В. В. Воеводин, Применение метода спуска для определения всех корней алгебраического многочлена, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1961, том 1, номер 2, 187–195

https://www.mathnet.ru/zvmmf8549

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I | Март 1961 Апрель | № 2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПУСКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

В. В. ВОЕВОДИН

(Москва)

Определение корней алгебраических многочленов представляет собой одну из существенных задач прикладного анализа. При отыскании приближенных значений корней обычно приходится решать две задачи: 1) отделение корней, т. е. отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключен только один корень многочлена; 2) вычисление корней с заданной точностью.

Для решения второй задачи предложено много практических методов, но решение первой задачи почти всегда связано с преодолением значительных трудностей, и пока не предложено какого-нибудь достаточно простого и надежного метода. Поэтому в тех случаях, когда решение этой задачи нельзя получить каким-либо простым способом, применяют более сложные методы, позволяющие определять корни многочлена без знания их начальных приближений. В настоящей статье предлагается один из подобных методов. Этот метод является удобным объединением известного метода Ньютона для определения корней многочленов и метода спуска для определения минимумов функций.

Пусть

$$P_n(z) = a_n + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

есть многочлен n-й степени с комплексными коэффициентами, где $z = x + iy$.

Представим $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{2}$$

где u и v — гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши—Римана.

Возьмем произвольную непрерывную действительную функцию $\varphi(u, v)$, имеющую непрерывные частные производные первого порядка всюду, за исключением, может быть, точки $u = 0$, $v = 0$, и такую, что $\varphi(u, v) > \varphi(0,0) = 0$, если $u^2 + v^2 > 0$.

Очевидно, что в этом случае задача определения корней $P_n(z)$ эквивалентна задаче определения абсолютного минимума функции

$$F(x, y) = \varphi(u(x, y);\ v(x, y)). \tag{3}$$

Для нахождения точки минимума удобен метод спуска, одна из модификаций которого состоит в следующем.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка, не являющаяся стационарной для

$F(x, y)$. Будем считать (x_1, y_1) более близкой к точке минимума, чем (x_0, y_0), если

$$F(x_1, y_1) < F(x_0, y_0). \tag{4}$$

Точки, удовлетворяющие условию (4), наверняка существуют в окрестности (x_0, y_0) на прямой, проходящей через (x_0, y_0) и параллельной вектору grad F. Поэтому в качестве следующего приближения к точке минимума можно взять точку пересечения указанной прямой с касательной плоскостью к поверхности $z = F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$. Нетрудно вычислить и вектор-шаг, получаемый по этому методу. Он равен

$$\mathbf{h}_c = -\frac{F(x_0, y_0)}{|\mathrm{grad}\, F|^2_{x_0 y_0}} \mathrm{grad}\, F_{x_0 y_0}. \tag{5}$$

Условия и скорость сходимости метода спуска в основном зависят от выбора функции $\varphi(u, v)$. Оказывается, что можно подобрать такую функцию $\varphi_0(u, v)$, что метод спуска, примененный для отыскания точки абсолютного минимума функции

$$F_0(x, y) = \varphi_0(u(x, y), \quad v(x, y)), \tag{6}$$

будет полностью совпадать с методом Ньютона для определения корней многочлена $P_n(z)$. Для отыскания функции $\varphi_0(u, v)$ заменим вектор-шаг $\mathbf{h}_c$ соответствующим комплексным числом

$$h_c = -\frac{F(x_0, y_0)}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]_{x_0 y_0}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0 y_0}. \tag{7}$$

Тогда, учитывая условия Коши—Римана и (2), (3), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\
&+ i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \\
&= \overline{P'_n(z)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Известно, что шаг, получаемый по методу Ньютона, равен

$$h_H = -\frac{P_n(z_0)}{P'_n(z_0)} = -\frac{\overline{P'_n(z_0)}\, P_n(z_0)}{|P'_n(z_0)|^2}. \tag{9}$$

Искомую функцию $\varphi_0(u, v)$ можно определить из равенства $h_c = h_H$. Приравнивая действительные и мнимые части h_c и h_H и учитывая (8), получим

$$\frac{\varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial u}}{\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial v}\right)^2} = u, \qquad \frac{\varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial v}}{\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial v}\right)^2} = v \tag{10}$$

или, после деления одного уравнения на другое,

$$\frac{\partial \varphi_0 / \partial u}{u} = \frac{\partial \varphi_0 / \partial v}{v}.$$

Нетрудно проверить, что решением этого уравнения является

$$\varphi_0(u, v) = \psi(u^2 + v^2), \tag{11}$$

где $\psi(p)$ — непрерывная функция, имеющая всюду непрерывную производную, за исключением, может быть, точки $p = 0$.

