Е. Д. Ребров, Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками, *Чебышевский сб.*, 2012, том 13, выпуск 3, 53–90

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 3 (2012)

УДК 511.9.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С МОДИФИЦИРОВАННЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СЕТКАМИ[1]

© 2012. Е. Д. Ребров (г. Тула)

Аннотация

Построен концентрический алгоритм численного интегрирования для периодических функций многих переменных из класса E_s^α с использованием алгебраических сеток с весами по методу К. К. Фролова в модификации Н. М. Добровольского.

Библиография: 22 название.

1 Введение

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного интегрирования функций многих переменных по единичному $s-$мерному кубу

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s\}$$

по методу К. К. Фролова [21] в модификации Н. М. Добровольского ([8] — [14]) для непрерывных периодических функций с периодом равным единице

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ 11-01-00571

по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$. Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \ldots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \,|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$.

Напомним определения трех типов обобщенных параллелепипедальных сеток $M(\Lambda)$, $M_1(\Lambda)$ и $M'(\Lambda)$ решетки Λ (см. [19] стр. 204), которые определяются через взаимную решетку $\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 2. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество $M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}$.

Модификация Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова опирается на следующую общую конструкцию (см. [19] стр. 247 — 248).

Определение 3. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s,$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1; 1)^s,$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s.$$

Определение 4. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\textit{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda),\{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую решетку $\Lambda + \vec{z}$ и дадим следующие определения.

Определение 5. *Для произвольной решетки Λ и произвольного $\vec{z}$ модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda,\vec{z})$ назавем множество $M(\Lambda,\vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda,\vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap [-1;1)^s$.

Модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda,\vec{z})$ назавем множество $M'(\Lambda,\vec{z}) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y}\in M_1(\Lambda,\vec{z})\}$.

Определение 6. *Квадратурной формулой с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ назавем формулу вида*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f],$$

$$\textit{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda,\vec{z}),\{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda,\vec{z}) = |M'(\Lambda,\vec{z})|,$$

$R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Квадратурные формулы с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется решетка Λ и её подрешетка $\Lambda_1 \subset \Lambda$ и $t = \frac{\det\Lambda_1}{\det\Lambda}$ — индекс подрешетки Λ_1 решетки Λ. Обозначим через $K(\Lambda,\Lambda_1)$ полный набор представителей по одному из каждого класса решетки Λ по подрешетки Λ_1, тогда $|K(\Lambda,\Lambda_1)| = t$ и справедливо представление

$$\Lambda = \bigcup_{\vec{z}\in K(\Lambda,\Lambda_1)} (\Lambda_1 + \vec{z}).$$

Переходя к взаимным решеткам получим: $\Lambda^* \subset \Lambda_1^*$,

$$\Lambda_1^* = \bigcup_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} (\Lambda^* + \vec{z}), \quad M'(\Lambda_1) = \bigcup_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} M'(\Lambda,\vec{z}).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{t}\sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} \left((\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] \right), \quad (1)$$

$$R_{N'(\Lambda_1)}[f] = \frac{1}{t}\sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]. \quad (2)$$

Формулы (1) — (2) являются основой для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [7], стр. 192, 193).

Определение 7. *Для концентрической пары обобщенных параллелепипедальных сеткой II типа $M'(\Lambda) \subset M'(\Lambda_1)$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину*

$$\Delta = \frac{1}{t}\sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} |R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] - R_{N'(\Lambda_1)}[f]|^2. \quad (3)$$

Нетрудно понять, что определение 7 согласуется с аналогичным определение из работы [7] (см. стр. 204), так как сетка $M'(\Lambda_1)$ является произведением сетки $M'(\Lambda)$ и сетки $K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)$.

Цели данной работы — получить оценки погрешности квадратурных формул с модифицированными обобщенными параллелепипедальными сетками II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ для произвольной решетки Λ; конкретизировать общие оценки для случая алгебраической решетки Λ; получить оценки дискретной мультипликативной дисперсии для концентрических алгоритмов приближенного интегрирования с обобщенными параллелепипедальными сетками II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$.

2 Вспомогательные леммы

Как обычно, через $\zeta(\alpha)=\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ обозначается дзета-функция Римана при $\alpha>1$, для которой выполнены неравенства

$$\frac{1}{\alpha-1}=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}<\zeta(\alpha)<1+\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=1+\frac{1}{\alpha-1}.$$

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|\leqslant(\overline{\sigma})^{-2}, \tag{4}$$

где $\overline{\sigma}=\max(1,|\sigma|)$.

Доказательство. Если $\sigma\neq 0$, то взяв интеграл $\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx$ по частям, получим:

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx=\int\limits_{-1}^{0}(1+x)e^{2\pi i\sigma x}dx+\int\limits_{0}^{1}(1-x)e^{2\pi i\sigma x}dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi i\sigma}\left(-\int\limits_{-1}^{0}e^{2\pi i\sigma x}dx+\int\limits_{0}^{1}e^{2\pi i\sigma x}dx\right)=\frac{1}{(2\pi i\sigma)^2}\left(-e^{2\pi i\sigma x}\Big|_{-1}^{0}+e^{2\pi i\sigma x}\Big|_{0}^{1}\right)=$$
$$=\frac{e^{2\pi i\sigma}-2+e^{-2\pi i\sigma}}{(2\pi i\sigma)^2}=\frac{\sin^2\pi\sigma}{\pi^2\sigma^2}.$$

Теперь оценка (4) для $\sigma\neq 0$ следует из неравенства

$$\left|\frac{\sin\pi\sigma}{\pi\sigma}\right|\leqslant\begin{cases}1=\dfrac{1}{\overline{\sigma}}, & \text{если}|\sigma|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\pi\overline{\sigma}}, & \text{если}|\sigma|>1.\end{cases}$$

Если $\sigma=0$, то оценка (4) очевидна:

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx=2\int\limits_{0}^{1}(1-x)dx=1=\frac{1}{(\overline{\sigma})^2}.$$

□

Лемма 2. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } |x|\geqslant 1,\\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^{\nu}}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } -1<x<0\end{cases}. \tag{5}$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma)=\int\limits_{-1}^{1}\rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)|\leqslant\frac{B(r)}{\sigma^{r+1}} \tag{6}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с константой $B(r)$, где

$$B(r)=\frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r}\sup_{|\sigma|>1}\left|\big(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma}-P_{r-1}(0)\big)-\int\limits_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|,$$

определена формулами 9 и 10 (см. стр. 61).

Доказательство. Прежде всего проверим выполнение тождества

$$\rho_r(x)+\rho_r(x-1)=1\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

Для этого воспользуемся интегральным представлением

$$\rho_r(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } |x|\geqslant 1,\\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\int\limits_0^x((1-t)t)^{r-1}dt, & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\int\limits_0^{|x|}((1-t)t)^{r-1}dt, & \text{при } -1<x<0.\end{cases}$$

Так как при $0\leqslant x\leqslant 1$

$$\int\limits_0^x((1-t)t)^{r-1}dt=\int\limits_{1-x}^1((1-t)t)^{r-1}dt$$

и

$$\int_0^1 ((1-t)t)^{r-1}dt = \frac{r-1}{r}\int_0^1 (1-t)^{r-2}t^r dt = \ldots =$$

$$= \frac{(r-1)(r-2)\ldots 1}{r(r+1)\ldots(2r-2)}\int_0^1 t^{2r-2}dt = \frac{1}{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}},$$

то

$$\rho_r(x) + \rho_r(x-1) = 1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\int_0^x ((1-t)t)^{r-1}dt +$$

$$+1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\int_0^{|x-1|} ((1-t)t)^{r-1}dt =$$

$$= 2 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\left(\int_0^x ((1-t)t)^{r-1}dt + \int_x^1 ((1-t)t)^{r-1}dt\right) =$$

$$= 2 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\int_0^1 ((1-t)t)^{r-1}dt = 1$$

и тождество установлено.

Из этого тождества и определения функции $\rho_r(x)$ сразу следуют равенства: $\rho_r(0) = 1$, $\rho_r(-1) = \rho_r(1) = 0$ и $\int\limits_{-1}^{1} \rho_r(x)dx = 1$.

Далее заметим, что для любого σ выполняется неравенство

$$\left|\int_{-1}^1 \rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant \int_{-1}^1 \rho_r(x)dx = \|\rho_r(x)\|_1 = 1,$$

поэтому при $|\sigma| \leqslant 1$ выполняется соотношение

$$\left|\int_{-1}^1 \rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-r}.$$

Пусть $|\sigma| > 1$, тогда для интеграла $I_r(\sigma)$ справедливы преобразования

$$
\begin{aligned}
I_r(\sigma) &= \int_0^1 \rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx + \int_0^1 \rho_r(x-1)e^{2\pi i\sigma(x-1)}dx = \\
&= \int_0^1 \rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx + \int_0^1 (1-\rho_r(x))e^{2\pi i\sigma(x-1)}dx = \\
&= e^{-2\pi i\sigma}\int_0^1 e^{2\pi i\sigma x}dx + \left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\int_0^1 \rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx = \\
&= e^{-2\pi i\sigma}\frac{e^{2\pi i\sigma}-1}{2\pi i\sigma} + \left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\left(\frac{\rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\rho_r'(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}dx\right) = \\
&= \frac{1-e^{-2\pi i\sigma}}{2\pi i\sigma} - \frac{1-e^{-2\pi i\sigma}}{2\pi i\sigma} - \left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\int_0^1 \frac{\rho_r'(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}dx = \\
&= \frac{\left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{2\pi i\sigma}\int_0^1 ((1-x)x)^{r-1}e^{2\pi i\sigma x}dx. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Заметим, что при $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$ имеем:

$$
\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu}P_\nu(x),
$$

где

$$
P_0(x) = 1, \quad P_{\nu+1} = \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P_\nu'(x) \quad (\nu = 0, \ldots, r-2),
$$
$$
P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu C_{r-1}^\nu \prod_{k=0}^{r-2}(r-1+\nu-k)x^\nu,
$$

и при $r \leqslant \nu \leqslant 2r-2$ имеем:

$$
\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P_{r-1}'(x),
$$
$$
P_{r-1,\nu}(x) = \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1}(-1)^\mu C_{r-1}^\mu \prod_{k=0}^{\nu-1}(r-1+\mu-k)x^{r-1+\mu-\nu} = P_{r-1,\nu-1}'(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x),
$$
$$
P_{r-1,2r-2}(x) = (-1)^{r-1}(2r-2)!.
$$

