А. А. Илларионов, А. Ю. Чеботарев, Разрешимость стационарной краевой задачи для модели движения сыпучей среды, *Дальневост. матем. журн.*, 2004, том 5, номер 2, 178–183

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2004. Том 5. № 2. С. 178–183

УДК 517.95
MSC2000 35Q30

© А.А. Илларионов, А.Ю. Чеботарев*

Разрешимость стационарной краевой задачи для модели движения сыпучей среды

Доказывается существование обобщенных решений краевой задачи для уравнений, описывающих стационарное движение вязкой несжимаемой среды с внутренними степенями свободы.

Ключевые слова и фразы: *уравнение Навье-Стокса, модель сыпучей среды, обобщённое решение.*

1. Постановка задачи В [1] была предложена модель, описывающая движение несжимаемой среды с внутренними степенями свободы. В стационарном случае уравнения модели имеют вид:

$$(u\cdot\nabla)u = f - \nabla p + \nu\Delta u + K_M(\omega\times u),\ \ \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$(u\cdot\nabla)\omega = -F(p)\omega \text{ в } \Omega. \tag{2}$$

Здесь u — вектор скорости движения, ω — вектор угловой скорости вращения частиц, p — давление, f — плотность внешних сил, действующих на среду, скалярная функция F характеризует трение между частицами, ν — коэффициент кинематической вязкости, K_M — коэффициент Магнуса, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ. Зададим на Γ граничные условия:

$$u = g \text{ на } \Gamma,\ \ \omega = \omega_0 \text{ на } \Gamma_1. \tag{3}$$

Здесь Γ_1 — участок втекания жидкости, т. е. $g_n \equiv g\cdot n < 0$ на Γ_1, n — единичный вектор внешней нормали к Γ. Так как давление определяется уравнением импульса с точностью до аддитивной постоянной, то нужно задать дополнительное условие, фиксирующее эту постоянную. Например, такое:

$$\sup_{x\in\Omega} p(x) = p_0. \tag{4}$$

Целью работы является доказательство существования решения u, p, ω краевой задачи (1)–(4). Функции f, F, g, ω_0 и коэффициенты ν, K_M заданы.

Начально-краевая задача для нестационарных уравнений (1), (2) рассматривалась в [2] (см. также [3]). По своим математическим свойствам система дифференциальных уравнений (1), (2) схожа со стационарной системой Навье–Стокса неоднородной несжимаемой жидкости, краевые задачи для которой рассматривались в [4, 5, 6]. В настоящей работе доказательство проводится с помощью эллиптической регуляризации, предложенной в [6].

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения Российской Академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: anil@iam.dvo.ru

2. Формулировка основного результата. Пусть $W_q^s(Q)$ — пространство Соболева ($s\in\mathbb{R}$, $q \in [1,\infty]$) с нормой $\|\cdot\|_{s,q,Q}$. Будем использовать следующие обозначения:

$$W_2^s(Q) = H^s(Q), \;\; W_q^0(Q) = L^q(Q),$$
$$\|\cdot\|_{s,q,\Omega} = \|\cdot\|_{s,q}, \;\; \|\cdot\|_{s,2} = \|\cdot\|_s, \;\; \|\cdot\|_{s,2,Q} = \|\cdot\|_{s,Q}.$$

Здесь через Q обозначены область Ω либо граница Γ или часть границы. Введем следующие пространства вектор-функций:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0, \;\; \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega\}, \;\; V_q^m = V \cap W_q^m(\Omega),$$

нормы в которых вводятся естественным образом.

Далее на протяжении всей статьи считаем выполненными следующие условия:

(i) $\Gamma \in C^2$, $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_1$, множество $\overline{\Gamma}_1 \setminus \Gamma_1$ имеет 2-мерную меру ноль по Лебегу, Γ состоит из конечного N_Γ числа компонент связности $\Gamma^{(i)}$, $1 \le i \le N_\Gamma$;

(ii) $f \in L^r(\Omega)$ $(3 < r \le 6)$, $\omega_0 \in L^\infty(\Gamma_1)$;

(iii) $g \in W_r^{2-1/r}(\Gamma)$, $\int_{\Gamma^{(i)}} g_n\, ds = 0$, $1 \le i \le N_\Gamma$, $g_n < 0$ на Γ_1, $g_n \ge 0$ на Γ_2;

(iv) F — непрерывная и неотрицательная на $[p_0, +\infty)$ функция.