Из (10) и (11) следует, что сама функция $\psi(p)$, где $p = u^2 + v^2$, удовлетворяет только одному уравнению

$$\frac{\psi(p)}{2P\psi'(p)} = 1, \tag{12}$$

откуда получаем

$$\psi(p) = c\sqrt{p}, \tag{13}$$

где c — константа интегрирования.

Таким образом, среди всех функций $\varphi(u,v)$, непрерывных и имеющих непрерывные частные производные первого порядка, всюду, за исключением, может быть, точки $u = 0$, $v = 0$, единственной (с точностью до постоянного множителя) функцией, для которой шаг, получаемый по методу спуска, совпадает с шагом, получаемым по методу Ньютона, является

$$\varphi_0(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} = |P_n(z)| = F_0(x, y). \tag{14}$$

Для этой функции можно непосредственно проверить, что точка (x_1,y_1), получаемая из (x_0,y_0) с помощью шага $\mathbf{h}_c$, вблизи точки минимума удовлетворяет условию (4).

Мы докажем для $\varphi_0(u, v)$ более сильное утверждение. Пусть z^* — корень многочлена $P_n(z)$ кратности k и $z_1 = z_0 - t\frac{P_n(z_0)}{P_n'(z_0)}$. Тогда для z_0, достаточно близких к z^*, и любого фиксированного $t \in (0, 2k)$ справедливо

$$|P_n(z_1)| < |P_n(z_0)|. \tag{15}$$

Для доказательства этого утверждения запишем $P_n(z)$ в виде

$$\begin{aligned} P_n(z) &= A_k(z-z^*)^k + A_{k+1}(z-z^*)^{k+1} + \ldots + A_n(z-z^*)^n = \\ &= (z-z^*)^k(A_k + O(|z-z^*|)), \quad z \to z^*, \end{aligned} \tag{16}$$

где $A_k \neq 0$, и заметим, что

$$\lim_{z_0 \to z^*} z_1 = z^*. \tag{17}$$

Кроме того, из (16) получаем

$$\lim_{z_0 \to z^*} \frac{P_n(z_0)}{(z_0 - z^*)P_n'(z_0)} = \frac{1}{k}. \tag{18}$$

Учитывая (16), (17) и (18), найдем

$$\begin{aligned} \lim_{z_0 \to z^*} \frac{P_n(z_1)}{P_n(z_0)} &= \lim_{z_0 \to z^*} \frac{(A_k + O(|z_1 - z^*|))\left(z_0 - t\frac{P_n(z_0)}{P_n'(z_0)} - z^*\right)^k}{(A_k + O(|z_0 - z^*|))(z_0 - z^*)^k} = \\ &= \lim_{z_0 \to z^*}\left(1 - t\frac{P_n(z_0)}{P_n'(z_0)(z_0 - z^*)}\right)^k = \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как для любого фиксированного $t\in(0, 2k)$ справедливо $|(1-t/k)^k|<1$ то отсюда непосредственно следует (15).

Все дальнейшие рассуждения будем проводить только для функции $\varphi_0(u, v)$.

Метод спуска гарантирует выполнение условия (4) при шаге (5) или, что то же самое, при шаге (9) только вблизи корня $P_n(z)$; вдали от корня можно гарантировать выполнение условия (4) лишь при шаге

$$h=-t\frac{P_n(z_0)}{P_n'(z_0)}, \tag{20}$$

где t — достаточно малое положительное число. Число t, при котором выполняется условие (4), будем называть подходящим параметром. Из доказанного ранее нетрудно получить, что вблизи корня многочлена $P_n(z)$ кратности k наилучшим в смысле выполнения условия (4) значением подходящего параметра будет $t=k$. Так как кратность корней, как правило, бывает неизвестной, мы всегда будем брать значения подходящего параметра из полуинтервала $(0,1]$. Если z_k — какое-то приближение к корню многочлена $P_n(z)$, то за следующее приближение будем брать z_{k+1}, где