Отсюда следует, что проинтегрировав r раз по частям, получим

$$\int\limits_0^1 ((1-x)x)^{r-1}e^{2\pi i\sigma x}dx = \left.\frac{((1-x)x)^{r-1}e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}\right|_{-1}^{1} -$$

$$-\int\limits_0^1 \frac{((1-x)x)^{r-2}P_1(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}dx = -\int\limits_0^1 \frac{((1-x)x)^{r-2}P_1(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}dx = \ldots =$$

$$= (-1)^{r-1}\int\limits_0^1 \frac{P_{r-1}(x)e^{2\pi i\sigma x}}{(2\pi i\sigma)^{r-1}}dx =$$

$$= \left.\frac{(-1)^{r-1}P_{r-1}(x)e^{2\pi i\sigma x}}{(2\pi i\sigma)^r}\right|_0^1 + (-1)^r\int\limits_0^1 \frac{P'_{r-1}(x)e^{2\pi i\sigma x}}{(2\pi i\sigma)^r}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}\left(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)\right)}{(2\pi i\sigma)^r} + (-1)^r\int\limits_0^1 \frac{P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}}{(2\pi i\sigma)^r}dx. \tag{8}$$

Проинтегрировав ещё $r-2$ раза по частям, полагая $P_{r-1,r-1}(x) = P_{r-1}(x)$, получим

$$\int\limits_0^1 ((1-x)x)^{r-1}e^{2\pi i\sigma x}dx = \sum_{\nu=r-1}^{2r-2} \frac{(-1)^{\nu}\left(P_{r-1,\nu}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1,\nu}(0)\right)}{(2\pi i\sigma)^{\nu+1}}.$$

Переходя в равенстве (8) к модулям, получим

$$\left|\int\limits_0^1 ((1-x)x)^{r-1}e^{2\pi i\sigma x}dx\right| =$$

$$= \left|\frac{(-1)^{r-1}\left(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)\right)}{(2\pi i\sigma)^r} + (-1)^r\int\limits_0^1 \frac{P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}}{(2\pi i\sigma)^r}dx\right| \leqslant \frac{B_1(r)}{\overline{\sigma}^r},$$

где

$$B_1(r) = \frac{1}{(2\pi)^r}\sup_{|\sigma|>1}\left|\left(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)\right) - \int\limits_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|, \tag{9}$$

и, учитывая равенство 7, лемма полностью доказана с константой

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi}B_1(r). \tag{10}$$

□

Заметим, что лемма 1 является уточнением леммы 2 так как $\rho_1(x) = 1 - |x|$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Из доказанной леммы следует, что функция $\rho_r(\vec{x})$, заданная равенством

$$\rho_r(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{s} \rho_r(x_j), \tag{11}$$

является весовой функцией порядка $r+1$.

Лемма 3. *Для любого действительного σ и $\gamma > 1$ для величины $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$, заданной равенством*

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} (\overline{m+\sigma})^{-r},$$

выполняется неравенство

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) \leqslant \begin{cases} \dfrac{2\,(1+\zeta(\gamma)) + (1+2\zeta(\gamma))\,2^{\gamma}}{(\overline{\sigma})^{\gamma}}, & \text{при } 1 < \gamma \leqslant r, \\ \dfrac{2\,(1+\zeta(r)) + (1+2\zeta(r))\,2^{r}}{(\overline{\sigma})^{r}}, & \text{при } \gamma > r. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$ — четная функция. Действительно,

$$\psi_{\gamma,r}(-\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} (\overline{m-\sigma})^{-r} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{-m}^{\,-\gamma} (\overline{-m-\sigma})^{-r} =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} (\overline{m+\sigma})^{-r} = \psi_{\gamma,r}(\sigma).$$

Для $\sigma = 0$ имеем:

$$\psi_{\gamma,r}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} \overline{m}^{-r} = 1 + 2\zeta(\gamma + r) = \frac{1 + 2\zeta(\gamma + r)}{(\overline{\sigma})^{\gamma}}.$$

Преобразуем выражение для $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$ при $0 < \sigma < 1$, получим:

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \frac{1}{(\overline{\sigma})^{r}} + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\gamma}(m+\sigma)^{-r} + \frac{1}{(\overline{1-\sigma})^{r}} + \sum_{m=2}^{\infty} m^{-\gamma}(m-\sigma)^{-r} \leqslant$$
$$\leqslant 2 + 2\zeta(\gamma + r) = \frac{2 + 2\zeta(\gamma + r)}{(\overline{\sigma})^{\gamma}}.$$

Преобразуем выражение для $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$ при $1 \leqslant \sigma < 2$, получим:

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \frac{1}{(\overline{\sigma})^r} + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\gamma}(m+\sigma)^{-r} + 1 + 2^{-\gamma} +$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty} m^{-\gamma}(m-\sigma)^{-r} \leqslant \frac{1}{(\overline{\sigma})^r} + \frac{\zeta(\gamma)}{(\overline{\sigma})^r} + 1 + \frac{1}{(\overline{\sigma})^\gamma} + \frac{\zeta(r)}{(\overline{\sigma})^\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{2(1+\zeta(\gamma))+2^\gamma}{\overline{\sigma}^\gamma}, & \text{при } 1 < \gamma \leqslant r, \\ , \dfrac{2(1+\zeta(r))+2^r}{\overline{\sigma}^r} & \text{при } \gamma > r. \end{cases}$$

Преобразуем выражение для $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$ при $\sigma \geqslant 2$, получим:

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \frac{1}{(\overline{\sigma})^r} + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\gamma}(m+\sigma)^{-r} + \sum_{1 \leqslant m \leqslant [\sigma]-1} m^{-\gamma}(\sigma-m)^{-r} +$$

$$+[\sigma]^{-\gamma} + ([\sigma]+1)^{-\gamma} + \sum_{m=[\sigma]+2}^{\infty} m^{-\gamma}(m-\sigma)^{-r} \leqslant \frac{1}{(\overline{\sigma})^r} + \frac{\zeta(\gamma)}{(\overline{\sigma})^r} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant m \leqslant [\sigma]-1} m^{-\gamma}(\sigma-m)^{-r} + \frac{2^\gamma}{(\overline{\sigma})^\gamma} + \frac{1}{(\overline{\sigma})^\gamma} + \frac{\zeta(r)}{(\overline{\sigma})^\gamma}.$$

Если $\sigma \geqslant 2$, то

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant [\sigma]-1} m^{-\gamma}(\sigma-m)^{-r} = \sum_{1 \leqslant m \leqslant \frac{\sigma}{2}} m^{-\gamma}(\sigma-m)^{-r} +$$

$$+ \sum_{\frac{\sigma}{2} < m \leqslant [\sigma]-1} m^{-\gamma}(\sigma-m)^{-r} \leqslant \frac{2^r}{\sigma^r} \sum_{1 \leqslant m \leqslant \frac{\sigma}{2}} m^{-\gamma} + \frac{2^\gamma}{\sigma^\gamma} \sum_{1 \leqslant m < \frac{\sigma}{2}} m^{-r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^r\zeta(\gamma)}{\sigma^r} + \frac{2^\gamma\zeta(r)}{\sigma^\gamma}.$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) \leqslant \frac{1}{(\overline{\sigma})^r} + \frac{\zeta(\gamma)}{(\overline{\sigma})^r} + \frac{2^r\zeta(\gamma)}{\sigma^r} + \frac{2^\gamma\zeta(r)}{\sigma^\gamma} + \frac{2^\gamma}{(\overline{\sigma})^\gamma} + \frac{1}{(\overline{\sigma})^\gamma} + \frac{\zeta(r)}{(\overline{\sigma})^\gamma} =$$

$$= \frac{1+(1+2^r)\zeta(\gamma)}{(\overline{\sigma})^r} + \frac{(2^\gamma+1)(1+\zeta(r))}{(\overline{\sigma})^\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{2\,(1+\zeta(\gamma)) + (1+2\zeta(\gamma))\,2^\gamma}{(\overline{\sigma})^\gamma}, & \text{при } 1 < \gamma \leqslant r, \\ \dfrac{2(1+\zeta(r)) + 2^r(1+2\zeta(r))}{\overline{\sigma}^r}, & \text{при } \gamma > r, \end{cases}$$

тем самым лемма доказана полностью.$\square$

Лемма 4. *Для любого абсолютно сходящегося ряда* $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, u_\nu \,|$ *при* $\alpha > 1$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, u_\nu \,|^\alpha \leqslant \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, u_\nu \,| \right)^\alpha. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим при $\alpha > 1$ на отрезке $[0, 1]$ функцию $f(x) = x^\alpha + (1-x)^\alpha$. Так как $f'(x) = \alpha\, (x^{\alpha-1} - (1-x)^{\alpha-1})$ и $f'(x) < 0$ при $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f'(x) > 0$ при $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, то $f(x) \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $a + b > 0$, тогда

$$a^\alpha + b^\alpha = (a+b)^\alpha f\left(\frac{a}{a+b}\right) \leqslant (a+b)^\alpha.$$

Отсюда по индукции следует для любых $a_1, \ldots, a_n$ справедливость неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^\alpha \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| \right)^\alpha.$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^\alpha \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j| \right)^\alpha + |a_n|^\alpha \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| \right)^\alpha.$$

Следовательно, для любых целых $P \leqslant Q$ выполняется соотношение

$$\sum_{\nu=P}^{Q} |\, u_\nu \,|^\alpha \leqslant \left(\sum_{\nu=P}^{Q} |\, u_\nu \,| \right)^\alpha.$$

Переходя к пределу при $P \to -\infty$ и $Q \to \infty$ получим утверждение леммы.$\square$

3 Решётки и гиперболическая дзета-функция решёток

Следующие два примера решёток – решётка $\Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ решений линейного сравнения и алгебраическая решётка $\Lambda(F)$ играют важную роль в теоретико-числовом методе в приближенном анализе.

Множество $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ решений линейного однородного сравнения

$$a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_s \cdot x_s \equiv 0 \pmod N,$$

является решёткой Λ с $\det \Lambda = N$, а также, если F — чисто вещественное алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_F$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F, то s-мерной решёткой является множество $\Lambda(F)$, следующим способом образованное с помощью $\mathbb{Z}_F$:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}) \mid \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}, \tag{14}$$

где $\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}$ — система алгебраически сопряженных чисел и если d – дискриминант поля F, то $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Пусть матрица $T = ||t_{\nu k}||_{s\times s}$ не вырождена, тогда линейное преобразование T с матрицей T переводит фундаментальную решётку $\mathbb{Z}^s$ в решётку $\Lambda = T \cdot \mathbb{Z}^s$ с базисом $\vec{\lambda}_j = (t_{j1}, \ldots, t_{js})$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Ясно, что

$$\Lambda = \{\vec{x} = (t_{11}m_1 + \ldots + t_{s1}m_s, \ldots, t_{1s}m_1 + \ldots + t_{ss}m_s) | m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Будем эту решетку обозначать через $\Lambda(T)$.

