Алгебра и анализ
Том 35 (2023), №2

Светлой памяти
Сергея Николаевича Набоко посвящается

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ГАУССА О ЗНАЧЕНИЯХ ДИГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА В РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ

© К. А. МИРЗОЕВ, Т. А. САФОНОВА

В работе найдены представления производящих функций для значений дзета-функции Римана в нечётных точках и родственных с ними чисел в терминах определённых интегралов от тригонометрических функций, зависящих от параметра a. В частности, получены новые интегральные представления для дигамма-функции Эйлера $\psi(a)$. Возникающие интегралы таковы, что их можно вычислить в терминах гипергеометрических рядов ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$ при некоторых значениях параметров и $z = 1$. Кроме того, если a является правильной рациональной дробью, то они сводятся к интегралам от $R(\sin x, \cos x)$, где R — дробно-рациональная функция двух переменных, и явно вычисляются. При этом получаются разнообразные аналоги теоремы Гаусса о значениях функции $\psi(a)$ в рациональных точках и, в частности, ещё одно её доказательство.

§1. Введение

1.1. Символом $\psi(a)$, как обычно, обозначим дигамма-функцию Эйлера, определяемую как логарифмическая производная от гамма-функции Эйлера $\Gamma(a)$, то есть равенством

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

Ключевые слова: теорема Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера, интегральные представления сумм рядов, значения гипергеометрических рядов при рациональных значениях параметров.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант №20-11-20261).

(см., например, [1, п. 1.8] или [2, приложение II.2]). Из определения функции $\psi(a)$ следует справедливость формулы

$$\psi(a) = -\gamma + \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+a}\Big), \tag{1.1}$$

где γ — постоянная Эйлера. (см., например, [2, приложение II.2]). Благодаря формуле (1.1), дигамма-функция Эйлера $\psi(a)$ и её производные — полигамма-функции — широко используются для вычисления сумм сходящихся числовых рядов вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{Q_m(k)}{P_n(k)},$$

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно и $n > m+1$ (см., например, [2, п. 5.1.24, формула 6]), и поэтому, в частности, теорема Гаусса о вычислении значений функции $\psi(a)$ в рациональных точках a в терминах элементарных функций имеет особое значение.

Теорема Гаусса. *Пусть $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда*

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \ln(2q) - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{p\pi}{q}\right) - 2\sum_{k=1}^{[(q-1)/2]}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q},$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Эта теорема приводится во многих справочниках (см., например, [2, приложение II.2], [3, п. 8.362, формула 6] и др.), и известно несколько её доказательств, так, например, схема классического доказательства и необходимые ссылки приведены в книге [1, п. 1.7.3] (см. также [4, пример 13(v), стр. 188]), другое доказательство есть в [5, теорема 1.2.7, стр. 30]. Отметим также сравнительно недавнюю работу [6], где к классу элементарных функций добавляются функции Клаузена и в терминах полученного класса доказывается теорема, аналогичная теореме Гаусса, для полигамма-функции.

1.2. Нами в работах [7–9] предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление некоторых специальных функций, представленных рядами. В §2 настоящей работы, используя эти методы, получены интегральные представления для сумм

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\pm1)^{k-1}}{k(k^2-a^2)}$$

в терминах определённых интегралов от тригонометрических функций, зависящих от параметра a (см. п. 2.1, теорема 1 и следствие 1), и, используя их, — по-видимому, новые интегральные представления для дигамма-функции Эйлера $\psi(a)$ (см. следствие 2, формулы (2.9) и (2.10)) и родственных с ней функций $\beta(a)$ и $\varphi(a)$ (см. п. 2.2). Кроме того, в §2, п. 2.3, приведены интегральные представления для гипергеометрических рядов

$$ {}_3F_2\Big(\frac{1-a}{2}, \frac{1+a}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1; 1\Big), \quad {}_3F_2\Big(1-a, 1+a, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; 1\Big), $$
$$ {}_4F_3\Big(1-\frac{a}{2}, 1+\frac{a}{2}, 1, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2; 1\Big), \quad {}_4F_3\Big(1-a, 1+a, 1, 1; \frac{3}{2}, 2, 2; 1\Big). $$

В §3, полагая, что a является правильной дробью, интегралы, возникающие в §2, вычисляются в замкнутом виде в терминах элементарных функций (см. п. 3.1). При этом получаются аналоги теоремы Гаусса для перечисленных выше сумм (см. теоремы 3 и 4) и ещё одно её доказательство. Кроме того, в п. 3.4 приведены формулы для вычисления значений тех же гипергеометрических функций ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$ при рациональных значениях параметра a.

§2. Об интегральном представлении сумм некоторых рядов

2.1. Методы работ [7–9], в частности, позволяют доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *При $-1 < a < 1$ справедливы равенства*

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2} = \frac{1}{2a\cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx, \tag{2.1} $$

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2\cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ax)-\cos(a\pi/2)}{\cos x}\, dx, \tag{2.2} $$

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k}}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \sin(2ax)\operatorname{ctg} x\, dx, \tag{2.3} $$

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} (\sin(a\pi)-\sin(2ax))\operatorname{tg} x\, dx. \tag{2.4} $$

Тождества (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) являются следствиями наших более общих теорем из работы [8]. Они там сформулированы в виде следствий 8 и 6 соответственно.