$$z_{k+1}=z_k-t\frac{P_n(z_k)}{P_n'(z_k)}=z_k^{(t)}, \tag{21}$$

а t — какое-либо значение подходящего параметра. Вычислять подходящий параметр можно самыми различными способами, но для того чтобы метод асимптотически имел квадратичную сходимость, нужно брать вблизи простого корня значение $t=1$. Проще всего определять подходящий параметр следующим образом. Вычисляем $z_k^{(1)}$ и $P_n(z_k^{(1)})$. Если $|P_n(z_k^{(1)})|\geqslant|P_n(z_k)|$, то берем $t=0{,}5$. Вообще, если какое-то значение $t=t_i$ не является подходящим, то в качестве следующей пробы можно взять

$$t_{i+1}=t_i/2. \tag{22}$$

Эта формула соответствует тому, что в качестве следующей пробы берется точка, средняя между z_k и $z_k^{(t_i)}$. Если использовать всю информацию, которую мы имеем о значении многочлена в точке $z_k^{(t_i)}$ и значениях многочлена и производной в точке z_k, то наилучшей в этом смысле будет следующая формула:

$$t_{i+1}=\frac{0{,}5\cdot t_i^2\,|P_n(z_k)|}{[\,|P_n(z_k^{(t_i)})|+|P_n(z_k)|\,(t_i-1)]}. \tag{23}$$

Эта формула соответствует тому, что на прямой, проходящей через точки z_k и $z_k^{(t_i)}$, функция $F_0(x, y)$ приближается полиномом Эрмита 2-го порядка и в качестве следующей пробы берется точка, в которой полином Эрмита достигает минимума. Формулой (23) можно пользоваться даже тогда, когда уже найден подходящий параметр t_i, но $|P_n(z_k^{(t_i)})|$ незначительно отличается от $|P_n(z_k)|$; в этом случае t_{i+1}, найденное по формуле (23), может дать значительно лучшее приближение, чем t_i. Многократно применяя формулу (21), получаем последовательность точек $\{z_k\}$, которая, вообще говоря, будет сходиться к какому-то корню многочлена $P_n(z)$. Хотя при случайном выборе начального приближения последовательность $\{z_k\}$ также сходится к случайному корню, это обстоятельство не может помешать решению поставленной задачи, так как каждый найдённый корень можно выделить и дальше применять метод к многочлену меньшей степени.

Если $P'_n(z_k)$ мало, то формулу (21) нецелесообразно применять для спуска по поверхности $F_0(x, y)$, так как в этом случае подходящий параметр будет находиться за большое число проб. Поверхность $F_0(x, y) = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ обладает одним очень важным свойством, которое можно использовать для дальнейшего спуска: $F_0(x, y)$ не имеет локальных экстремумов, отличных от нуля (см. [1]). Поэтому если вокруг любой точки z_k, не являющейся корнем многочлена $P_n(z)$, описать круг радиуса r_k, внутри которого нет корней, то на границе этого круга обязательно найдутся точки, в которых модуль многочлена строго меньше, чем $|P_n(z_k)|$. Эти точки можно брать за следующее приближение к корню. Радиус круга можно подсчитывать по следующей формуле (см. [2]):

$$r_k = \left[\max\left\{\left|\frac{nc_{n-j}}{c_n}\right|^{1/j}\right\}_{j=1}^{j=n}\right]^{-1}, \tag{24}$$

где c_j — коэффициенты разложения многочлена $P_n(z)$ по степеням $(z - z_k)$. Поиск точки на окружности $|z - z_k| = r_k$ можно проводить любым методом, например построением сетки значений модуля многочлена. Если ни одна из построенных точек не удовлетворяет условию (4), то строится более густая сетка. Применение этого метода вполне оправдано, так как обычно требуется 3—4 пробы, чтобы найти на окружности нужную точку. Хотя формула (24) имеет более сложный вид, чем аналогичные другие, тем не менее для счета нужно применять именно ее, особенно в том случае, когда $P'_n(z)$ имеет корни большой кратности (больше 15—20).