Таким образом, если $\mathbb{Z}^s = \{(m_1, \ldots, m_s) \,|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\}$ и

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1s} \\ t_{21} & \ldots & t_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{s1} & \ldots & t_{ss} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} t^*_{11} & \ldots & t^*_{1s} \\ t^*_{21} & \ldots & t^*_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t^*_{s1} & \ldots & t^*_{ss} \end{pmatrix},$$

то

$$\Lambda(T) = T \cdot \mathbb{Z}^s = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) = \vec{m} \cdot T \,|\, \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$
$$\Lambda^*(T) = (T^{-1})^\top \cdot \mathbb{Z}^s = \left\{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) = \vec{m} \cdot (T^{-1})^\top \,|\, \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\right\}.$$

Гиперболическим параметром решётки называется величина

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

которая имеет простой геометрический смысл : гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решётки Λ при $T < q(\Lambda)$. Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant T\},$$

где $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$ — усеченная норма $\vec{x}$, и для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Так как $\max(1, N(\vec{x})) \leqslant q(\vec{x})$, то $\max(1, N(\Lambda)) \leqslant q(\Lambda)$ для любой решётки Λ, а из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что

$$q(\Lambda) \leqslant \max(\det \Lambda,\, 1).$$

Гиперболической дзета-функцией решётки Λ для $\alpha > 1$ определяется абсолютно сходящимся рядом

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha}. \tag{15}$$

По теореме Абеля гиперболическую дзета-функцию решёток $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}},$$

где $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K(T)$.

Усеченным норменным спектром решётки Λ называется множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, т. е.

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки усеченного спектра называется количество точек решётки с заданным значением усеченной нормы. Порядок точки λ усеченного норменного спектра обозначается через $q(\lambda)$.

Таким образом, гиперболическую дзету-функцию решётки можно записать как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha} = \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \frac{q(\lambda)}{\lambda^\alpha} = \sum_{j=1}^\infty \frac{q(\lambda_j)}{\lambda_j^\alpha}.$$

Лемма 5. *Пусть матрица* $T = ||t_{\nu k}||_{s\times s}$ *и* $T^{-1} = ||t^*_{\nu k}||_{s\times s}$ *— её обратная матрица. Тогда при* $\lambda < \lambda(T)$, *где*

$$\lambda(T) = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant s} \sum_{j=1}^s |t^*_{ij}|\right)^{-1},$$

s*-мерный параллелепипед*

$$\Pi(T,\lambda) = \{\vec{x} \,|\, |t_{\nu 1}x_1 + \ldots + t_{\nu s}x_s| \leqslant \lambda\, (\nu = 1, 2, \ldots, s)\}$$

не содержит целых точек $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_s) \neq \vec{0}$, *а* s*-мерный куб* $[-\lambda, \lambda]^s$ *не содержит ненулевых точек решетки* $\Lambda(T)$.

Доказательство. См. [3] стр. 22.□

Лемма 6. *Пусть матрица* $T = ||t_{\nu k}||_{s\times s}$ *и* $T^{-1} = ||t^*_{\nu k}||_{s\times s}$ — *её обратная матрица. Тогда при* $\lambda < \lambda(T)$, *где*

$$\lambda(T) = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\sum_{j=1}^{s}|t^*_{ij}|\right)^{-1},$$

для любого $\vec{a}\in\mathbb{R}^s$ *s-мерный параллелепипед*

$$\Pi(T,\vec{a},\lambda) = \{\vec{x}\,|\,a_\nu \leqslant t_{\nu 1}x_1+\ldots+t_{\nu s}x_s \leqslant a_\nu+\lambda\,(\nu=1,2,\ldots,s)\}$$

содержит не более одной целой точки $\vec{k}=(k_1,\ldots,k_s)$,

а s-мерный куб $\prod\limits_{\nu=1}^{s}[a_\nu, a_\nu+\lambda]$ *содержит не более одной точки решетки* $\Lambda(T)$.

Доказательство. См. [3] стр. 22, 23.□

Пусть $\mathbb{R}_+ = \{x|x\geqslant 0\}$ и $\vec{\varepsilon}\in\{-1,1\}^s$, тогда различных $\vec{\varepsilon}\in\{-1,1\}^s$ ровно 2^s. Положим для $\vec{a}\in\mathbb{R}_+$

$$\Pi(T,\vec{a},\vec{\varepsilon}) = \{\vec{x}\,|\,a_\nu \leqslant \varepsilon_\nu(t_{\nu 1}x_1+\ldots+t_{\nu s}x_s) \leqslant a_\nu+1\,(\nu=1,2,\ldots,s)\},$$

если $b_\nu = \varepsilon_\nu a_\nu + \frac{\varepsilon_\nu - 1}{2}$ $(\nu = 1,\ldots,s)$, то $\Pi(T,\vec{a},\vec{\varepsilon}) = \Pi(T,\vec{b},\vec{1})$. Обозначим через $Q(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})$ количество целых точек в $\Pi(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})$.

Лемма 7. *Справедливы неравенства*

$$Q(T,\vec{a},\vec{\varepsilon}) \leqslant \left(1+\frac{1}{\lambda(T)}\right)^s,$$

$$\sum_{\vec{m}\in\Pi(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})}\left((\overline{t_{11}m_1+\ldots+t_{1s}m_s})\ldots(\overline{t_{s1}m_1+\ldots+t_{ss}m_s})\right)^{-\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+\frac{1}{\lambda(T)}\right)^s(\overline{a_1}\ldots\overline{a_s})^{-\alpha}. \tag{16}$$

Доказательство. См. [3] стр. 23.□

Лемма 8. *Пусть матрица* $T = ||t_{\nu k}||_{s\times s}$ *не вырождена и* α — *действительное число большее единицы. Тогда ряд*

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\left((\overline{t_{11}m_1+\ldots+t_{1s}m_s})\ldots(\overline{t_{s1}m_1+\ldots+t_{ss}m_s})\right)^{-\alpha}$$

сходится.

Доказательство. См. [3] стр. 23, 24.□

Из последней леммы вытекает, что определение гиперболической дзета-функции решетки корректно, так как в абсолютно сходящемся ряде члены можно переставлять в любом порядке, а потому можно писать просто сумму по точкам решётки.

4 Алгебраические решётки

Рассмотрим гиперболическую дзета-функцию решетки

$$\zeta_H\left(q\Lambda(T)|\alpha\right) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}{}' \left(\prod_{\nu=1}^{s} \overline{q(t_{1\nu}m_1 + \ldots + t_{s\nu}m_s)}\right)^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{\vec{x}\in\Lambda(T)}{}' \left(\prod_{\nu=1}^{s} \overline{q\cdot x_\nu}\right)^{-\alpha} \qquad (17)$$

для алгебраических решеток $q\Lambda(T)$, $q \geqslant 1$.

Пусть все коэффициенты многочлена

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \qquad (18)$$

целые рациональные, и он неприводим над полем рациональных чисел. Пусть, кроме того, все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (18) действительные.

Обозначим через $T = T(\vec{a})$, где $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — вектор целочисленных коэффициентов многочлена $P_s(x)$, матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_s(x)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant s-1} |\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k,$$

$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,s} (1 + |\Theta_\nu| + \ldots + |\Theta_\nu^{s-1}|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1,$$

где $T^\top$ — транспонированная матрица к матрице T. Так как хотя бы один корень $|\Theta_\nu| > 1$, то, очевидно, $\lambda_2(\vec{a}) > s$.

Пусть матрица $T = ||t_{\nu k}||_{s\times s}$ и $T^{-1} = ||t^*_{\nu k}||_{s\times s}$ — её обратная матрица. Положим

$$\lambda(T) = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant s} \sum_{j=1}^{s} |t^*_{ij}|\right)^{-1} = \left\|T^{-1}\right\|_1^{-1}.$$

Теорема 1. *Если Θ_ν, $(\nu = 1, \ldots, s)$, действительные корни неприводимого многочлена*

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s$$

с целыми коэффициентами, матрица $T = T(\vec{a})$ *и* α *— действительное число больше единицы, то для гиперболической дзета-функции решетки* $\zeta_H\left(q\Lambda(T)|\alpha\right)$ *справедлива оценка:*

$$\zeta_H\left(q\Lambda(T)|\alpha\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(6^s \cdot (s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 q}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2\right)^{s-1}\zeta(\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{\lambda(T)}\right)^s\left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\right)\frac{1}{q^{s\alpha}}. \qquad (19)$$

Доказательство. См. [3] стр. 29 — 31.□

5 Обобщенная гиперболическая дзета-функция алгебраической решётки

Для вектора $\vec{z} = Q\vec{y} \in Q\Lambda(T)$, где $\vec{y} = \vec{m}\cdot T \neq \vec{0}$, $0 \leqslant m_j \leqslant q-1$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$, оценим обобщенную гиперболическую дзета-функцию решётки

$$\zeta_H\left(qQ\Lambda(T)+\vec{z}|\alpha\right) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s}\left(\prod_{\nu=1}^{s}\overline{Q(t_{1\nu}(m_1+qn_1)+\ldots+t_{s\nu}(m_s+qn_s))}\right)^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{\vec{x}\in\Lambda(T)}\left(\prod_{\nu=1}^{s}\overline{qQ\cdot x_\nu + Q\cdot y_\nu}\right)^{-\alpha} \qquad (20)$$

для алгебраических решеток $qQ\Lambda(T)$, $Q \geqslant q > 1$.

Все обозначения предыдущего раздела оставляем без изменения.

Сформулируем теперь некоторые свойства сдвинутых алгебраических решеток $q\Lambda(T) + \vec{m}\cdot T \subset \Lambda(T)$, когда $0 \leqslant m_j \leqslant q-1$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$.

