МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

# ВЕРБАЛЬНАЯ КОММУТАТИВНОСТЬ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ $p$-АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ $p$-ГРУПП

Е. И. Хухро

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой из них используется следующая теорема (см. также [1]).

ТЕОРЕМА 1 [2, теорема 2]. *Пусть $P$ — $p$-группа ступени нильпотентности не выше $p-1$. Тогда на множестве $P$ можно определить новую операцию «$\circ$», вербально выражающуюся через старую и превращающую множество $P$ в абелеву группу $\tilde{P}$. Операция «$\circ$» имеет вид*

$$x \circ y = x \cdot y \cdot \Pi c_i^{\alpha_i}, \tag{1}$$

*где $c_i$ — коммутаторы веса $\geqslant 2$, а знаменатели рациональных чисел $\alpha_i$ не делятся на $p$. (В выражении (1) справа умножение в группе $P$.)*

Во второй части строятся примеры, показывающие, что результат основной теоремы работы [1] не может быть распространен на случай регулярных $p$-групп.

Этот же пример является отрицательным ответом на вопрос Гроувза [2] о вербально абелевых и $V$-регулярных $p$-группах.

Теорема 1 в несколько более общей форме была доказана Гроувзом в работе [2]. Там же он доказал, что конечные вербально абелевы $p$-группы (см. [3]) $V$-регулярны, т. е. регулярны вместе со всеми своими прямыми степенями (см. [4]). Группы, построенные во второй части работы, $V$-регулярны, так как они периода $p$, но не вербально абелевы. Последнее вытекает из доказательства теоремы 2.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Математическое заметки», 1979

Отметим, что теорема 1 фактически содержится в работе [5] Лазара, который в 1954 году доказал категорную изоморфность категории всех групп, нильпотентных ступени $\leqslant c$, в которых однозначно извлекаются корни $k$-й степени для всех $k \leqslant c$, и категории всех колец Ли, нильпотентных ступени $\leqslant c$ и $k$-делимых, как абелевы группы, для всех $k \leqslant c$. Метод доказательства Лазара состоял в обращении формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа. Точно так же можно доказать и теорему 1, при этом ограничение на ступень нильпотентности естественно связано с делимостью на $p$ знаменателей коэффициентов при членах веса $\geqslant p$ в формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа при записи в явном виде. Поэтому, а также в связи с примерами из второй части этой работы, вербальная абелевость представляется связанной со ступенью нильпотентности группы, а не с $V$-регулярностью.

Перейдем к применениям теоремы 1. Тот факт, что новая операция определяется через старую вербально, позволяет считать любой автоморфизм первоначальной группы автоморфизмом вновь полученной группы, при этом действие его на элементах групп, как на множествах, одно и то же. Для случая 2-ступенно нильпотентных групп эта идея возникла в работе Бэра [6]. Она была также использована в работе Бендера [7], обобщившего результат Томпсона [8, теорема 2].

Первым примером применения теоремы 1 служит простое доказательство основного результата работы [1] о неподвижных точках $p$-автоморфизмов, действующих на $p$-группах.

ТЕОРЕМА 2 [1]. *Пусть $A$ — $p$-группа автоморфизмов $p$-группы $P$, ступень нильпотентности которой не превосходит $p-1$. Если $V = P/\Phi(P)$ является свободным $Z_pA$-модулем, то $C_P(A)$ накрывает $C_V(A)$, т. е.*

$$C_P(A)\Phi(P)/\Phi(P) = C_V(A).$$

Второй пример составляет

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $A$ — $p$-группа автоморфизмов $p$-разрешимой группы $G$, силовские $p$-подгруппы которой нильпотентны ступени $\leqslant p-1$. Если $Q_1$ и $Q_2$ — две холловы $A$-инвариантные $p'$-подгруппы из $G$, то они сопряжены элементам из $C_G(A)$.*

В работе [1] эта теорема была доказана при условии коммутативности группы $A$.

Примеры из работы [9] показывают, что ограничения на ступень нильпотентности в формулировке теорем 2 и 3 не могут быть ослаблены. Более того, они показывают, что ограничение на ступень нильпотентности не улучшаемо и в формулировке теоремы 1.

Далее, $(p-1)$-ступенно нильпотентные $p$-группы регулярны. Поэтому возник записанный в [10] вопрос: нельзя ли в формулировке теоремы 2 ограничиться требованием регулярности группы $P$? Во второй части настоящей работы на основе примеров из работы [9] строятся примеры регулярных групп $P$ (более того, метабелевых групп периода $p$ ступени нильпотентности $p$), для которых теорема 2 неверна.