Критерием для окончания счета по формуле (21) и перехода к поиску точки на окружности $|z - z_k| = r_k$ служит величина модуля очередного возможного шага

$$|h| = \left|\frac{P_n(z_k)}{P'_n(z_k)}\right|, \tag{25}$$

которую удобно сравнивать с величиной

$$R_k = \sqrt[n]{|P_n(z_k)|\frac{1}{|a_0|}}, \tag{26}$$

являющейся средним геометрическим расстояний от точки z_k до всех корней $P_n(z)$. Если взять круг радиуса R_k с центром в точке z_k, то корни многочлена будут расположены как внутри, так и вне этого круга, и если $|h| > R_k$, то, считая по формуле (21), мы можем уйти от ближайших к точке z_k корней.

С другой стороны, счет по формуле (21) осуществляется быстрее, чем отыскание нужной точки на окружности, поэтому для экономии времени целесообразно прекращать счет по формуле (21) лишь тогда, когда

$$|h| > \mu R_k, \quad \mu > 1, \tag{27}$$

т. е. когда мы уходим от точки z_k слишком далеко и подходящий параметр будет находиться за большое число проб. Практика показывает, что наиболее быстрый счет получается при $\mu = 4$.

Если нет никакой информации о распределении корней многочлена, то за начальное приближение можно взять

$$z_0 = \gamma + i\sqrt[n]{|P_n(\gamma)|\frac{1}{|a_0|}}, \qquad \gamma = -\frac{a_1}{na_0}. \tag{28}$$

Выбор такого начального приближения объясняется следующими соображениями. Величина γ есть среднее арифметическое всех корней многочлена, поэтому уже ее можно было бы брать за начальное приближение к корню, однако это не всегда удобно, так как в случае действительных коэффициентов многочлена γ тоже будет действительным, а тогда счет по формуле (21) будет нас всегда оставлять на действительной оси. Поэтому если многочлен имеет много комплексных корней, то, начиная с действительного начального приближения к корню, мы неизбежно будем натыкаться на корень производной, при этом каждый раз придется подсчитывать r_k, что по времени эквивалентно выполнению примерно $n/4$ обычных итераций Ньютона. Все это в значительной мере увеличивает время счета. Для устранения этого недостатка приходится к γ добавлять чисто мнимое число, которое выбирается равным

$$i\sqrt[n]{|P_n(\gamma)|\left(\frac{1}{|a_0|}\right)}.$$

Учитывая все сказанное выше, имеем следующий метод определения корней многочленов.

Пусть дан многочлен n-й степени $P_n(z)$. По формуле (28) подсчитываем начальное приближение z_0. Пусть мы уже определили последовательность $z_0, z_1 \ldots z_k$ последующих приближений к корню; тогда z_{k+1} мы подсчитываем либо по формуле (21), если (27) не выполняется, либо, если (27) выполняется, поиском на окружности $|z - z_k| = r_k$ (r_k считается по (24)) точки, удовлетворяющей условию (4). Если находим какой-либо корень многочлена $P_n(z)$, то выделяем его и дальше применяем метод к отысканию корня многочлена меньшей степени. Таким методом можно определить все корни многочлена.

Докажем теперь, что данный метод обеспечивает возможность построения такой последовательности точек $\{z_k\}$ при произвольном выборе z_0, что

$$|P_n(z_{k+1})| \leqslant q\,|P_n(z_k)|, \quad 0 \leqslant q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{29}$$

В этом случае последовательность $\{z_k\}$ будет наверняка сходиться к какому-нибудь корню многочлена $P_n(z)$.

Заметим, что последовательность $\{z_k\}$ будет обязательно ограниченной, так как в противном случае мы имели бы

$$|P_n(z_k)| < |P_n(z_0)|, \quad z_k \to \infty, \tag{30}$$

что невозможно.

Пусть точки $\{z_k\}$ принадлежат некоторой ограниченной области G_0, содержащей все корни $P_n(z)$. Окружим каждый корень $z^{(i)}$ многочлена $P_n(z)$ некоторой областью G_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, такой, что последовательность точек, получаемых по методу Ньютона, наверняка сходится к $z^{(i)}$ при любом начальном приближении $z_0^{(i)} \in G_i$. В качестве таких областей в случае, когда все корни различные, можно взять, например, внутренности кругов с центрами в точках $z^{(i)}$ и такого радиуса r_0, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\max\limits_{z \in \bigcup\limits_1^n \bar{G}_i} |P''_n(z)|}{\min\limits_{z \in \bigcup\limits_1^n \bar{G}_i} |P'_n(z)|} \cdot \frac{r_0}{2} < 1, \tag{31}$$

выполнение которого является достаточным условием сходимости метода Ньютона.