Очевидно, что

$$\Lambda(T) = \bigcup_{0\leqslant m_j\leqslant q-1,\,(1\leqslant j\leqslant s)}\left(q\Lambda(T)+\vec{m}\cdot T\right).$$

Лемма 9. *Пусть* N *— число целых точек, принадлежащих области*

$$|(qx_1+m_1) + \Theta_\nu(qx_2+m_2) + \ldots + \Theta_\nu^{s-1}(qx_s+m_s)| \leqslant Q_\nu,\ (\nu = 1,\ldots,s). \qquad (21)$$

Тогда

$$N \leqslant 2^s\left(1 + q^{-1}(Q_1\ldots Q_s)^{\frac{1}{s}}\right)^s.$$

Доказательство. Пусть $N > 2^s \left(1 + q^{-1}(Q_1 \dots Q_s)^{\frac{1}{s}}\right)^s$. Найдем целое число A, удовлетворяющее неравенствам

$$q^{-1}(Q_1 \dots Q_s)^{\frac{1}{s}} < A \leqslant 1 + q^{-1}(Q_1 \dots Q_s)^{\frac{1}{s}},$$

и покроем область (21) параллелепипедами

$$\frac{k_\nu Q_\nu}{A} \leqslant (qx_1 + m_1) + \Theta_\nu(qx_2 + m_2) + \dots + \Theta_\nu^{s-1}(qx_s + m_s) \leqslant \frac{(k_\nu + 1)}{A} Q_\nu,$$
$$k_\nu = -A,\ -A + 1, \dots, 0, 1, \dots, A - 1,\ (\nu = 1, \dots, s).$$

Таких параллелепипедов будет $2^s A^s < N$ и, следовательно, хотя бы один из них содержит две различные целые точки. Таким образом найдется целая точка $\vec{x} \neq \vec{0}$, удовлетворяющая неравенствам

$$q|x_1 + \Theta_\nu x_2 + \dots + \Theta_\nu^{s-1} x_s| \leqslant \frac{Q_\nu}{A},\ (\nu = 1, \dots, s)$$

Замечая, что произведение $\prod\limits_{\nu=1}^{s}(x_1 + \Theta_\nu x_2 + \dots + \Theta_\nu^{s-1} x_s)$ — целое отличное от нуля число, получим:

$$Q_1 \dots Q_s \geqslant A^s q^s,$$

что противоречит неравенству $Q_1 \dots Q_s < A^s q^s$.

Следовательно,

$$N \leqslant 2^s \left(1 + q^{-1}(Q_1 \dots Q_s)^{\frac{1}{s}}\right)^s,$$

что и утверждалось в лемме. □

Лемма 10. *Для числа целых точек $N(k, k_1)$, принадлежащих области*

$$\begin{cases} \left|\prod\limits_{\nu=1}^{s}((qx_1 + m_1) + \Theta_\nu(qx_2 + m_2) + \dots + \Theta_\nu^{s-1}(qx_s + m_s))\right| \leqslant k \\ |qx_\nu + m_\nu| \leqslant k_1,\ (\nu = 1, \dots, s) \end{cases} \tag{22}$$

справедлива оценка

$$N(k, k_1) \leqslant 2^s \left(1 + q^{-1} 2\, k^{\frac{1}{s}}\right)^s (s + 1) \left(s \log_2(k_1 \lambda) + 2\right)^{s-1},$$

где постоянная $\lambda = \lambda_2(\vec{a}) = \max\limits_{\nu=1,\dots,s}(1 + |\Theta_\nu| + \dots + |\Theta_\nu^{s-1}|)$ зависит лишь от корней Θ_ν, $(\nu = 1, \dots, s)$ многочлена (18).

Доказательство. Для любой целой точки $\vec{x}$, принадлежащей области (22), выполняются неравенства

$$\frac{1}{(\lambda k_1)^{s-1}} \leqslant |(qx_1 + m_1) + \Theta_\nu(qx_2 + m_2) + \dots + \Theta_\nu^{s-1}(qx_s + m_s)| \leqslant \lambda k_1,$$
$$(\nu = 1, \dots, s), \tag{23}$$

Ясно, что $\lambda > 1$ и $\log_2 \lambda > 0$.

Действительно, если $\vec{x}$ — целая точка, то алгебраически сопряженные числа $\Theta_\nu(\vec{x}) = (qx_1+m_1)+\Theta_\nu(qx_2+m_2)+\ldots+\Theta_\nu^{s-1}(qx_s+m_s)$ — целые алгебраические числа ($\nu = 1,\ldots,s$), поэтому

$$\prod_{\nu=1}^{s} |(qx_1+m_1)+\Theta_\nu(qx_2+m_2)+\ldots+\Theta_\nu^{s-1}(qx_s+m_s)| \geqslant 1,$$
$$(\lambda k_1)^{s-1}|(qx_1+m_1)+\Theta_\mu(qx_2+m_2)+\ldots+\Theta_\mu^{s-1}(qx_s+m_s)| \geqslant 1,$$
$$|(qx_1+m_1)+\Theta_\mu(qx_2+m_2)+\ldots+\Theta_\mu^{s-1}(qx_s+m_s)| \geqslant \frac{1}{(\lambda k_1)^{s-1}} \quad (\mu = 1,\ldots,s).$$

Следовательно, достаточно оценить число целых точек для области, удовлетворяющей ограничениям (22, 23). Такую область можно покрыть параллелепипедами

$$|(qx_1+m_1)+\Theta_\nu(qx_2+m_2)+\ldots+\Theta_\nu^{s-1}(qx_s+m_s)| \leqslant k^{\frac{1}{s}}\, 2^{v_\nu},\ (\nu = 1,\ldots,s), \tag{24}$$

где целые числа $v_1,\ldots,v_s$ удовлетворяют ограничениям

$$\begin{cases} 0 \leqslant v_1+\ldots+v_s \leqslant s, \\ -(s-1)\log_2(k_1\lambda) - \frac{\log_2 k}{s} \leqslant v_\nu \leqslant \log_2 k_1 - \frac{\log_2 k}{s} + \log_2\lambda + 1, \\ \nu = 1, 2\ldots, s. \end{cases} \tag{25}$$

Действительно, для любой точки $\vec{x}$, удовлетворяющей ограничением (22, 23), найдутся такие действительные числа u_ν, ($\nu = 1,\ldots,s$), для которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} |(qx_1+m_1)+\Theta_\nu(qx_2+m_2)+\ldots+\Theta_\nu^{s-1}(qx_s+m_s)| \leqslant k^{\frac{1}{s}}\, 2^{u_\nu}, & \nu = 1,\ldots,s, \\ u_1+\ldots+u_s = 0, & \\ -(s-1)\log_2(k_1\lambda) \leqslant u_\nu + \frac{\log_2 k}{s} \leqslant \log_2 k_1 + \log_2\lambda, & \nu = 1,\ldots,s. \end{cases}$$

Следовательно, точка $\vec{x}$ принадлежит области (24, 25) для целых чисел $v_\nu = [u_\nu]+1$, ($\nu = 1,\ldots,s$).

Каждое целое v_ν принимает не более $s\log_2(k_1\lambda)+2$ различных значений. При фиксированных v_1,...,v_{s-1} переменная v_s принимает не более $s+1$ различного целого значения, поэтом различных областей вида (24, 25) не более чем

$$(s+1)\,(s\log_2(k_1\lambda)+2)^{s-1}$$

и каждая из них (лемма 9) содержит не более чем

$$2^s\left(1+q^{-1}\left(2^{v_1}k^{\frac{1}{s}}\ldots 2^{v_s}k^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{1}{s}}\right)^s \leqslant 2^s\left(1+q^{-1}2k^{\frac{1}{s}}\right)^s$$

целых точек. Таким образом, число целых точек $N(k,k_1)$, принадлежащих области (22), удовлетворяет оценке

$$N(k,k_1)\leqslant 2^s\,\left(1+q^{-1}2\,k^{\frac{1}{s}}\right)^s(s+1)\,(s\log_2(k_1\lambda)+2)^{s-1}$$

и лемма полностью доказана. □

Пусть $\mathbb{R}_+=\{x|x\geqslant 0\}$ и $\vec{\varepsilon}\in\{-1,1\}^s$, тогда различных $\vec{\varepsilon}\in\{-1,1\}^s$ ровно 2^s. Положим для $\vec{a}\in\mathbb{R}_+^s$

$$\Pi^*(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})=\{\vec{x}\,|\,a_\nu\leqslant\varepsilon_\nu(t_{\nu 1}(qx_1+m_1)+\ldots+t_{\nu s}(qx_s+m_s))\leqslant a_\nu+1\,(\nu=1,\ldots,s)\},$$

если $b_\nu=\varepsilon_\nu a_\nu+\frac{\varepsilon_\nu-1}{2}$ $(\nu=1,\ldots,s)$, то $\Pi^*(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})=\Pi^*(T,\vec{b},\vec{1})$. Обозначим через $Q^*(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})$ количество целых точек в $\Pi^*(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})$, а через $J(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})$ — сумму

$$J(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})=$$
$$=\sum_{\vec{n}\in\Pi^*(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})}\left(\left(\overline{t_{11}(qn_1+m_1)+\ldots+t_{1s}(qn_s+m_s)}\right)\ldots\left(\overline{t_{s1}m_1+\ldots+t_{ss}m_s}\right)\right)^{-\alpha}.$$

Лемма 11. *Справедливы неравенства*

$$Q^*(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})\leqslant\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s,$$
$$J(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})\leqslant\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s(\overline{a_1}\ldots\overline{a_s})^{-\alpha}. \tag{26}$$

Доказательство. Выберем натуральное A из условий $\frac{1}{q\lambda(T)}<A\leqslant 1+\frac{1}{q\lambda(T)}$. Заметим, что

$$\Pi^*(T,\vec{b},1)=\bigcup_{k_1,\ldots,k_s=0}^{A-1}\Pi^*\left(T,\vec{b}+\frac{\vec{k}}{A},\vec{b}+\frac{\vec{k}+\vec{1}}{A}\right),$$

где

$$\Pi^*\left(T,\vec{b}+\frac{\vec{k}}{A},\vec{b}+\frac{\vec{k}+\vec{1}}{A}\right)=$$
$$=\left\{\vec{x}\;\middle|\;\begin{array}{c}b_\nu+\frac{k_\nu}{A}\leqslant t_{\nu 1}(qx_1+m_1)+\ldots+t_{\nu s}(qx_s+m_s)\leqslant b_\nu+\frac{k_\nu+1}{A}\\(\nu=1,\ldots,s)\end{array}\right\}$$

и каждая из областей в правой части равенства содержит не более одной целой точки согласно лемме 6 (см. стр. 67), то $Q(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})\leqslant A^s$ и первое утверждение леммы доказано.