**1. Доказательство теорем 2 и 3.** Доказательство теоремы 2. Без потери общности можно считать порядок группы $A$ равным $p$, а модуль $V$ — одномерным (см. [8, 1]). Пусть $A = \langle\varphi\rangle$. Тогда для некоторого $x \in P$ элементы $x, x^{\varphi} \ldots, x^{\varphi^{p-1}}$ составляют базис $\mathbf{Z}_p$-модуля $V$. Очевидно, что образ их произведения в $P/\Phi(P)$ порождает $C_V(A)$. Рассмотрим группу $\widetilde{P} = (P, \circ)$ в соответствии с теоремой 1. Группу $A$ можно считать группой автоморфизмов группы $\widetilde{P}$, действующей на множестве $\widetilde{P}$ по-старому. Ясно, что $x \circ x^{\varphi} \circ \ldots \circ x^{\varphi^{p-1}} \in C_{\widetilde{P}}(A)$. Но $C_{\widetilde{P}}(A)$ и $C_P(A)$ совпадают как множества, а из вида (1) операции «$\circ$» ясно, что в факторе $P/\Phi(P)$ элемент $x \circ x^{\varphi} \circ \ldots \circ {}^{\varphi^{p-1}}$ равен элементу $x \cdot x^{\varphi} \cdot \ldots \cdot x^{\varphi^{p-1}}$. Таким образом, элемент $x \circ x^{\varphi} \circ \ldots \circ x^{\varphi^{p-1}}$ является искомой неподвижной точкой.

Доказательство теоремы 3. Дословное повторение рассуждений со страницы 701 работы [1] показывает, что в минимальном контрпримере $P \lhd PQ = G$, причем группа $A$ точно действует на $q$-группе $Q_1$, а группа $Q_1A$ точно действует на $P$. При этом $[PQ_1] = P$, так что $C_P(Q) \leqslant \Phi(P)$.

Заметим, что в случае абелевой группы $P$ утверждение теоремы 3 тривиально.

Далее, пусть $Q_2 = Q_1^x$ для $x \in P$. Группа $Q_1$ $A$-инвариантна, и легко проверить, что $A$-инвариантность группы $Q_1^x$ для $x \in G$ эквивалентна тому, что $[x^{-1}, A] \leqslant C_Q(Q_1)$. С другой стороны, заключение теоремы эквивалентно наличию элемента из $C_P(A)$ в смежном классе $C_P(Q_1)x$.

В минимальном контрпримере пересечение $C_P(A)$ со смежным классом $\Phi(P)x$ пусто, иначе все сводится к группе $\Phi(P)Q_2$ меньшего порядка.

Пусть теперь $N$ — некоторая минимальная $Q_1A$-инвариантная подгруппа из $Z(P)$. Всюду далее черта обозначает переход к образу в фактор-группе $PQ_1A/N$. Группы $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q_1^x}$ $A$-инвариантны, и поэтому, в силу минимальности рассматриваемого примера, для некоторого $\bar{g} \in C_{\bar{P}}(A)$ $\overline{Q_1^g} = \overline{Q_1^x}$. Отсюда следует, что группа $Q_1^g$ сопряжена с $Q_1^x$ элементом $n$ из $N$, т. е. $Q_1^{gn} = Q_1^x$ для $n \in N$. Ввиду $A$-инвариантности группы $Q_1^x$ имеем $[g^{-1}\cdot n^{-1}, A] \leqslant C_P(Q_1)$, а так как $[\overline{g, A}] = \bar{1}$, то получаем, что $[g^{-1}\cdot n^{-1}, A] \leqslant C_P(Q_1) \cap N$. Если $C_P(Q_1) \cap N = 1$, то элемент $g^{-1}n^{-1}$, а значит и $gn$, лежит в $C_P(A)$ и является искомой неподвижной точкой. Поэтому можно считать, что $C_P(Q_1) \cap N \neq 1$, а следовательно, ввиду минимальности $N$, $C_P(Q_1) \geqslant N$. Ясно, что можно считать $x = gn$, так что для любого $a \in A$ $x^a = xm$, $m \in Z(P) \cap C_P(Q_1)$.

Рассмотрим теперь в соответствии с теоремой 1 группу $\tilde{P} = (P, \circ)$ и ее группу автоморфизмов $Q_1A$, действующую на $\tilde{P}$, как на множестве, по-старому. Из вида (1) операции «$\circ$» следует, что, как и раньше, $[\tilde{x}^{-1}, A] \leqslant C_{\tilde{P}}(Q_1)$, так как

$$[\tilde{x}^{-1}, a] = \tilde{x} \circ (\tilde{x}^{-1})^a = x\cdot x^{-1}\cdot m^{-1} = m^{-1}.$$

Поэтому снова группа $\tilde{Q_1^x}$ $A$-инвариантна. Но из справедливости теоремы 3 в случае абелевой группы $P$ вытекает, что в смежном классе $C_{\tilde{P}}(Q_1) \circ \tilde{x}$ есть элемент из $C_{\tilde{P}}(A)$. Из вида (1) операции «$\circ$» следует, что этот элемент будет лежать в смежном классе $\Phi(P)\cdot x$ (в группе $P$), что и составляет противоречие, завершающее доказательство теоремы 3.