Отметим, что равенства (2.2)–(2.4) можно записать в несколько ином виде. Соответствующие равенства сформулируем в виде следующего следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть* $-1 < a < 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}\\&=\frac{1}{2a^2}\left(\operatorname{tg}(a\pi/2)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(ax)}{\sin x}\,dx\right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2}=\frac{1}{a\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx,\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)}\\&=\frac{\ln 2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\left(x-\frac{\sin(2ax)}{2a}\right)\frac{dx}{\sin^2 x}+\frac{\operatorname{ctg}(a\pi)}{a}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx\right).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Доказательство. Справедливость равенства (2.5) следует из равенства (2.2), если учесть, что

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos(ax)-\cos(a\pi/2)}{\cos x}\,dx=-2\cos\frac{a\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(ax/2)}{\sin x}\,dx+\sin\frac{a\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx,$$

а справедливость (2.7) — из (2.4), поскольку

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{\pi/2}(\sin(a\pi)-\sin(2ax))\operatorname{tg}x\,dx\\&=\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ctg}x\,d\left(\frac{\cos(a\pi)}{2a}-\frac{\cos(a\pi-2ax)}{2a}+x\sin(a\pi)\right)\\&=\sin(a\pi)\int\limits_0^{\pi/2}\left(x-\frac{\sin(2ax)}{2a}\right)\frac{dx}{\sin^2 x}+\frac{\cos(a\pi)}{a}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx.\end{aligned}$$

Справедливость же равенства (2.6) можно извлечь из равенства (2.3), если заметить, что его левую часть можно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k^2-a^2)}=\frac{\ln 2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{k^2-a^2},$$

а к интегралу, стоящему в его правой части, можно применить формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin(2ax)\operatorname{ctg}x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ctg}x d\left(\frac{1}{2a}-\frac{\cos(2ax)}{2a}\right)=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx. \ \square$$

2.2. Следуя [2, приложение II.3], символом $\beta(a)$ обозначим функцию, связанную с дигамма-функций Эйлера $\psi(a)$ равенством

$$\beta(a)=\frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{1+a}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right).$$

Для неё справедлива формула

$$\beta(a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+a}, \tag{2.8}$$

(см., например, [2, приложение II.3]).

Из теоремы 1 можно извлечь интегральные представления для функций $\psi(a)$ и $\beta(a)$, а именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *При $0<a<1$ справедливы равенства*

$$\psi(a)=-\gamma-2\ln 2-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi)+\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(a\pi)-\cos(2a-1)x}{\cos x}\,dx \tag{2.9}$$

$$=-\gamma-\ln 2-\frac{1}{2a}-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi)+\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin(a\pi)-\sin(2ax))\operatorname{tg}x\,dx \tag{2.10}$$

и

$$\beta(a)=\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}-\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(2a-1)x}{\sin x}\,dx \tag{2.11}$$

$$=\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{a\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx. \tag{2.12}$$

Доказательство. Разлагая на простейшие дроби выражения

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}, \quad \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}, \quad \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2}, \quad \frac{1}{k(k^2-a^2)}$$

и применяя тождества (1.1) и (2.8), заметим, что левые части равенств (2.1), (2.2), (2.6) и (2.4) в терминах значений функций $\psi(a)$ и $\beta(a)$ равны

$$\frac{1}{4a}\left(\beta\left(\frac{1-a}{2}\right)-\beta\left(\frac{1+a}{2}\right)\right), \quad -\frac{1}{4a^2}\left(2\gamma+4\ln 2+\psi\left(\frac{1-a}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+a}{2}\right)\right),$$

$$\frac{1}{2}\Big(\beta(1-a)+\beta(1+a)\Big), \quad -\frac{1}{2a^2}\Big\{2\gamma+\psi(1+a)+\psi(1-a)\Big\}$$

соответственно. Следовательно, применяя теорему 1 и следствие 1 и меняя $(1+a)/2$ на a в первых двух равенствах, получим, что справедливы тождества

$$\beta(1-a)-\beta(a)=\frac{2}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(2a-1)x}{\sin x}\,dx,$$

$$\psi(1-a)+\psi(a)=-2\gamma-4\ln 2+\frac{2}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(a\pi)-\cos(2a-1)x}{\cos x}\,dx,$$

$$\beta(1-a)+\beta(1+a)=\frac{2}{a\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx$$

и, соответственно,

$$\psi(1+a)+\psi(1-a)=-2\gamma-2\ln 2+\frac{2}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin(a\pi)-\sin(2ax))\operatorname{tg}x\,dx.$$

С другой стороны, как известно,

$$\beta(1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}-\beta(a), \qquad \psi(1-a)=\psi(a)-\pi\operatorname{ctg}(a\pi),$$

$$\beta(1+a)=\frac{1}{a}-\beta(a), \qquad \psi(1+a)=\frac{1}{a}+\psi(a)$$

(см., например, [2, приложения II.2 и II.3]). Учтя эти формулы в приведённых выше равенствах, получаем справедливость тождеств (2.9)–(2.12). Следствие 2 доказано. □

Отметим, что формула (2.11) приведена в [10, глава XII, п. 8, стр. 392], а формула (2.12) — в [2, глава 2, п. 2.5.12, формула 27], а их доказательства, приведённые здесь, как и доказательства равенств (2.9) и (2.10), являются оригинальными.