Далее заметим, что для любой целой точки $\vec{n}\in\Pi(T,\vec{a},\vec{\varepsilon})$ выполняется соотношение

$$\left(\overline{t_{11}(qn_1+m_1)+\ldots+t_{1s}(qn_s+m_s)}\ldots\overline{t_{s1}(qn_1+m_1)+\ldots+t_{ss}(qn_s+m_s)}\right)^{-\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant(\overline{a_1}\ldots\overline{a_s})^{-\alpha},$$

из которого, с учетом первого утверждения леммы, следует второе.

Покажем теперь, что при оценке гиперболической дзета-функции решетки в сумме (20) можно ограничиться лишь целыми числами n_ν, принадлежащими s-мерному кубу $|qx_\nu + m_\nu| \leqslant K^{\frac{\alpha\cdot s}{(\alpha-1)}}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Лемма 12. *Пусть матрица $T = ||t_{\nu k}||_{s\times s}$ и $T^{-1} = ||t^*_{\nu k}||_{s\times s}$ — её обратная матрица. Тогда при $\lambda < \lambda(T)K$, где*

$$\lambda(T) = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\sum_{j=1}^{s}|t^*_{ij}|\right)^{-1} = \left\|T^{-1}\right\|_1^{-1},$$

s-мерный параллелепипед

$$\Pi^*(T,\lambda) = \{\vec{x}\,|\,|t_{\nu 1}(qx_1 + m_1) + \ldots + t_{\nu s}(qx_s + m_s)| \leqslant \lambda\,(\nu = 1, 2, \ldots, s)\}$$

не содержит целых точек $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_s)$ с $\|q\vec{k} + \vec{m}\|_1 \geqslant K$, а s-мерный куб $[-\lambda, \lambda]^s$ не содержит точек $\vec{y}$ сдвинутой решетки $q\Lambda(T)+\vec{m}\cdot T$ с $\|\vec{y}\|_1 \geqslant \lambda(T)K$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что линейное преобразование с матрицей T переводит s-мерный параллелепипед $\Pi^*(T,\lambda)$ в s-мерный куб $[-\lambda,\lambda]^s$, а обратное преобразование с матрицей $T^{-1} = ||t^*_{\nu k}||_{s\times s}$ переводит s-мерный куб $[-\lambda,\lambda]^s$ в s-мерный параллелепипед $\Pi^*(T,\lambda)$.

Отсюда следует, что если целая точка $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \Pi^*(T,\lambda)$, то найдется точка $\vec{y} \in [-\lambda,\lambda]^s$ и $q\vec{k} + \vec{m} = T^{-1}\vec{y}$. Переходя к координатам, для каждого ν с $1 \leqslant \nu \leqslant s$ получим:

$$|qk_\nu + m_\nu| = \left|\sum_{j=1}^{s} t^*_{\nu j}y_j\right| \leqslant \lambda\sum_{j=1}^{s}|t^*_{\nu j}| < \left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\sum_{j=1}^{s}|t^*_{ij}|\right)^{-1}\cdot K\cdot\sum_{j=1}^{s}|t^*_{\nu j}| \leqslant K.$$

Поэтому $\|q\vec{k} + \vec{m}\|_1 < K$ и, значит, s-мерный параллелепипед $\Pi^*(T,\lambda)$ не содержит целых точек $\vec{k}$ с $\|q\vec{k} + \vec{m}\|_1 \geqslant K$.

Второе утверждение леммы тривиально и доказательство закончено.□

Лемма 13. *Пусть сумма $S(T,Q,K)$ задана равенством*

$$S(T,Q,K) = \sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1 > K}\left(\prod_{\nu=1}^{s}\overline{Q(t_{1\nu}(qn_1 + m_1) + \ldots + t_{s\nu}(qn_s + m_s))}\right)^{-\alpha}. \quad (27)$$

Тогда при $Q \geqslant 1$ и $K \geqslant \overline{2\left\|T^{-1}\right\|_1}$ справедливо неравенство

$$S(T,Q,K) \leqslant \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\frac{1}{Q^\alpha K^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $K \geqslant 2\overline{\left\|T^{-1}\right\|_1}$ имеем:

$$\lambda(T)K - 1 \geqslant 2\left\|T^{-1}\right\|_1 \lambda(T) - 1 = 2 - 1 = 1, \quad \lambda(T)K - 1 \geqslant \frac{\lambda(T)K}{2}.$$

Так как

$$\mathbb{R}^s = \bigcup_{\vec{\varepsilon}\in\{-1,1\}^s} \left(\bigcup_{k_1,\ldots,k_s=0}^{\infty} \Pi^*\left(T, \vec{k}, \vec{\varepsilon}\right)\right)$$

и при $\|\vec{k}\|_1 < \lambda(T)K - 1$ справедливо вложение $\Pi^*\left(T, \vec{k}, \vec{\varepsilon}\right) \subset \Pi^*(T, \lambda)$ с $\lambda < \lambda(T)K$, то из леммы 12 следует:

$$S(T,Q,K) = \sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1 > K} \left(\prod_{\nu=1}^{s} \overline{Q(t_{1\nu}(qn_1+m_1)+\ldots+t_{s\nu}(qn_s+m_s))}\right)^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\vec{\varepsilon}\in\{-1,1\}^s} \sum_{\substack{\|\vec{k}\|_1 \geqslant \lambda(T)K-1\\ k_1,\ldots,k_s\geqslant 0}} J(T,\vec{a},\vec{\varepsilon}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^s\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s \sum_{\substack{\|\vec{k}\|_1 \geqslant \lambda(T)K-1\\ k_1,\ldots,k_s\geqslant 0}} (\overline{Qk_1}\ldots\overline{Qk_s})^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant 2^s\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s \cdot s \cdot \sum_{k_1 \geqslant \lambda(T)K-1} \sum_{k_2,\ldots,k_s=0}^{\infty} (\overline{Qk_1}\ldots\overline{Qk_s})^{-\alpha} =$$

$$= s\cdot 2^s\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s \left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{Q^\alpha}\right)^{s-1} \frac{1}{Q^\alpha} \sum_{k_1 \geqslant \lambda(T)K-1} k_1^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant s\cdot 2^s\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s \left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{Q^\alpha}\right)^{s-1} \frac{1}{Q^\alpha}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(\lambda(T)K-1)^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)(\lambda(T)K-1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s \left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1} \frac{1}{Q^\alpha K^{\alpha-1}}$$

и лемма доказана. □

Теорема 2. *Если Θ_ν, $(\nu = 1, \ldots, s)$, действительные корни неприводимого многочлена*

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s$$

с целыми коэффициентами, матрица $T = T(\vec{a})$ и α — действительное число больше единицы, то для обобщенной гиперболической дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta_H\left(qQ\Lambda(T) + Q\vec{m}\cdot T|\alpha\right)$ справедлива оценка:

$$\zeta_H\left(qQ\Lambda(T)+Q\vec{m}\cdot T|\alpha\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(6^s\cdot(s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 Q}{\alpha-1}+s\log_2(\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(1+\frac{1}{(\alpha-1)q^{s\alpha}}\right)+\frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s\left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\right)\frac{1}{Q^{s\alpha}},\quad(28)$$

где $\lambda_2(T)=\max\limits_{\nu=1,\ldots,s}(1+|\Theta_\nu|+\ldots+|\Theta_\nu^{s-1}|)>s.$

Доказательство. Введем обозначения:

$$\vec{e_\nu}=(1,\Theta_\nu,\ldots,\Theta_\nu^{s-1})\quad(\nu=1,\ldots,s),$$
$$\omega(\vec{n},k)=\begin{cases}1, & \text{если}\left|\prod\limits_{\nu=1}^{s}(q\vec{n}+\vec{m},\vec{e_\nu})\right|=k,\\ \\ 0, & \text{если}\left|\prod\limits_{\nu=1}^{s}(q\vec{n}+\vec{m},\vec{e_\nu})\right|\neq k,\end{cases}$$
$$S^*(T,Q,K)=\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K}{}'\left(\prod_{\nu=1}^{s}\overline{Q(t_{1\nu}(qn_1+m_1)+\ldots+t_{s\nu}(qn_s+m_s))}\right)^{-\alpha}=$$
$$=\sum_{\|\vec{n}\|_1\leqslant K}{}'\left(\prod_{\nu=1}^{s}\overline{Q(q\vec{n}+\vec{m},\vec{e}_\nu)}\right)^{-\alpha}.$$

Тогда
$$\zeta_H\left(qQ\Lambda(T)+Q\vec{m}\cdot T|\alpha\right)=S^*(T,Q,K)+S(T,Q,K).$$

Оценим сумму $S^*(T,q,Q)$, положив $K_1=[(K\lambda_2(T))^s]$ при $K>q$ и применив преобразование Абеля.

$$S^*(T,Q,K)=\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K}{}'\left[\prod_{\nu=1}^{s}\overline{Q(q\vec{n}+\vec{m},\vec{e_\nu})}\right]^{-\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant Q^{-\alpha s}\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K}{}'\left|\prod_{\nu=1}^{s}(q\vec{n}+\vec{m},\vec{e_\nu})\right|^{-\alpha}=$$
$$=Q^{-\alpha s}\sum_{k=1}^{K_1}k^{-\alpha}\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K,\left|\prod\limits_{\nu=1}^{s}(q\vec{n}+\vec{m},\vec{e_\nu})\right|=k}1;$$

$$S^*(T,Q,K) \leqslant Q^{-\alpha\, s}\sum_{k=1}^{K_1} k^{-\alpha} \sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K} \omega(\vec{n},k) =$$
$$= Q^{-\alpha\, s}\left(\sum_{k=1}^{K_1-1}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)\sum_{t=1}^{k}\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K}\omega(\vec{n},t)+\right.$$
$$\left.+\,K_1^{-\alpha}\sum_{t=1}^{K_1}\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K}\omega(\vec{n},t)\right).$$

По лемме 10 (см. стр. 70) для двойной суммы по t и по $\vec{n}$ справедливо неравенство

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{\|q\vec{n}+\vec{m}\|_1\leqslant K}\omega(\vec{m},t) = N(k,K) \leqslant$$
$$\leqslant 2^s\left(1+q^{-1}2\,k^{\frac{1}{s}}\right)^s (s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1} \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 6^s\,(s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}, & \text{при } k\leqslant q^s, \\ 6^s\,q^{-s}k\cdot(s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}, & \text{при } k> q^s, \end{cases}$$