**2. Требования регулярности группы $P$ в формулировке теоремы 2 недостаточно.**

ТЕОРЕМА 4. *Существует метабелева группа $P$ периода $p$ и ступени нильпотентности $p$, допускающая автоморфизм $\varphi$ порядка $p$, который свободно действует на $P/\Phi(P)$, причем*

$$C_{P/\Phi(P)}(\varphi) \neq C_P(\varphi)\Phi(P)/\Phi(P).$$

Доказательство. Через $[u_1, u_2, \ldots, u_k]$ будет обозначаться коммутатор $[[[u_1, u_2], u_3], \ldots u_k]$. Пусть $F$ — свободная нильпотентная ступени $p$ метабелева группа с $p$ порождающими $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Группа $P_1$ из примера работы [9] строилась как фактор-группа $F/N \cdot N_1$. Здесь $N$ — нормальная подгруппа из $Z(F)$, порожденная всеми базисными коммутаторами веса $p$, в записи которых есть хотя бы два одинаковых индекса, а $N_1$ — нормальная подгруппа, состоящая из всех элементов вида $c_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot c_s^{\alpha_s}$, где $c_i$ — базисные коммутаторы, а все показатели $\alpha_i$ кратны $p$. В [9] доказано, что любой элемент так построенной группы $P_1$ однозначно записывается в виде

$$c_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot c_l^{\alpha_l}, \tag{2}$$

где $c_i$ — все простые базисные коммутаторы, кроме тех, что лежат в $N$. Коммутаторы упорядочены стандартным образом (см. [11, глава 12]), а $\alpha_i$ рассматриваются как вычеты по модулю $p$. Эта конечная метабелева $p$-группа допускает автоморфизм $\rho$, циклически переставляющий образующие $u_1, \ldots, u_p$ (образы элементов в фактор-группе обозначаются так же, как и в группе). Для того чтобы заключение теоремы 2 имело место, т. е. чтобы

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_p \Phi(P_1) \cap C_{P_1}(\varphi) \neq \phi,$$

необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо уравнение

$$[u_2, u_1, u_3, \ldots, u_p] = z^{-1} z^{\varphi}$$

для $z \in Z(P_1)$. Это доказано в [9] и следует из единственности представления в виде (2).

Обозначим через $P$ фактор-группу группы $P_1$ по циклической подгруппе из $Z(P_1)$, порожденной произведением всех простых базисных коммутаторов веса $p$. Эта подгруппа, порожденная элементом

$$[u_2, u_1, u_3, \ldots, u_p] \cdot \ldots \cdot [u_p, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}],$$

$\varphi$-инвариантна, так что $\varphi$ индуцирует автоморфизмы группы $P$, который мы тоже обозначим через $\varphi$. Докажем, что и в этой группе в единственном неподвижном относительно $\varphi$ смежном классе $u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_p \cdot \Phi(P)$ нет элемента из $C_P(\varphi)$. Ясно, что любой элемент из $P$ допускает единственное представление в виде $c_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot c_l^{\alpha_l}$, где $c_i$ — те же

коммутаторы, что и в (2), кроме одного из коммутаторов веса $p$, например, кроме $[u_p, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}]$.

Рассуждение, аналогичное проведенному на страницах 411—412 работы [9], показывает, что существование элемента из $C_P(\varphi)$ в смежном классе $u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_p \cdot \Phi(P)$ равносильно разрешимости уравнения

$$[u_2, u_1, u_3, \ldots, u_p] = z^{-1} z^{\varphi} \quad \text{для } z \in Z(P). \tag{3}$$

Пусть

$$z = [u_2, u_1, \ldots, u_p]^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot [u_{p-1}, u_1, \ldots, u_p]^{\beta_{p-1}}.$$

Вычисления (см. стр. 412 работы [9]) показывают, что уравнение (3) приводит к такой системе уравнений на числа $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{p-1}$ (над полем из $p$ элементов):

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ldots & & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \vdots \\ \beta_{p-2} \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы системы не больше $p-3$, так как сумма строк с коэффициентами, равными их номерам, равна 0. Ранг расширенной матрицы равен $p-2$. Поэтому уравнение (3) неразрешимо, и

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_p \cdot \overline{\Phi}(P) \cap C_P(\varphi) = \varnothing.$$