Следуя С. Рамануджану (см., [4, глава 2]), символом $\varphi(a)$ при $a > 1$ обозначим функцию

$$\varphi(a) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(ak)^3 - ak} = 1 + \frac{2}{a^3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - 1/a^2)}.$$

Из этого определения и равенства (2.4) следует интегральное представление для функции $\varphi(a)$, а именно:

$$\varphi(a) = 1 + \frac{2}{a}\Big(\ln 2 - \frac{1}{\sin(\pi/a)}\int_0^{\pi/2} (\sin(\pi/a) - \sin(2x/a))\operatorname{tg} x\, dx\Big). \qquad (2.13)$$

Сравнивая далее равенства (2.13) и (2.10), находим, что справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 3. *При $a > 1$ справедливо равенство*

$$\varphi(a) = -\frac{1}{a}\big(2\gamma + \pi \operatorname{ctg}(\pi/a) + 2\psi(1/a)\big).$$

Следствие 3 в неявном виде содержится в [4, см. утверждение 11, стр. 186].

2.3. Символом

$${}_{p+1}F_p(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}; b_1, b_2, \ldots, b_p; z),$$

как обычно, обозначим обобщённый гипергеометрический ряд с параметрами числителя $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ и знаменателя $b_1, b_2, \ldots, b_p$ и аргументом z (см., например, [5, глава 2, формула 2.1.2]).

Используя хорошо известные формулы из теории гипергеометрических рядов

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(ax)}{a\sin x} &= {}_2F_1\Big(\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 x\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k(2k+1)} \prod_{j=1}^{k} \Big(1 - \Big(\frac{a}{2j-1}\Big)^2\Big) \sin^{2k} x, \\
\cos(2ax) &= {}_2F_1\Big(-a, a; \frac{1}{2}; \sin^2 x\Big) \\
&= 1 - a^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k}{k^2 C_{2k}^k} \prod_{j=1}^{k-1} \Big(1 - \Big(\frac{a}{j}\Big)^2\Big) \sin^{2k} x
\end{aligned}$$

(см., например, [11, глава 15, формулы 15.4.12 и 15.4.16] или [5, глава 2, упражнения 12 и 13]), где a — произвольное комплексное число, $x\in[0,\pi/2]$, а произведение по пустому множеству считается равным 1, а также известные формулы

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}x\,dx=\frac{4^k}{(2k+1)C_{2k}^k},\qquad \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2k}x\,dx=\frac{\pi}{2}\frac{C_{2k}^k}{4^k}$$

(см., например, [2, п. 2.5.3, формула 1]), легко показать, что значения гипергеометрических функций ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$ при некоторых значениях параметров a_i, b_i и $z=1$ связаны с определёнными интегралами, участвующими в равенствах следствия 1. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $|a|<1$. *Тогда справедливы равенства*

$$ {}_3F_2\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\right)=\frac{2}{a\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx, \tag{2.14}$$

$$ {}_4F_3\left(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2},1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;1\right)=\frac{2}{a^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(ax)}{\sin x}\,dx, \tag{2.15}$$

$$ {}_3F_2\left(1-a,1+a,\frac{1}{2};\frac{3}{2},2;1\right)=\frac{2}{a^2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2dx, \tag{2.16}$$

$$ {}_4F_3\left(1-a,1+a,1,1;\frac{3}{2},2,2;1\right)=\frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(x-\frac{\sin(2ax)}{2a}\right)\frac{dx}{\sin^2 x}. \tag{2.17}$$

§3. Вокруг теоремы Гаусса

3.1. Пусть a является правильной положительной рациональной дробью, то есть $a=p/q$, где $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда интегралы, стоящие в правых частях равенств теоремы 1, заменой очевидно сводятся к интегралам от $R(\sin x,\cos x)$, где $R(u,v)$ — дробно-рациональная функция двух переменных. Это позволяет вычислять интегралы, стоящие в правых частях равенств теоремы 1, следствий из неё и теоремы 2 при $a=p/q$ в терминах элементарных функций. Данный пункт настоящей работы посвящён их вычислению. Для этого нам понадобятся следующие элементарные равенства

$$\sin(2nx)=2^{2n-1}\sin x\cos x\prod_{j=1}^{n-1}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{j\pi}{2n}\right),\quad n=2,3,\dots,\tag{3.1}$$

$$\sin(2n+1)x=2^{2n}\sin x\prod_{j=1}^{n}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{j\pi}{2n+1}\right),\quad n=1,2,\dots\tag{3.2}$$