Рассмотрим область $G = G_0 \setminus \overline{\bigcup\limits_1^n G_i}$. Так как $|P_n(z)| \geqslant m > 0$ в области G, то для доказательства сходимости $\{z_k\}$ к какому-либо корню $P_n(z)$ достаточно доказать, что $|P_n(z_{k+1})| \leqslant q\,|P_n(z_k)|$ для $z_k \in G$, потому что в этом случае после конечного числа шагов мы обязательно попадем в одну из областей G_i, где метод сходится.

Возьмем произвольную точку $z_k \in G$. Пусть в этой точке (27) не выполняется; тогда

$$z_{k+1} = z_k - t\,\frac{P_n(z_k)}{P'_n(z_k)},$$

и далее имеем

$$|P_n(z_{k+1})| \leqslant |P_n(z_k)|\,(1 - t) + t^2 N_k,$$

где

$$N_k = \sum_{i=2}^{n} \frac{|P_n^{(i)}(z_k)|}{i!} \left|\frac{P_n(z_k)}{P'_n(z_k)}\right|^i.$$

Правая часть неравенства при $t = t_0 = |P_n(z_k)|\,/\,2N_k$ достигает своего минимума, равного $|P_n(z_k)|\,(1 - |P_n(z_k)|\,/\,4N_k)$; следовательно, в этом случае путем выбора t мы можем обеспечить выполнение неравенства $|P_n(z_{k+1})| \leqslant |P_n(z_k)|\,(1 - |P_n(z_k)|\,/\,4N_k)$, если $t_0 \leqslant 1$, или $|P_n(z_{k+1})| \leqslant |P_n(z_k)|/\,2$, если $t_0 > 1$. Для всех точек $z_k \in G$, для которых (27) не выполняется, величина $|P_n(z_k)|\,/\,4N_k$ ограничена снизу строго положительным числом α, так как для этих точек последовательность N_k ограничена сверху и $|P_n(z_k)| \geqslant m > 0$, поэтому путем выбора t можно обеспечить выполнение условия $|P_n(z_{k+1})| \leqslant q_1 |P_n(z_k)|$, где $q_1 = \max\,[{}^1/_2;\ (1 - \alpha)] < 1$.

Пусть теперь (27) выполняется в точке z_k; тогда по (24) вычисляем r_k и на границе круга $|z - z_k| \leqslant r_k$ находим точку $\bar{z}_k$ минимума $|P_n(z)|$. Так как в круге $|z - z_k| \leqslant r_k$ нет корней многочлена, то $|P_n(\bar{z}_k)| <$

$<|P_n(z_k)|$; следовательно,

$$|P_n(\bar{z}_k)| = q_2(z_k)\,|P_n(z_k)|, \quad 0 \leqslant q_2(z_k) < 1.$$

Докажем, что

$$\sup_{z_k \in G} q_2(z_k) = \bar{q}_2 < 1.$$

Очевидно, что $\bar{q}_2$ не может быть больше единицы. Пусть $\bar{q}_2 = 1$ и $\sup\limits_{z_k \in G} q_2(z_k)$ достигается в некоторой точке $z^{(0)} \in G$. Тогда для $z^{(0)}$ имеем $|P_n(\bar{z}^{(0)})| = |P_n(z^{(0)})|$, откуда следует, что $r = 0$ в точке $z^{(0)}$, а это невозможно в силу выбора G. Предположим теперь, что

$$\sup_{z_k \in G} q_2(z_k) = 1$$

и не достигается ни в одной точке области G. Тогда по определению верхней грани мы можем построить такую последовательность точек $z'_k \in G$, что $q_2(z'_k) \geqslant 1 - 1/2^k$. Ограниченная последовательность $\{z'_k\}$ в замкнутой области G имеет предельную точку $z'_0 \in G$. Из этой последовательности выбираем подпоследовательность $\{z'_{k_j}\}$, сходящуюся к z'_0. Пусть r_{k_j} — радиус круга $|z - z'_{k_j}| \leqslant r_{k_j}$ — подсчитывается по (24). Возьмем на окружности $|z - z'_0| = r_0$ точку $\bar{z}'_0$ и рассмотрим последовательность точек z''_{k_j}, для которых

$$|z''_{k_j} - z'_{k_j}| = r_{k_j}, \qquad |z''_{k_j} - \bar{z}'_0| = \inf_{|z - z'_{k_j}| = r_{k_j}} |z - \bar{z}'_0|.$$