Покажем, что период группы $P$ равен $p$, и что, следовательно, группа $P$ регулярна. Применим собирательный процесс (см. [11, глава 12]) к слову $(u_1 \cdot \ldots \cdot u_p)^p$. Так как группа ступени $p-1$ регулярна, то в записи (2) все коэффициенты при базисных коммутаторах веса меньше $p$ кратны $p$. Вычисления показывают, что коэффициенты при базисных коммутаторах веса $p$ сравнимы с $-1$ по модулю $p$. По построению группы $P$ имеет место равенство

$$(u_1 \cdot \ldots \cdot u_p)^p = ([u_2, u_1, \ldots, u_p] \cdot \ldots \cdot [u_p, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}])^{-1}.$$

Рассмотрим теперь произвольный элемент из $P$. Он имеет вид $u_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot u_p^{\alpha_p} \cdot c$, где $c$ — элемент из $P'$. Рассмот-

рим символы $u_1^{\alpha_1}, u_2^{\alpha_2}, \ldots, u_p^{\alpha_p}\cdot c$ в качестве новых переменных и применим к слову $(u_1^{\alpha_1}\ldots(u_p^{\alpha_p}\cdot c))^p$ собирательный процесс. Группа $P'$ абелева и периода $p$, поэтому из предыдущих рассуждений следует, что

$$(u_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(u_p^{\alpha_p}\cdot c))^p = u_1^{\alpha_1 p}\cdot\ldots\cdot u_{p-1}^{\alpha_{p-1} p}\cdot(u_p^{\alpha_p}\cdot c)^p\cdot$$
$$\cdot([u_2^{\alpha_2}, u_1^{\alpha_1}, \ldots, u_p^{\alpha_p}\cdot c]\cdot\ldots\cdot[u_p^{\alpha_p}\cdot c, u_1^{\alpha_1}, \ldots, u_{p-1}^{\alpha_{p-1}}])^{-1}.$$

По построению группы $P$ это равно

$$(u_p^{\alpha_p}\cdot c)^p\cdot([u_2^{\alpha_2}, u_1^{\alpha_1}, \ldots, u_p^{\alpha_p}\cdot c]\cdot\ldots\cdot[u_p^{\alpha_p}\cdot c, u_1^{\alpha_1}, \ldots, u_{p-1}^{\alpha_{p-1}}])^{-1}.$$

Из стандартных коммутаторных тождеств для $p$-ступенно нильпотентной группы следует, что выражение в скобках равно

$$([u_2, u_1, \ldots, u_p]\cdot\ldots\cdot[u_p, u_1, \ldots, u_{p-1}])^{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_p}.$$

По построению группы $P$ этот элемент равен 1.

Группа $\langle u_p^{\alpha_p}, c\rangle$ $(p-1)$-ступенно нильпотентна [12, лемма 1, § 1 главы 6]. Поэтому по построению группы $P$ элемент $u_p^{\alpha_p}\cdot c$ имеет порядок $p$. Это завершает доказательство того, что группа $P$ имеет период $p$.

Построенная группа $P$ и ее автоморфизм $\varphi$ составляют нужный нам пример.

Новосибирский государственный университет

Поступило 20.XII.1977

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Хухро Е. И., Неподвижные точки $p$-автоморфизмов конечных $p$-групп, Алгебра и логика, **14**, № 6 (1975), 697—703.
[2] Groves J. R. J., Regular $p$-groups and words giving rise to commutative group operations, Israel J. Math., **24**, № 1 (1976), 73—77.
[3] Cooper G. D. H., Words which give rise to another group operation for a given group. Lecture notes in mathematics, № 372, Proc. int. conf. theory of groups, Canberra 1965, Berlin, Springer-Verlag, 1974, 221—225.
[4] Weichsel P. M., Regular $p$-groups and varieties, Math. Z., 95, (1967), 223—231.
[5] Lazard M., Sur les groupes nilpotentes et les anneaux de Lie, Ann. Sci. École Norm. Sup., **71** (1954), 101—190.
[6] Baer R., Groups with abelian central quotiont group, Trans. Amer. math. soc., **44** (1938), 357—386.
[7] Bender H., Über den grösten $p$-Normalteiler in $p$-auflösbaren Gruppen, Arch. Math. Basel, **18** (1967), 15—16.

[8] Thompson J. G., Fixed points of $p$-groups acting on $p$-groups, Math. Z., 86 (1964), 12—13.
[9] Боровик А. В., Хухро Е. И., О группах автоморфизмов конечных $p$-групп, Матем. заметки, 19, № 3 (1976), 401—418.
[10] Мазуров В. Д., Конечные группы. Алгебра. Топология, Геометрия, Сб. Итоги науки и техники, 14, 1976, 5—56.
[11] Холл М., Теория групп, М., ИЛ, 1962.
[12] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М., «Наука», 1972.