(см., например, [3, глава 1, п. 1.391, формулы 1–4]). Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $a=p/q$, где $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда справедливы равенства*

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx=2\cos\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}\tag{3.3}$$

и

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(ax/2)}{\sin x}\,dx&=-\frac{1}{2}\ln q+\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\cos\frac{pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{2q}\\&+\sin\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Доказательство. Заменив переменную x на $2qx$, находим, что

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx=2q\int_0^{\pi/4q}\frac{\sin(2px)}{\sin(2qx)}\,dx.\tag{3.5}$$

Применив далее равенство (3.1), заметим, что подынтегральная функция является правильной дробно-рациональной функцией от переменной $u=\cos^2 x$, поэтому

$$\frac{\sin(2px)}{\sin(2qx)}=\sum_{k=1}^{q-1}\frac{A_k}{\cos^2 x-\cos^2\frac{k\pi}{2q}},$$

где

$$\begin{aligned}A_k&=\lim_{x\to\frac{k\pi}{q}}\frac{(\cos^2 x-\cos^2\frac{k\pi}{q})\sin(2px)}{\sin(2qx)}\\&=\frac{(-1)^{k-1}}{2q}\sin\frac{k\pi}{q}\sin\frac{pk\pi}{q},\quad k=1,2\dots,q-1.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^{\pi/4q} \frac{dx}{\cos^2 x - \cos^2 \frac{k\pi}{2q}} = \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{q}} \left(\ln\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q} - \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q} \right).$$

Таким образом, из равенства (3.5) следует справедливость равенства (3.3).

Теперь докажем, что справедливо равенство (3.4). Та же замена показывает, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(ax/2)}{\sin x}\,dx = 2q \int\limits_0^{\pi/4q} \frac{\sin^2(px)}{\sin(2qx)}\,dx. \tag{3.6}$$

Рассмотрим сначала случай, когда p является чётным числом. В этом случае из равенства (3.1) следует, что теперь $(\sin^2(px))/(\sin x \cos x \sin(2qx))$ является правильной дробно-рациональной функцией от той же переменной $u = \cos^2 x$. Поэтому

$$\frac{\sin^2(px)}{\sin x \cos x \sin(2qx)} = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{A_k}{\cos^2 x - \cos^2 \frac{k\pi}{2q}},$$

где

$$A_k = \frac{(-1)^{k+1}}{q} \sin^2 \frac{pk\pi}{2q}, \quad k = 1, 2 \ldots, q-1.$$

Таким образом, записав (3.6) в виде

$$\int\limits_0^{\pi/4q} \frac{\sin^2(px)}{\sin(2qx)}\,dx = \sum_{k=1}^{q-1} A_k \int\limits_0^{\pi/4q} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \cos^2 \frac{k\pi}{2q}}\,dx,$$

учтя формулы для чисел A_k и тождества

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{\pi/4q} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \cos^2 \frac{k\pi}{2q}}\,dx \\ &\qquad = \ln\sin\frac{k\pi}{2q} - \frac{1}{2}\Big(\ln\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q} + \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q} \Big) \end{aligned} \tag{3.7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{q} (-1)^k \ln\sin\frac{k\pi}{2q} = \frac{1}{2}\ln q, \tag{3.8}$$

приходим к справедливости равенства (3.4) в рассматриваемом случае.

В случае, когда p является нечётным числом равенство (3.2) показывает, что функция $(\sin^2(px))/(\sin x \sin(2qx))$ является правильной дробно-рациональной функцией от $u = \cos x$. Поэтому

$$\frac{\sin^2(px)}{\sin x \sin(2qx)} = \frac{A}{\cos x} + \sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{A_k}{\cos x - \cos\frac{k\pi}{2q}} + \frac{B_k}{\cos x + \cos\frac{k\pi}{2q}}\right),$$

где

$$A = \frac{(-1)^{q-1}}{2q} \quad \text{и} \quad A_k = B_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2q}\sin^2\frac{pk\pi}{2q}, \quad k = 1, 2\ldots, q-1.$$

Из этих рассуждений следует, что равенство (3.6) можно записать в виде

$$\int\limits_0^{\pi/4q} \frac{\sin^2(px)}{\sin(2qx)}\,dx = A\int\limits_0^{\pi/4q} \operatorname{tg} x\,dx + 2\sum_{k=1}^{q-1} A_k \int\limits_0^{\pi/4q} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{2q}}\,dx.$$

Остаётся лишь вычислить определённые интегралы, участвующие в правой части этого равенства, и вновь учесть тождество (3.8) в полученном соотношении. Лемма 1 доказана. □

