ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

УДК 519.21

О СУММЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ $\sum_{n\leqslant x}\{ne\}$ [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе доказываются неулучшаемые по порядку оценки для остаточного члена в асимптотической формуле для суммы $\sum_{n\leqslant x}\{ne\}$.

On a sum of fractional parts $\sum_{n\leqslant x}\{ne\}$.
A. V. Shutov (Vladimir)

In the paper we prove unimproval in order of magnitude estimates for the remainder term in asymptotic formula for the sum $\sum_{n\leqslant x}\{ne\}$.

Пусть α – иррациональное число и $\{\cdot\}$ – дробная доля. Рассмотрим сумму

$$C_\alpha(x)=\sum_{n\leqslant x}\left(\{n\alpha\}-\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Оценкам суммы (1) посвящено огромное количество работ. В частности, Ильясов и Нугаева [1] в своем докладе на VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы рассмотрели случай $\alpha=e$, где e – основание натуральных логарифмов. Ими была получена оценка

$$C_e(x)=O(\ln^4 x).$$

Цель данной работы – доказать неулучшаемые по порядку оценки для $C_e(x)$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$C_e(x)=O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^2\right). \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 08-01-00326.

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant x} C_e(n) \geqslant c\cdot\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^2 \tag{3}$$

с некоторой абсолютной константой c.

Пусть $q_n(\alpha)$ – n-ое неполное частное разложения α в цепную дробь, $\frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)}$ – n-ная подходящая дробь к α. В работе [2] было доказано, что

$$\frac{1}{32}\sum_{1\leqslant j\leqslant t}(q_j(\alpha)-1) < \max_{0<n<Q_t(\alpha)} C_\alpha(n) < \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j\leqslant t} q_j(\alpha). \tag{4}$$

Хорошо известно, что разложение числа e в цепную дробь имеет вид

$$e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots].$$

Для $t\geqslant 2$ имеем

$$Q_n(e)=q_n(e)Q_{n-1}(e)+Q_{n-2}(e)\geqslant q_n(e)Q_{n-1}(e).$$

Отсюда, по индукции имеем

$$Q_n(e)\geqslant c_1\prod_{i=1}^{n} q_i(e)\geqslant c_2\prod_{i=1}^{[\frac{n}{3}]}2i\geqslant c_3 2^{[\frac{n}{3}]}\left(\left[\frac{n}{3}\right]!\right),$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Обозначим последнюю величину через Q'_n. Тогда, учитывая что $\sum_{i=1}^{t} q_i(e)\leqslant 4_3 t^2$, из (4) находим, что

$$C_e(n)<c_5 t^2$$

для всех $n\leqslant Q'_t$.

Пусть $t_0(n)=\min\{t : Q'_t>n\}$. Тогда

$$C_e(n)\leqslant c_5 t_0^2(n). \tag{5}$$

Далее, используя формулу Стирлинга для $n!$ получаем, что

$$c_6\sqrt{2\pi\frac{t}{3}}\left(\frac{2t}{3e}\right)^{\frac{t}{3}}\leqslant Q'_t\leqslant c_7\sqrt{2\pi\frac{t}{3}}\left(\frac{2t}{3e}\right)^{\frac{t}{3}}.$$

Логарифмируя, отсюда и из определения $t_0(n)$ после преобразований получаем

$$c_8 t_0(n)\ln t_0(n)\leqslant\ln n\leqslant c_9 t_0(n)\ln t_0(n).$$

Учитывая, что обратная функция для $x\ln x$ равна $\frac{x}{\ln x}(1+o(1))$, имеем

$$c_{10}\frac{\ln n}{\ln\ln n}\leqslant t_0(n)\leqslant c_{11}\frac{\ln n}{\ln\ln n},$$

откуда, с учетом (5), получаем утверждение теоремы 1.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что если $q_i(\alpha) \leqslant q_i(\beta)$ для всех i, то и $Q_i(\alpha) \leqslant Q_i(\beta)$ для всех i.

Выберем $\eta = [2; 3, 4, 5, 6, ...]$. Тогда $Q_i'' = Q_i(\eta) \geqslant Q_i(e)$ для всех i. Замечая, что $\sum_{i=1}^{t} q_i(e) \geqslant c_{12}t^2$ из правой части неравенства (4) получаем

$$\max_{0<n<Q_t''} C_e(n) \geqslant c_{13}t^2.$$

Далее, для $t \geqslant 2$ имеем

$$Q_t'' = q_t(\eta)Q_{t-1}'' + Q_{t-2}'' = (t+2)Q_{t-1}'' + Q_{t-2}'' \leqslant (t+3)Q_{t-1}''.$$

Используя индукцию, находим

$$Q_t'' \leqslant (t+3)!.$$

Пусть теперь $t_1(n) = \min\{t : (t+3)! > n\}$. Тогда

$$\max_{1\leqslant n\leqslant x} C_e(n) \geqslant c_{14}t_1^2(x).$$

Далее, вновь используя формулу Стирлинга, получаем

$$t_1(n) \geqslant c_{15}\frac{\ln n}{\ln\ln n},$$

откуда и следует утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ильясов И.И., Нугаева З.Т. Об остатке суммы $\sum_{n\leqslant x}\{ne\}$ // Материалы VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тула, 11-16 мая 2010 года. Тула: ТГПУ. -2010. -С. 93-94.

[2] Brown T.C., Shiue P.J.-S. Sums of Fractional Parts of Integer Multiplies of an Irrational // Journal of Number Theory. -1995. -V. 50. -P. 181-192.

Владимирский Государственный Гуманитарный Университет
Получено 18.05.2010