поэтому

$$S^*(T,Q,K) \leqslant Q^{-\alpha\, s}6^s\cdot(s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{k=1}^{q^s}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)+q^{-s}\sum_{k=q^s+1}^{K_1-1}\left(k^{-\alpha}-(k+1)^{-\alpha}\right)k+K_1^{-\alpha}q^{-s}K_1\right)=$$
$$= Q^{-\alpha\, s}6^s\cdot(s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}\left(1+q^{-s}\sum_{k=q^s+1}^{K_1}k^{-\alpha}\right)\leqslant$$
$$\leqslant Q^{-\alpha\, s}6^s\cdot(s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}\left(1+\frac{1}{(\alpha-1)q^{s\alpha}}\right).$$

Отсюда и из леммы 13, выбирая $K=Q^{\frac{\alpha(s-1)}{\alpha-1}}$, находим

$$\zeta_H\left(qQ\Lambda(T)+Q\vec{m}\cdot T|\alpha\right) = S^*(T,Q,K)+S(T,Q,K) \leqslant$$
$$\leqslant Q^{-\alpha\, s}6^s\cdot(s+1)\left(s\log_2(K\lambda_2(T))+2\right)^{s-1}\left(1+\frac{1}{(\alpha-1)q^{s\alpha}}\right)+$$
$$+\frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s\left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\frac{1}{Q^\alpha K^{\alpha-1}} =$$

$$= \left(6^s \cdot (s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 Q}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2\right)^{s-1}\left(1+\frac{1}{(\alpha-1)q^{s\alpha}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^s\left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\right)\frac{1}{Q^{s\alpha}}$$

и теорема доказана полностью. □

6 Класс функций $E_s^\alpha(C)$

Пусть непрерывная функция $f(\vec{x})$ имеет период равный единице по каждой из переменных $x_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, s)$, и для $\nu = 1, \ldots, s$ величины $\overline{m}_\nu$ определена равенствами

$$\overline{m}_\nu = \max(1, |m_\nu|).$$

Определение 8. *Говорят, что периодическая функция $f(\vec{x})$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$, если для любых целых чисел $m_1, \ldots, m_s$ выполняется оценка*

$$\left|\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x})}d\vec{x}\right| \leqslant C \cdot (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha}, \tag{29}$$

где α — действительное число, большее единицы.

Так как при $\alpha > 1$ кратный числовой ряд

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha} = (1+2\zeta(\alpha))^s$$

абсолютно сходится, то ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

равномерно сходится, функция $f(\vec{x})$ — непрерывная, и ряд Фурье можно интегрировать почленно.

Сформулируем теперь некоторое свойство функций из класса $E_s^\alpha(C)$.

Для непрерывной функции $f(\vec{x})$, весовой функции $\rho(\vec{x})$ и произвольных действительных $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ обозначим через $\mu(f, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ интеграл

$$\int_{-1}^1 \ldots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x})f(\vec{x})e^{2\pi i(\sigma_1 x_1 + \ldots + \sigma_s x_s)}d\vec{x}.$$

Лемма 14. *Если $\rho(\vec{x})$ — весовая функция порядка r с константой B, функция $f(\vec{x})$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$, $(1 < \alpha \leqslant r)$, то для любых действительных чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ выполняется оценка*

$$|\mu(f, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)| \leqslant C \cdot B \cdot (2\,(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha))\, 2^\alpha)^s\, (\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-\alpha}. \qquad (30)$$

Доказательство. Заменяя в интеграле $\mu(f, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ функцию $f(\vec{x})$ её рядом Фурье и учитывая определение 3 (см. стр. 54) весовой функции, получим

$$\begin{aligned}
|\mu(f, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)| &\leqslant \\
&\leqslant \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} |C(\vec{m})|\, |\mu(e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} |C(\vec{m})| B\, (\overline{m_1 + \sigma_1} \ldots \overline{m_s + \sigma_s})^{-r} \leqslant \\
&\leqslant C \cdot B \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha}\, (\overline{m_1 + \sigma_1} \ldots \overline{m_s + \sigma_s})^{-r} = \\
&= C \cdot B \psi(\sigma_1) \ldots \psi(\sigma_s), \qquad (31)
\end{aligned}$$

где через $\psi(\sigma)$ обозначена сумма:

$$\psi(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} (\overline{m + \sigma})^{-r} = \psi_{\gamma,r}(\sigma), \quad (\gamma = \alpha \leqslant r, r \geqslant 2).$$

Объединяя теперь оценку (12) (стр. 62), справедливую для любого действительного σ и оценку (31), получим утверждение леммы:

$$|\mu(f, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)| \leqslant \frac{C \cdot B \cdot (2\,(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha))\, 2^\alpha)^s}{(\overline{\sigma_1} \ldots \overline{\sigma_s})^\alpha}, \quad (\gamma = \alpha \leqslant r, r \geqslant 2).$$

□

7 Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций $E_s^\alpha(C)$

Обозначим через $\Pi_s(T)$, K_s и q, соответсвенно, параллелепипед

$$\Pi_s(T) = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, |t_{\nu 1} x_1 + \ldots + t_{\nu s} x_s| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \nu = 1, \ldots, s \right\} = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \left\| \vec{x} \cdot T^\top \right\|_1 \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

куб

$$K_s = \{\vec{x} \,|\, |x_\nu| \leqslant 1, \quad \nu = 1, \ldots, s\}$$

и целое, положительное, нечетное число q.

Лемма 15. *Параллелепипед* $\Pi_s(T)$ *содержит куб* K_s *тогда и только тогда, когда* $\|T\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Если параллелепипед $\Pi_s(T)$ *содержит куб* K_s, *то* $|\det T| \leqslant \frac{1}{2^s}$.

Доказательство. см. [3] стр. 34, 35.□

Теорема 3. *Пусть параллелепипед* $\Pi_s(T)$ *содержит куб* K_s *и* $\vec{z} \in \mathbb{R}^s$. *Тогда погрешность квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det(q\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(q(\Lambda(T)),\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}[f] \tag{32}$$

на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $(1 < \alpha \leqslant r)$ *с весовой функцией* $\rho(\vec{x})$ *порядка* r *с константой* B *удовлетворяет оценке*

$$\begin{aligned} R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}\left[E_s^\alpha(C)\right] &= \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}[f]| \leqslant \\ &\leqslant C\cdot B\cdot (2\,(1+\zeta(\alpha)) + (1+2\zeta(\alpha))\,2^\alpha)^s\,\zeta_H(q\Lambda(T)|\alpha). \end{aligned} \tag{33}$$

Доказательство. Построим функцию $\widehat{f}\,(\vec{x})$, совпадающую с функцией

$$\rho(\vec{x})f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) \in E_s^\alpha(C), \quad (1<\alpha)$$

на кубе K_s, продолженную нулем вплоть до границы параллелепипеда $\Pi_s(T)$ и продолженную затем на все пространство периодически по параллелепипеду $\Pi_s(T)$. Таким образом,

$$\widehat{f}\,(\vec{x}) = \begin{cases} \rho(\vec{x})f(\vec{x}), & \text{при } \vec{x}\in K_s; \\ 0, & \text{при } \vec{x}\in \Pi_s(T)\setminus K_s; \\ \widehat{f}\,(\vec{y}+T\vec{m}) & \text{при } \vec{x}=\vec{y}+T\vec{m},\ \vec{y}\in\Pi_s(T),\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Поскольку для любой непрерывной периодической функции $f(\vec{x})$ с периодом равным единице по каждой переменной x_ν и весовой функции $\rho(\vec{x})$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^1 \ldots \int\limits_{-1}^1 \rho(\vec{x})f(\vec{x})d\vec{x} &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s))f(\vec{x})d\vec{x} = \\ &= \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left(\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) \right) f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}, \end{aligned}$$

то интегралы от функций $\widehat{f}(\vec{x})$ и $f(\vec{x})$ связаны соотношением

$$\int \ldots \int\limits_{\Pi_s(T)} \widehat{f}(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{-1}^1 \ldots \int\limits_{-1}^1 \rho(\vec{x})f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}. \tag{34}$$

Заметим, что $M'(q(\Lambda(T)),\vec{z}) = M'(q(\Lambda(T)), q^{-1}\delta(q\vec{z}\cdot T^\top)\cdot(T^{-1})^\top)$. Действительно,

$$\vec{z} = q^{-1}\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right)\cdot (T^{-1})^\top = q^{-1}\left(p\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right) + \delta\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right)\right)\cdot (T^{-1})^\top =$$
$$= q^{-1}\left(p\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right)\right)\cdot (T^{-1})^\top + q^{-1}\left(\delta\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right)\right)\cdot (T^{-1})^\top,$$
$$p\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right)\in\mathbb{Z}^s,\quad q^{-1}\left(p\left(q\vec{z}\cdot T^\top\right)\right)\cdot (T^{-1})^\top \in (q(\Lambda(T))^* = \frac{1}{q}\Lambda^*(T).$$

Поэтому $(q\Lambda(T))^* + \vec{z} = (q\Lambda(T))^* + q^{-1}\delta(q\vec{z}\cdot T^\top)\cdot(T^{-1})^\top$, что и доказывает равенство обобщенных модифицированных параллелепипедальных сеток. Для удобства положим $\vec{\delta} = \delta(q\vec{z}\cdot T^\top)$, $\vec{\delta}_1 = q^{-1}\delta(q\vec{z}\cdot T^\top)\cdot(T^{-1})^\top = q^{-1}\vec{\delta}\cdot(T^{-1})^\top$.

Теперь докажем равенство $S(f) = S_1(f)$, где

$$S(f) = \sum_{\vec{x}\in M'(q(\Lambda(T)),\vec{\delta}_1)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}),$$
$$S_1(f) = \sum_{k_1=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \ldots \sum_{k_s=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \widehat{f}\left(q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot (T^{-1})^\top\right). \tag{35}$$

Преобразуем сначала левую часть, получим

$$S(f) = \sum_{\vec{x}\in M'(q(\Lambda(T)),\vec{\delta}_1)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{x}\in M_1(q(\Lambda(T)),\vec{\delta}_1)} \rho(\vec{x}) f(\vec{x}) = \sum_{\vec{x}\in M_1(q(\Lambda(T)),\vec{\delta}_1)} \widehat{f}(\vec{x}). \tag{36}$$

Так как $\vec{x}\in M_1(q\Lambda(T),\vec{\delta}_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{x} = q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot (T^{-1})^\top,\quad \vec{k}\in\mathbb{Z}^s,\quad \vec{x}\in[-1;1)^s\subset K_s\subseteq \Pi_s(T),$$

и $\rho(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x}\notin(-1;1)^s$, то

$$S(f) = \sum_{\vec{k},\,\left\|q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot(T^{-1})^\top\right\|_1<1} \widehat{f}\left(q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot (T^{-1})^\top\right) =$$
$$= \sum_{\vec{k},\,\left\|q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\right\|_1<\frac{1}{2}} \widehat{f}\left(q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot (T^{-1})^\top\right). \tag{37}$$

Если $\|\vec{k}\|_1 \leqslant \frac{q-1}{2}$, то $\left\|q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\right\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$ и, значит, точка $\vec{x}\in\Pi_s(T)$ и все слагаемые в $S_1(f)$, не входящие в $S(f)$, будут нулевыми. Если $\left\|q^{-1}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\right\|_1 < \frac{1}{2}$, то $\|\vec{k}\|_1 < \frac{q}{2}$, но q — нечетное число, а $\vec{k}$ — целочисленный, следовательно $\|\vec{k}\|_1 \leqslant \frac{q-1}{2}$. Тем самым равенство $S(f) = S_1(f)$ доказано.