Далее нам понадобится следующее утверждение, которое, на наш взгляд, представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть p, $q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{q} \sin(2k-1)\frac{p\pi}{q}\operatorname{ctg}(2k-1)\frac{\pi}{4q} = q \tag{3.9}$$

и

$$\sum_{k=1}^{q} \sin\frac{2pk\pi}{q}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2q} = q - 2p. \tag{3.10}$$

Доказательство. Сначала покажем, что справедливо тождество

$$\sin(4px)\operatorname{ctg} x = 1 + \cos(4px) + 2\sum_{j=1}^{2p-1}\cos(2jx). \tag{3.11}$$

Если $\sin x = 0$, то $x = m\pi$, $m \in \mathcal{Z}$, и поэтому правая часть равенства (3.11) равна $4p$ и

$$\lim_{x\to m\pi}\sin(4px)\operatorname{ctg} x = 4p,$$

то есть равенство (3.11) справедливо. Если же $\sin x \neq 0$, то

$$\sin x\left(1 + \cos(4px) + 2\sum_{j=1}^{2p-1}\cos(2jx)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin x + \frac{1}{2}\big(\sin(4p+1)x - \sin(4p-1)x\big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2p-1}(\sin(2j+1)x - \sin(2j-1)x) = \sin(4px)\cos x.
\end{aligned}
$$

Разделив обе части этого равенства на $\sin x$, приходим к справедливости тождества (3.11) при всех $x \in \mathcal{R}$.

Положив $x = (2k-1)\pi/(4q)$ в (3.11), получим, что

$$
\sin(2k-1)\frac{p\pi}{q}\operatorname{ctg}(2k-1)\frac{\pi}{4q} = 1 + \cos(2k-1)\frac{p\pi}{q} + 2\sum_{j=1}^{2p-1}\cos(2k-1)\frac{j\pi}{2q}, \quad k = 1, 2, \ldots, q.
$$

Складывая эти равенства и учитывая тождества

$$
\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)\frac{j\pi}{2q} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2p,
$$

которые следуют из равенства

$$
2\sin x\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)x = \sin(2qx),
$$

приходим к справедливости (3.9).

Теперь докажем формулу (3.10). Положив $x = (k\pi)/(2q)$ в (3.11), получим, что

$$
\sin\frac{2pk\pi}{q}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2q} = 1 + \cos\frac{2pk\pi}{q} + 2\sum_{j=1}^{2p-1}\cos\frac{kj\pi}{q}, \quad k = 1, 2, \ldots, q-1.
$$

Складывая эти равенства и учитывая легко проверяемые тождества (см. выше)

$$
\sum_{k=1}^{q-1}\cos\frac{kj\pi}{q} = -\frac{1}{2}\big(1 + \cos(j\pi)\big), \quad j = 1, 2, \ldots 2p,
$$

находим, что

$$
\sum_{k=1}^{q}\sin\frac{2pk\pi}{q}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2q} = q - 2 - \sum_{j=1}^{2p-1}\big(1 + \cos(j\pi)\big) = q - 2p.
$$

Таким образом, равенство (3.10) также справедливо. $\square$

В математической литературе накоплено большое количество работ, посвящённых тождествам, содержащим конечные тригонометрические суммы (см., например [12] и [13] и цитированную в них литературу). По-видимому, элементарные тождества (3.9) и (3.10) также не новы, однако, нам не известны источники, где они были бы приведены.

Теперь докажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $a = p/q$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда справедливы равенства*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\Big)^2\,dx = \frac{1}{2}\sin\frac{p\pi}{q} + \frac{2p}{q}\sin\frac{p\pi}{q}\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q} \tag{3.12}$$

и

$$\int\limits_0^{\pi/2}\Big(x - \frac{\sin(2ax)}{2a}\Big)\frac{dx}{\sin^2 x} = -\ln(2q) + \frac{q}{p}\sin^2\frac{p\pi}{2q} + 2\sum_{k=1}^{q}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{2q} - 2\cos\frac{p\pi}{q}\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, находим, что

$$\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\Big)^2 dx = 2q\int\limits_0^{\pi/4q}\frac{\sin^2(2px)}{\sin^2(2qx)}\,dx \tag{3.14}$$

и

$$\frac{\sin^2(2px)}{\sin^2(2qx)} = \sum_{k=1}^{q-1}\Big(\frac{A_k}{\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{2q}} + \frac{B_k}{(\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{2q})^2}\Big), \tag{3.15}$$

где

$$A_k = -\frac{1}{2q^2}\sin\frac{pk\pi}{q}\Big(2p\cos\frac{pk\pi}{q}\sin\frac{k\pi}{q} + \sin\frac{pk\pi}{q}\cos\frac{k\pi}{q}\Big),$$

$$B_k = \Big(\frac{1}{2q}\sin\frac{k\pi}{q}\sin\frac{pk\pi}{q}\Big)^2, \quad k = 1, 2\ldots, q-1,$$

и, кроме того,

$$\int\limits_0^{\pi/4q} \frac{dx}{(\cos^2 x - \cos^2 \frac{k\pi}{2q})^2} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{q}}{\sin^3\frac{k\pi}{q}}\Bigl(\ln\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q} - \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}\Bigr) + \frac{\sin\frac{\pi}{2q}}{\sin^2\frac{k\pi}{q}\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q}}.$$

Учитывая эти вычисления и (3.8) в равенстве (3.15), а затем в (3.14), заключаем, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \Bigl(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\Bigr)^2 dx = \frac{1}{q}\sin\frac{p\pi}{q}\Bigl(2p\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}\sin(2k-1)\frac{p\pi}{q}\operatorname{ctg}(2k-1)\frac{\pi}{4q}\Bigr).$$

Остаётся только учесть равенство (3.9). Равенство (3.12) доказано.

