman J., Slade G., "Lectures on self-avoiding walks", *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings*, **15** (2010), 395–476.

The Estimating of the Number of Lattice Tilings of a Plane by a Given Area Centrosymmetrical Polyomino

Shutov A. V., Kolomeykina E. V.

Vladimir State University, Stroitelei str., 11, Vladimir, 600024, Russia
Moscow State Technical University, 2-nd Bauman str., 5, Moscow, 105005, Russia

Keywords: tilings, polyomino

We study a problem about the number of lattice plane tilings by the given area centrosymmetrical polyominoes. A polyomino is a connected plane geomatric figure formed by joiining a finite number of unit squares edge to edge. At present, various combinatorial enumeration problems connected to the polyomino are actively studied. There are some interesting problems on enuneration of various classes of polyominoes and enumeration of tilings of finite regions or a plane by polyominoes. In particular, the tiling is a lattice tiling if each tile can be mapped to any other tile by a translation which maps the whole tiling to itself. Earlier we proved that, for the number $T(n)$ of a lattice plane tilings by polyominoes of an area n, holds the inequalities $2^{n-3} + 2^{[\frac{n-3}{2}]} \leq T(n) \leq C(n+1)^3(2,7)^{n+1}$. In the present work we prove a similar estimate for the number of lattice tilings with an additional central symmetry. Let $T_c(n)$ be a number of lattice plane tilings by a given area centrosymmetrical polyominoes such that its translation lattice is a sublattice of $\mathbb{Z}^2$. It is proved that $C_1(\sqrt{2})^n \leq T_c(n) \leq C_2 n^2(\sqrt{2.68})^n$. In the proof of a lower bound we give an explicit construction of required lattice plane tilings. The proof of an upper bound is based on a criterion of the existence of lattice plane tiling by polyominoes, and on the theory of self-avoiding walks on a square lattice.

Сведения об авторах:
Шутов Антон Владимирович,
Владимирский государственный университет,
канд. физ.-мат. наук, доцент
код ORCID 0000-0002-8016-4085
Коломейкина Екатерина Викторовна,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
канд. физ.-мат. наук, доцент
код ORCID 0000-0003-3811-7477