Разложим функцию $\widehat{f}(\vec{x})$ в ряд Фурье по параллелепипеду $\Pi_s(T)$:

$$\widehat{f}(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(m_1,\ldots,m_s) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}\cdot T^\top)}, \tag{38}$$

$$C(\vec{m}) = |\det T| \int\limits_{\Pi_s(T)}\!\!\ldots\!\int \widehat{f}(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x}\cdot T^\top)} d\vec{x} =$$

$$= |\det T| \int\limits_{-1}^{1}\!\ldots\!\int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}\cdot T,\vec{x})} d\vec{x},$$

так как

$$(\vec{m},\vec{x}\cdot T^\top) = \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \sum_{j=1}^{s} t_{\nu\,j} x_j = \sum_{j=1}^{s} x_j \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu t_{\nu\,j} = (\vec{m}\cdot T,\vec{x}).$$

Учитывая оценку (30) леммы 14 (см. стр. 78), получим:

$$|C(\vec{m})| \leqslant C\cdot B|\det T|\cdot (2\,(1+\zeta(\alpha)) + (1+2\zeta(\alpha))\,2^\alpha)^s \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{\nu=1}^{s} (\overline{t_{1\nu}m_1+\ldots+t_{s\nu}m_s})\right)^{-\alpha}. \tag{39}$$

Вычислим погрешность квадратурной формулы

$$\int\limits_{\Pi_s(T)}\!\!\ldots\!\int \widehat{f}\,(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{|\det T|^{-1}}{q^s} \sum_{k_1=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \ldots \sum_{k_s=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \widehat{f}\left(\frac{1}{q}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot (T^{-1})^\top\right) - R_N\left[\widehat{f}\right],$$

подставляя вместо функции $\widehat{f}(\vec{x})$ её ряд Фурье, [2]

$$|\det T|^{-1} C(0,\ldots,0) =$$

$$= \frac{|\det T|^{-1}}{q^s} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i\frac{(\vec{m},\vec{\delta})}{q}} \prod_{\nu=1}^{s} \sum_{k_\nu=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} e^{2\pi i\frac{m_\nu k_\nu}{q}} - R_N\left[\widehat{f}\right].$$

Отсюда, после выделения слагаемого с $(m_1,\ldots,m_s) = (0,\ldots,0)$ и перемены порядка суммирования, следует равенство

$$R_N\left[\widehat{f}\right] = |\det T|^{-1} \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(qm_1,\ldots,qm_s) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{\delta})}. \tag{40}$$

[2] Ряд Фурье сходится абсолютно (оценка (39) и лемма 8, стр. 67)

Учитывая равенство (34) и оценку (39) окончательно получим

$$|R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}[f]| = \left|\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} - (\det(q\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}\rho_{\vec{x}}f(\vec{x})\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\Pi_s(T)}\ldots\int \widehat{f}(\vec{x})d(\vec{x}) - \frac{|\det T|^{-1}}{q^s}\sum_{k_1=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}}\ldots\sum_{k_s=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}}\widehat{f}\left(\frac{1}{q}\left(\vec{k}+\vec{\delta}\right)\cdot(T^{-1})^{\top}\right)\right| =$$

$$= \left|R_N\left[\widehat{f}\right]\right| \leqslant |\det T|^{-1}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(qm_1,\ldots,qm_s)| \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot B\cdot\left(2\left(1+\zeta(\alpha)\right)+\left(1+2\zeta(\alpha)\right)2^{\alpha}\right)^s\cdot\zeta_H(q\Lambda(T)|\alpha)$$

и теорема полностью доказана.□

8 Алгебраические сетки

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор, такой что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{41}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (41) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел Θ_1,…,Θ_s — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1}\end{pmatrix}, \tag{42}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Напомним, что

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant s-1}|\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k,$$

$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,s}(1 + |\Theta_\nu| + \ldots + |\Theta_\nu^{s-1}|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1,$$

где $T^\top$ — транспонированная матрица к матрице T.

Тогда параллелепипед

$$\Pi_s(T_1) = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, |t_{\nu 1}x_1 + \ldots + t_{\nu s}x_s| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, \ldots, s) \right\},$$

задаваемый матрицей

$$T_1 = T_1(\vec{a}) = \frac{1}{2\|T(\vec{a})\|_1} \cdot T(\vec{a}), \tag{43}$$

содержит $s-$мерный куб $K_s = \{\vec{x} \,|\, |x_\nu| \leqslant 1, \quad \nu = 1, \ldots, s\} = \{\vec{x} \,|\, \|\vec{x}\|_1 \leqslant 1\}$, где $\|\vec{x}\|_1 = \max\limits_{\nu=1,\ldots,s} |x_\nu|$, поскольку $\|T(\vec{a}) \cdot \vec{x}\|_1 \leqslant \|T(\vec{a})\|_1 \cdot \|\vec{x}\|_1$, то есть

$$\max_{\substack{|x_\nu| \leqslant 1 \\ \nu=1,\ldots,s}} \left|\Theta_1^k x_1 + \ldots + \Theta_s^k x_s\right| \leqslant |\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k, \ (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Решётка $\Lambda(T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^\nu m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^\nu m_\nu \right) \,\middle|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x} \in \Lambda(T(\vec{a}))$ — алгебраически сопряженные целые алгебраические числа, то произведение $x_1 \ldots x_s$ — ненулевое целое рациональное число.

Как известно, для любой решетки Λ взаимной решёткой называется решётка Λ^*, заданная равенством

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda : \, (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$

Как видно из определения взаимной решетки, для любой решётки выполняется равенство $(\Lambda^*)^* = \Lambda$.

Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

Кроме этого, если T — произвольная невырожденная матрица и $T^* = (T^{-1})^\top$, то решетки $\Lambda(T)$ и $\Lambda(T^*)$ — взаимные решетки: $\Lambda^*(T) = \Lambda(T^*)$.

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решетки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Обозначим через $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)} = \mathbb{Q}(\Theta_\nu)$ — алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Так как все корни неприводимого многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ — действительные числа, то мы имеем набор из s изоморфных чисто вещественных алгебраических полей степени s. Из предыдушего следует, что каждая строка матрицы $T(\vec{a})$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \dots, s)$. Так как точки решетки $\Lambda(T(\vec{a}))$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $T(\vec{a})$, то координаты каждой точки $\vec{x} \in \Lambda(T(\vec{a}))$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решетки принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \dots, s)$.

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка. Как обычно,[3] $\sigma_j(\vec{\Theta}) = (-1)^j a_{s-j}$ — элементарные симметрические многочлены степени j от корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant s)$.

Лемма 16. *Пусть* $S_j(\vec{\Theta}) = \sum\limits_{\nu=1}^{s} \Theta_\nu^j$, $j \geqslant 0$ *и симметрическая матрица* $Q(\vec{a})$ *задана равенством*

$$Q(\vec{a}) = \begin{pmatrix} S_0(\vec{\Theta}) & \dots & S_{s-1}(\vec{\Theta}) \\ S_1(\vec{\Theta}) & \dots & S_s(\vec{\Theta}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{s-1}(\vec{\Theta}) & \dots & S_{2s-2}(\vec{\Theta}) \end{pmatrix},$$

тогда $Q(\vec{a})$ *— невырожденная, симметрическая, рациональная матрица и справедливо равенство* $Q(\vec{a}) = T(\vec{a}) \cdot T(\vec{a})^\top$.

Доказательство. См. [3] стр. 50.□

Обозначим через $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$ элементы матрицы $Q(\vec{a})^{-1}$. Ясно, что из симметричности функций $S_j(\vec{\Theta})$ вытекает симметричность функций $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$.

Лемма 17. *Справедливо равенство*

$$T^*(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. См. [3] стр. 51.□

Лемма 18. *Произвольная точка* $\vec{x}$ *решетки* $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ *имеет вид:*

$$\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta}) m_\nu \right) \Theta_1^{k-1}, \dots, \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta}) m_\nu \right) \Theta_s^{k-1} \right),$$

где $m_1, \dots, m_s$ *— произвольные целые числа.*

[3]здесь пользуемся естественным соглашение, что $a_s = 1$.

Доказательство. См. [3] стр. 51.□

Лемма 19. *Пусть* $t(\vec{\Theta})$ *— наименьший общий знаменатель для рациональных чисел* $S_0(\vec{\Theta}),\ldots,S_{s-1}(\vec{\Theta})$, *тогда точка* $\vec{x}$ *решетки* $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ *будет целочисленной, тогда и только тогда, когда* $\vec{x}$ *имеет вид:* $\vec{x} = t(\vec{\Theta})\cdot(m,\ldots,m)$ *и* m *— целое число.*

Других точек $\vec{x}$ *решётки* $\Lambda(T^*(\vec{a}))$, *у которых хотя бы одна координата рациональная, не существует.*

Доказательство. См. [3] стр. 51 — 52.□

Определение 9. *Пусть задана последовательность натуральных чисел* $q_1, q_2, \ldots q_n$, *по которой определена монотонно возрастающая последовательность* $Q_1 = q_1$, $Q_2 = q_1q_2$, $\ldots$, $Q_n = q_1q_2\ldots q_n$. *Будем говорить, что задан концентрический алгоритм приближенного интегрирования порядка* $r \geqslant 2$ $< M(j), \rho(\vec{x}), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *периодических функций из класса* $\overline{E_s^r} = \bigcup\limits_{1<\alpha\leqslant r} E_s^\alpha$ *с алгебраическими сетками* $M(j)$, *если* $M(j) = M'(Q_j(\Lambda(T)))$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *и* $\rho(\vec{x})$ *— весовая функция порядка* r, *а правило остановки* Δ *задано формулой (3) (см. стр. 56).*

Теорема 4. *Пусть* $\Theta_\nu, (\nu = 1, \ldots, s)$, *действительные корни неприводимого многочлена*

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s$$

с целыми коэффициентами.