Имеем

$$|\bar{z}'_0 - z''_{k_j}| = |\bar{z}'_0 - z'_{k_j}| - |z''_{k_j} - z'_{k_j}| \leqslant |\bar{z}'_0 - z'_0| +$$
$$+ |z'_0 - z'_{k_j}| - |z''_{k_j} - z'_{k_j}| = r_0 - r_{k_j} + |z'_0 - z'_{k_j}|, \qquad |\bar{z}'_0 - z'_{k_j}| \geqslant r_{k_j},$$

или

$$|\bar{z}'_0 - z''_{k_j}| = |z''_{k_j} - z'_{k_j}| - |\bar{z}'_0 - z'_{k_j}| \leqslant |z''_{k_j} - z'_{k_j}| -$$
$$- |\bar{z}'_0 - z'_0| + |z'_0 - z'_{k_j}| = r_{k_j} - r_0 + |z'_0 - z'_{k_j}|,$$
$$|\bar{z}'_0 - z'_{k_j}| < r_{k_j}.$$

Из этих неравенств получаем

$$|\bar{z}'_0 - z''_{k_j}| \leqslant |r_0 - r_{k_j}| + |z'_0 - z'_{k_j}|.$$

Так как r — непрерывная функция в области G и $\{z'_{k_j}\}$ сходится к z'_0, то из последнего неравенства получаем, что последовательность $\{z''_{k_j}\}$ сходится к $\bar{z}'_0$ при $k_j \to \infty$. Так как $|P_n(z)|$ — непрерывная функция, то в силу выбора последовательности $\{z'_{k_j}\}$ имеем

$$|P_n(\bar{z}'_0)| = \lim_{k_j \to \infty} |P_n(z''_{k_j})| \geqslant \varlimsup_{k_j \to \infty} |P_n(\bar{z}'_{k_j})| = \varlimsup_{k_j \to \infty} q_2(z'_{k_j})\,|P_n(z'_{k_j})| \geqslant$$
$$\geqslant \varlimsup_{k_j \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k_j}}\right) |P_n(z'_{k_j})| = \lim_{k_j \to \infty} |P_n(z'_{k_j})| = |P_n(z'_0)|.$$

Отсюда следует, что $q_2(z_0') \geqslant 1$, а это невозможно по предположению. Следовательно, $\bar{q}_2 < 1$. При поиске точки на окружности мы находим z_k неточно, поэтому на самом деле мы можем обеспечить лишь выполнение неравенства

$$|P_n(z_{k+1})| \leqslant q_2 |P_n(z_k)|, \quad \bar{q}_2 < q_2 < 1.$$

Из доказанного выше следует, что при получении следующего приближения всегда можно обеспечить выполнение неравенства

$$|P_n(z_{k+1})| \leqslant q\,|P_n(z_k)|, \qquad q = \max[q_1;\ q_2] < 1.$$

Сходимость доказана.

Данный метод был опробован на многочисленных примерах в Вычислительном центре МГУ. Счет показал, что в начале процесса почти всегда поиск подходящего параметра происходит с помощью дроблений, причем число дроблений, равное 0, 1, 2, встречается часто, равное 3, 4, 5 — очень редко, а 6 и более дроблений практически совсем не встречается; вблизи корней дроблений не происходит. Самый трудоемкий участок метода — поиск точки на окружности $|z - z_k| = r_k$ — работает очень редко, поэтому в целом метод обеспечивает довольно высокую скорость работы. Например, для определения всех корней многочленов до 10-й степени с относительной точностью 10^{-9} требуется 7—15 сек. работы машины «Стрела», многочленов 20-й степени — 40—60 сек.

Поступила в редакцию
17.01. 1961

Цитированная литература

1. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954.
2. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М., Гостехиздат, 1956.