Теперь докажем, что справедливо равенство (3.13). Пусть ϵ — некоторое положительное число. Заменим x на $2qx$ в интеграле

$$\int\limits_{\epsilon}^{\pi/2}\Bigl(x - \frac{\sin(2ax)}{2a}\Bigr)\frac{dx}{\sin^2 x} = 2q^2\int\limits_{\epsilon/2q}^{\pi/4q}\Bigl(2x - \frac{\sin(4px)}{2p}\Bigr)\frac{dx}{\sin^2(2qx)}. \tag{3.16}$$

Применяя далее равенство (3.1), легко заметить, что функция

$$(\sin(4px))/(\sin x\cos x\sin^2(2qx))$$

является правильной дробно-рациональной функцией от $u = \cos^2 x$. Поэтому

$$\frac{\sin(4px)}{\sin x\cos x\sin^2(2qx)} = \frac{A}{1-\cos^2 x} + \frac{B}{\cos^2 x} + \sum_{k=1}^{q-1}\Bigl(\frac{A_k}{\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{2q}} + \frac{B_k}{(\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{2q})^2}\Bigr),$$

где

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin(4px)}{\cos x\sin^2(2qx)} = \frac{p}{q^2}, \quad B = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x\sin(4px)}{\sin x\sin^2(2qx)} = -\frac{p}{q^2}$$

и

$$A_k = -\frac{2p}{q^2}\cos\frac{2pk\pi}{q}, \quad B_k = \frac{1}{2q^2}\sin\frac{k\pi}{q}\sin\frac{2pk\pi}{q}, \quad k = 1, 2\ldots, q-1.$$

Следовательно, равенство (3.16) можно записать в виде

$$\int\limits_{\epsilon}^{\pi/2}\Big(x-\frac{\sin(2ax)}{2a}\Big)\frac{dx}{\sin^2 x}=2q^2\int\limits_{\epsilon/2q}^{\pi/4q}\Big(\frac{2x}{\sin^2(qx)}-\frac{1}{2p}\big(A\operatorname{ctg}x+B\operatorname{tg}x\big)\Big)\,dx$$

$$-\frac{q^2}{p}\sum_{k=1}^{q-1}\Big(A_k\int\limits_{\epsilon/2q}^{\pi/4q}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x-\cos^2\frac{k\pi}{2q}}\,dx+B_k\int\limits_{\epsilon/2q}^{\pi/4q}\frac{\sin x\cos x}{(\cos^2 x-\cos^2\frac{k\pi}{2q})^2}\,dx\Big).$$

Переходя к пределу при $\epsilon\to 0$ в этом равенстве и учитывая, что

$$2q^2\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\epsilon/2q}^{\pi/4q}\Big(\frac{1}{2p}\big(A\operatorname{ctg}x+B\operatorname{tg}x\big)-\frac{2x}{\sin^2(qx)}\Big)\,dx=\ln\big(q\sin\frac{\pi}{2q}\big)-1,$$

а также (3.7) и

$$\int\limits_{0}^{\pi/4q}\frac{\sin x\cos x}{\big(\cos^2 x-\cos^2\frac{k\pi}{2q}\big)^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q}}-\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2q}}\Big),$$

находим, что, правая часть равенства (3.16) равна

$$1-\ln(2q)+2\sum_{k=1}^{q}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{2q}$$

$$-2\cos\frac{p\pi}{q}\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}$$

$$-\frac{1}{2p}\Big(\cos\frac{p\pi}{q}\sum_{k=1}^{q}\sin(2k-1)\frac{p\pi}{q}\operatorname{ctg}(2k-1)\frac{\pi}{4q}-\sum_{k=1}^{q-1}\sin\frac{2pk\pi}{q}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2q}\Big).$$

Остаётся учесть в этом выражении равенства (3.9) и (3.10). Лемма 3 доказана. □

3.2. В леммах 1 и 3 вычислены интегралы, стоящие в правых частях равенств из следствия 1. Таким образом, применив эти леммы к равенствам (2.1), (2.5), (2.6) и (2.7), приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $a=p/q$, где $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{q}{p}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}=\Big(\frac{q}{p}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}\ln q+\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\cos\frac{pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{2q}\Big),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2}=\frac{q}{2p}+2\sum_{k=1}^{q}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)}=\Big(\frac{q}{p}\Big)^2\Big\{\ln(4q)-\frac{q}{2p}-2\sum_{k=1}^{q}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{2q}\Big\}.$$

Несложно заметить, что всюду в правых частях этих равенств суммирование можно свести до наибольшего целого числа, не превосходящего числа $q/2$, то есть до $[q/2]$. При этом формулировка соответствующей теоремы становится менее лаконичной, но, не смотря на это, сформулируем её, учтя преимущество, которое она даёт при вычислениях.