Пусть, матрица $T = T(\vec{a})$ *задана соотношением (42), матрица* T_1 *— равенством (43), и* $1 < \alpha \leqslant r$.

Тогда для правила остановки Δ *концентрического алгоритма приближенного интегрирования порядка* $r \geqslant 2$ *по квадратурным формулам*

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \left(\det\left(Q_j\Lambda(T(\vec{a}))\right)\right)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(Q_j\Lambda(T(\vec{a})))} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(Q_j\Lambda(T(\vec{a})))}[f] \quad (44)$$

на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $(1 < \alpha \leqslant r)$ *с весовой функцией* $\rho(\vec{x})$ *порядка* r *с константой* B *справедлива оценка*

$$\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}\left[E_s^\alpha(C)\right] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} \left|\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}[f]\right| \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \cdot B^2 |\det T| \cdot \left(2\left(1+\zeta(\alpha)\right) + \left(1+2\zeta(\alpha)\right)2^{\alpha}\right)^{2s} \cdot$$
$$\cdot \frac{q_j^s}{Q_{j-1}^{2s\alpha}} \left(6^s \cdot (s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 Q_{j-1}}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2\right)^{s-1} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \left(1 + \frac{1}{(\alpha-1)q_j^{s\alpha}}\right) + \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q_j\lambda(T)}\right)^s \left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q_j^{\alpha}}\right)^{s-1}\right)^2 =$$
$$= O\left(\frac{q_j^s \ln^{2(s-1)} Q_{j-1}}{Q_{j-1}^{2s\alpha}}\right). \tag{45}$$

Доказательство. Согласно определению (3) (см. стр. 56) для величины $\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}[f]$ справедливо равенство

$$\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}[f] = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z}\in K((Q_j(\Lambda(T))^*,(Q_{j-1}(\Lambda(T))^*)} \left|R_{N'(Q_{j-1}(\Lambda(T)),\vec{z})}[f] - R_{N'(Q_j(\Lambda(T)}[f]\right|^2, \tag{46}$$

где $K((Q_j(\Lambda(T))^*, (Q_{j-1}(\Lambda(T))^*)$ — полный набор представителей по одному из каждого класса решетки $(Q_j(\Lambda(T))^*$ по подрешетки $(Q_{j-1}(\Lambda(T))*$ и поэтому $t = q_j^s$.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3, из равенства (40) (см. стр. 81) получим

$$\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}[f] = \frac{1}{q_j^s|\det T|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\vec{z}\in K((Q_j(\Lambda(T))^*,(Q_{j-1}(\Lambda(T))*)} \left| \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(Q_{j-1}m_1,\ldots,Q_{j-1}m_s) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{\delta})} - \right.$$
$$\left. - \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(Q_j m_1,\ldots,Q_j m_s)\right|^2. \tag{47}$$

Согласно соглашению на стр. 80 вектор $\vec{\delta} = \delta(Q_{j-1}\vec{z}\cdot T^{\top})$.

Так как $\vec{z} \in K((Q_j(\Lambda(T))^*, (Q_{j-1}(\Lambda(T))^*)$ и

$$(Q_{j-1}(\Lambda(T))^* = \left\{ \frac{\vec{x}(\vec{n})}{Q_{j-1}} \middle| \vec{n}\in\mathbb{Z}^s \right\},$$
$$(Q_j(\Lambda(T))^* = \left\{ \frac{\vec{x}(\vec{n})}{Q_j} \middle| \vec{n}\in\mathbb{Z}^s \right\},,$$
$$\vec{x}(\vec{n}) = \left(\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})n_\nu\right)\Theta_1^{k-1}, \ldots, \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})n_\nu\right)\Theta_s^{k-1}\right),$$

то

$$K((Q_j(\Lambda(T))^*, (Q_{j-1}(\Lambda(T))^*) = \left\{ \frac{\vec{x}(\vec{n})}{Q_j} \middle| \begin{array}{c} 0 \leqslant n_j \leqslant q_j - 1 \\ 1 \leqslant j \leqslant s \end{array} \right\}.$$

Из определения вектора $\vec{x}(\vec{n})$ имеем равенства $\vec{x}(\vec{n}) = \vec{n} \cdot T^*$, $T^* = (T^{-1})^\top$, поэтому $\vec{x}(\vec{n}) \cdot T^\top = \vec{n}$. Отсюда следует, что $\vec{\delta} = \delta(Q_{j-1}\vec{z} \cdot T^\top) = \frac{\vec{n}}{q_j}$ и

$$\Delta = \Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}[f] = \frac{1}{q_j^s |\det T|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{n_1,\ldots,n_s=0}^{q_j-1} \left| \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(Q_{j-1}\vec{m}) e^{2\pi i \frac{(\vec{m},\vec{n})}{q_j}} - \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(Q_j\vec{m}) \right|^2. \tag{48}$$

Раскрывая квадрат модуля, получим

$$\Delta = \frac{1}{q_j^s |\det T|} \sum_{n_1,\ldots,n_s=0}^{q_j-1} \left| \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(Q_{j-1}\vec{m}) e^{2\pi i \frac{(\vec{m},\vec{n})}{q_j}} - \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(Q_j\vec{m}) \right|^2 =$$
$$= \frac{1}{q_j^s |\det T|} \sum_{n_1,\ldots,n_s=0}^{q_j-1} \sideset{}{'}\sum_{\vec{m},\vec{k}\in\mathbb{Z}^s} \left(C(Q_{j-1}\vec{m}) e^{2\pi i \frac{(\vec{m},\vec{n})}{q_j}} - C(Q_j\vec{m}) \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\overline{C(Q_{j-1}\vec{k})} e^{-2\pi i \frac{(\vec{k},\vec{n})}{q_j}} - \overline{C(Q_j\vec{k})} \right) = \frac{1}{|\det T|} \sum_{\vec{m},\vec{k}\in\mathbb{Z}^s} \Big(C(Q_{j-1}\vec{m}) \overline{C(Q_{j-1}\vec{m} + Q_j\vec{k})} -$$
$$- C(Q_j\vec{m}) \overline{C(Q_j\vec{k})} \Big) = \frac{1}{|\det T|} \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{q_j-1} \sum_{\vec{n},\vec{k}\in\mathbb{Z}^s} C(Q_{j-1}\vec{m} + Q_j\vec{n}) \overline{C(Q_{j-1}\vec{m} + Q_j\vec{k})} =$$
$$= \frac{1}{|\det T|} \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{q_j-1} \left| \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s} C(Q_{j-1}\vec{m} + Q_j\vec{n}) \right|^2.$$

Подставляя оценку (39) коэффициентов Фурье (см. стр. 81), получим

$$\Delta \leqslant C^2 \cdot B^2 |\det T| \cdot (2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha)) 2^\alpha)^{2s} \cdot$$
$$\cdot \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{q_j-1} \left(\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s} \left(\prod_{\nu=1}^{s} \overline{t_{1\nu}(Q_{j-1}m_1 + Q_j n_1) \ldots + t_{s\nu}(Q_{j-1}m_s + Q_j n_s)} \right)^{-\alpha} \right)^2 =$$
$$= C^2 \cdot B^2 |\det T| \cdot (2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha)) 2^\alpha)^{2s} \cdot$$
$$\cdot \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{q_j-1} \zeta_H^2 (Q_{j-1}\vec{m} \cdot T + Q_j \Lambda(T) | \alpha). \tag{49}$$

Воспользуемся оценкой теоремы 2 (см. стр. 74) для обобщенной гиперболической дзета-функции сдвинутой решетки при $q = q_j$ и $Q = Q_{j-1}$, получим

$$\Delta \leqslant C^2 \cdot B^2 |\det T| \cdot (2(1+\zeta(\alpha)) + (1+2\zeta(\alpha))2^\alpha)^{2s} \cdot$$
$$\cdot \frac{q_j^s}{Q_{j-1}^{2s\alpha}} \left(6^s \cdot (s+1) \left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 Q_{j-1}}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2 \right)^{s-1} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(1 + \frac{1}{(\alpha-1)q_j^{s\alpha}}\right) + \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}} \left(1+\frac{1}{q_j\lambda(T)}\right)^s \left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q_j^\alpha}\right)^{s-1} \right)^2 =$$
$$= O\left(\frac{q_j^s \ln^{2(s-1)} Q_{j-1}}{Q_{j-1}^{2s\alpha}} \right) \qquad (50)$$

и теорема полностью доказана. □

В заключение выражаю благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

[2] Гельфанд И. М., Фейнберг С. М.,Фролов А. С., Ченцов Н. Н. Применение метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения, Тр. II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958, Доклад 2141), Атомиздат, 1959, Т. 2, С. 628-633

[3] Герцог, А. С. О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул / А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич // Чебышевский сб. — Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. — С. 10–54.

[4] Герцог, А. С. Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ / А. С. Герцог // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

[5] Герцог, А. С. Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле / А. С. Герцог // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. №23(188). — Вып. 5. — Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. — С. 41–53.

[6] Герцог, А. С. ПОИВС ТМК: Биквадратичные поля и квадратурные формулы / А. С. Герцог // Материалы международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии" посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. — С. 242–247.

[7] Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

[8] Добровольский, Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток / Н. М. Добровольский — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — №6089–84.

[9] Добровольский, Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток / Н. М. Добровольский — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — №6090–84.

[10] Добровольский, Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Н. М. Добровольский — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — №6091–84.

[11] Добровольский, Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук / Н. М. Добровольский. — Тула, 1984.

[12] Добровольский, Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук / Н. М. Добровольский. — Москва, 1985.

[13] Добровольский, Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения / Н. М. Добровольский // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 67–70.

[14] Добровольский, Н. М. Многомерные теоретико – числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[15] Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. №6. С. 1062–1065.

[16] Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, №6. С. 1207–1210.

[17] Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. №4. С. 19–25.

[18] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

[19] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

[20] Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979.

[21] Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. №4. С. 818–821.

[22] Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций// Ж. вычисл. матем. и матем. физики №2, №3 1963 С. 370–376.

Московский педагогический государственный университет
Поступило 17.08.2012