Теорема 4. *Пусть $a=p/q$, где $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда, если p и q — нечётные числа, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{q}{p}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q}\tag{3.17}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}=\Big(\frac{q}{p}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{q}{2}-\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\cos\frac{pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q}\Big),\tag{3.18}$$

если же p и q — числа разной чётности, то

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{q}{p}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{4q}\tag{3.19}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}=\Big(\frac{q}{p}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}\ln q+\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\cos\frac{pk\pi}{q}\ln\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2q}\Big),\tag{3.20}$$

и, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2}=\frac{q}{2p}+2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q}\tag{3.21}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)}=\Big(\frac{q}{p}\Big)^2\Big(\ln(2q)-\frac{q}{2p}-2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q}\Big). \qquad (3.22)$$

В дополнении к теореме 4 отметим, что справедливо также равенство

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}&\frac{(-1)^k}{k(k^2-a^2)}\\ &=\Big(\frac{q}{p}\Big)^2\Big(\ln 2-\frac{q}{2p}-2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q}\Big).\end{aligned} \qquad (3.23)$$

Многочисленные примеры, содержащие формулы для сумм рядов из равенств (3.17)–(3.23) при конкретных значениях a, приведены, например, в [2, глава 5, п. 5.1.25].

3.3. Применив лемму 3 к интегральному представлению дигамма-функции Эйлера $\psi(a)$ (см. следствие 2, формула (2.10)), приходим ещё к одному доказательству теоремы Гаусса, сформулированной во введении.

Кроме того, учитывая связь между функцией $\psi(a)$ и функцией Рамануджана $\varphi(a)$ (см. следствие 2), находим, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда справедливо равенство*

$$\varphi\Big(\frac{q}{p}\Big)=\frac{2p}{q}\Big(\ln(2q)-2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q}\Big).$$

Полагая $p=1$ и $q=n$ в этом равенстве, получим

$$\varphi(n)=\frac{2}{n}\Big(\ln(2n)-2\sum_{k=1}^{[n/2]}\cos\frac{2k\pi}{n}\ln\sin\frac{k\pi}{n}\Big).$$

Формула для вычисления значений $\varphi(a)$ в натуральных точках, содержащая определённые интегралы от некоторых дробно-рациональных функций, есть в [4, утверждение 12, стр. 186]. Там же перечислены значения $\varphi(2)$: $\varphi(6)$, $\varphi(8)$, $\varphi(10)$, $\varphi(12)$, $\varphi(16)$ и $\varphi(20)$ (см. [4, пример 14.2, стр. 192]).

3.4. Леммы 1 и 3 также позволяют вывести формулы для вычисления значений гипергеометрических функций

$${}_3F_2\Big(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\Big),\quad {}_3F_2\Big(1-a,1+a,\frac{1}{2};\frac{3}{2},2;1\Big),$$

$$ {}_4F_3\Big(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2},1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;1\Big), \quad {}_4F_3\Big(1-a,1+a,1,1;\frac{3}{2},2,2;1\Big) $$

при рациональных значениях параметра a. Действительно, учтя равенства из этих лемм в формулах (2.14)–(2.17), приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть $a=p/q$, где $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда, если p и q — нечётные числа, то*

$$ {}_3F_2\Big(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\Big) = \frac{4q}{p\pi}\cos\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin{(2k-1)}\,\frac{p\pi}{2q}\ln\sin{(2k-1)}\,\frac{\pi}{2q} $$

и

$$ {}_4F_3\Big(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2},1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;1\Big) = \frac{4q^2}{p^2}\Big(-\frac{1}{2}\ln\frac{q}{2}+\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\cos\frac{pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q} + \sin\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin{(2k-1)}\,\frac{p\pi}{2q}\ln\sin{(2k-1)}\,\frac{\pi}{2q}\Big), $$

если же p и q — числа разной чётности, то

$$ {}_3F_2\Big(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\Big) = \frac{4q}{p\pi}\cos\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{4q} $$

и

$$ {}_4F_3\Big(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2},1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;1\Big) = \frac{4q^2}{p^2}\Big(-\frac{1}{2}\ln q+\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^{k-1}\cos\frac{pk\pi}{q}\ln\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2q} + \sin\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin{(2k-1)}\,\frac{p\pi}{2q}\ln\operatorname{tg}{(2k-1)}\,\frac{\pi}{4q}\Big), $$

и, кроме того,

$$ {}_3F_2\Big(1-a,1+a,\frac{1}{2};\frac{3}{2},2;1\Big) $$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi}\,{}_3F_2\Big(\frac{1}{2}-a, \frac{1}{2}+a, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1\Big) \\
&= \frac{q}{p\pi}\sin\frac{p\pi}{q}\Big(\frac{q}{p} + 4\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin\,(2k-1)\,\frac{\pi}{2q}\Big)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\Big(1-a, 1+a, 1, 1; \frac{3}{2}, 2, 2; 1\Big) \\
&\quad = \frac{q^2}{p^2}\Big(\frac{q}{p}\sin^2\frac{p\pi}{2q} - \ln q + 2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q} \\
&\qquad - 2\cos\frac{p\pi}{q}\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q}\Big).
\end{aligned}
$$

Результаты этого пункта позволяют существенно дополнить список известных формул для вычисления значений функций ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$, приведённый, например, в справочнике [14, глава 7, п.п. 7.4 и 7.5].

3.5. Пусть $a_n = p_n/q_n$ — такая последовательность положительных рациональных чисел, что $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Если в формулах (3.17)–(3.23) положить $a = a_n$ и перейти к пределу при $n \to +\infty$ в обеих частях найденных равенств, то получим, очевидно, представления чисел,

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}, \quad \ln 2,
$$

то есть постоянных Каталана, Апери и $\ln 2$ в виде пределов некоторых числовых последовательностей. Сформулируем в виде следствия из теоремы 4 формулы, которые при этом получаются, если положить $a_n = 1/(2n)$.

Следствие 4. *Справедливы равенства*

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} = 2\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}\ln\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{8n},
$$

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^3} = 4\lim_{n\to+\infty} n^2\Big(\ln(2n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{2n}\ln\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{4n}\Big),
$$

$$
\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\Big(n + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}\Big),
$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}=4\lim_{n\to+\infty}n^2\Big(\ln(4n)-2n-2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\ln\sin\frac{k\pi}{2n}\Big),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}=4\lim_{n\to+\infty}n^2\Big(\ln 2-n-2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}\Big).$$

Этот список, очевидно, можно продолжить, взяв в качестве a_n другие последовательности, например, $a_n=1/(2n+1)$ или $a_n=2/(2n+1)$.

Различные представления значений дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в нечётных точках в виде пределов некоторых последовательностей, например, соотношение типа

$$\zeta(2n+1)=\lim_{q\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2q}\right)^{2n+1}\sum_{p=1}^{q}\operatorname{ctg}^{2n+1}\left(\frac{p\pi}{2q+1}\right),$$

где $p,q\in\mathcal{N}$, хорошо известны (см. [15]). Отметим, что подобные формулы в дальнейшем были обобщены на функцию $\zeta(s)$ при любом s таком, что $\Re s>1$ (см. [16]). Однако представления перечисленных выше чисел в следствии 4 принципиально отличаются от описанных выше, и нам не известны источники, содержащие формулы подобного типа.

Список литературы

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*, Наука, М., 1973.

[2] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды*. Т. 1. *Элементарные функции*, Физматлит, М., 2002.

[3] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1963.

[4] Berndt B C., *Ramanujann's notebooks. Part* I, Springer Verlag, New York, 1985.

[5] Аски Р., Рой Р, Эндрюс Дж., *Специальные функции*, МЦНМО, М., 2013.

[6] Choi J., Cvijovic D., *Values of the polygamma functions at rational arguments*, J. Phys. A **40** (2007), no. 50, 15019–15028.

[7] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А., *Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов*, Докл. РАН **482** (2018), №5, 500–503.

[8] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А., *Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов*, Тр. Моск. мат. о-ва **80** (2019), №2, 157–177.

[9] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А., *Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями*, Мат. заметки **108** (2020), №4, 632–637.

[10] Bromwich T. J. I'A., *An introduction to the theory of infinite series*, 2nd ed., MacMillan, London, 1926.

[11] *NIST handbook of mathematcal functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[12] Осипов Н. Н., *О вычислении конечных тригонометрических сумм*, Мат. просв. Сер. 3 **2019**, вып. 23, 174–208.

[13] Berndt B. C., Zaharescu A., *Finite trigonometric sums and class numbers*, Math. Ann. **330** (2004), no. 3, 551–575.
[14] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды*. Т.3. *Специальные функции. Дополнительные главы*, Физматлит, М., 2003.
[15] Apostol T. M., *Another elementary proof of Euler's formula for* $\zeta(2n)$, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 425–431.
[16] Cvijovic D., Srivastava H. M., *Limit representations of Riemann's zeta Function*, Amer. Math. Monthly **119** (2012), no. 4, 324–330.

Механико-математическийфакультет
МГУ им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
119991, Ленинские горы, 1
Москва Россия
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило 15 июня 2022 г.

Северный (Арктический) федеральный
университет им. М.В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
163002, Набережная Северной Двины, 17
Архангельск, Россия
E-mail: t.Safonova@narfu.ru