Определение. Функции $u \in H^1(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$, $\omega \in L^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (1) в смысле распределений, условию (4), граничному условию $u = g$ на Γ в смысле следов и интегральному равенству

$$-\int_\Omega (u\cdot\nabla)\phi\cdot\omega\, dx + \int_\Omega F(p)\phi\omega\, dx + \int_{\Gamma_1} g_n(\phi\cdot\omega_0)\, ds = 0 \;\; \forall\phi \in H^1(\Omega), \; \phi|_{\Gamma_2} = 0, \qquad (5)$$

будем называть обобщенным решением краевой задачи (1)–(4).

Нетрудно проверить, что любое классическое решение краевой задачи является обобщенным и любое достаточно гладкое обобщенное решение является классическим.

Введем обозначения:

$$M_i = \max\{0, ess\, supp\, \omega_{0i}\}, \;\; m_i = \min\{0, ess\, inf\, \omega_{0i}\} \;\; (i = 1, 2, 3).$$

Здесь и далее ω_{0i} — i-я компонента вектора ω_0.

Теорема 1. *Существует обобщенное решение $u \in W_r^2(\Omega)$, $p \in W_r^1(\Omega)$, $\omega \in L^\infty(\Omega)$ краевой задачи (1)–(4), причем*

$$m_i \le \omega_i \le M_i \quad \text{п.в. в } \Omega \;\; (i = 1, 2, 3). \qquad (6)$$

Теорема будет доказана в конце работы.

Замечание. Требования дополнительной гладкости функций g и f вызваны условием (4). Для его выполнения нужно, чтобы давление было ограниченной функцией. В шкале пространств Соболева, для этого достаточно, чтобы $p \in W_r^1(\Omega)$, $r > 3$. Если условие (4) заменить, например, на нелокальное ограничение: $\int_\Omega p\, dx = m_0$, то обобщенное решение будет существовать, если $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f \in L^{6/5}(\Omega)$, но при дополнительном предположении: F — ограниченная функция.

Замечание. Доказательство теоремы 1 будет проведено в случае $p_0 = 0$. Если $p_0 \ne 0$, то, делая замену: $p = \tilde{p} + p_0$, $F(\tilde{p} + p_0) = \tilde{F}(\tilde{p})$, приходим к случаю $p_0 = 0$.

3. Регуляризованная задача Рассмотрим следующую регуляризованную задачу с малым параметром ε:

$$(u\cdot\nabla)u = f - \nabla p + \nu\Delta u + K_M(\omega\times u), \ \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{7}$$

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla\omega\cdot\nabla\phi\,dx + \int_\Omega ((u\cdot\nabla)\omega + F(p)\omega)\cdot\phi\,dx = \int_{\Gamma_1} g_n(\omega-\omega_0)\cdot\phi\,ds\ \forall\phi\in H^1(\Omega), \tag{8}$$

$$u = g \text{ на } \Gamma, \quad \sup_{x\in\Omega} p = 0. \tag{9}$$

Цель этого раздела — доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Существует решение $u\in W_r^2(\Omega)$, $p\in W_r^1(\Omega)$, $\omega\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ задачи* (7)–(9) *и справедливы следующие априорные оценки:*

$$\|u\|_{2,r} + \|p\|_{1,r} \le C_1, \tag{10}$$

$$m_i \le \omega_i \le M_i \text{ п.в. в } \Omega, \tag{11}$$

$$\varepsilon\|\nabla\omega\|_{0,2}^2 \le C_2. \tag{12}$$

Постоянные C_1, C_2 не зависят от ε.

Функцию u будем искать в виде: $u = v + u_\delta$, где $v\in V_r^2$ — новая неизвестная функция, а u_δ выбрана из следующих условий:

$$u_\delta\in W_r^2(\Omega), \ \operatorname{div} u_\delta = 0 \text{ в } \Omega, \ u_\delta|_\Gamma = g, \ \left|\int_\Omega (w\cdot\nabla)u_\delta\cdot w\,dx\right| \le \delta\|w\|_1^2 \quad \forall w\in V, \tag{13}$$

где δ — достаточно малое число. Из условий (i), (iii) вытекает, что функция g соленоидальным образом продолжается в Ω до функции класса $W_r^2(\Omega)$. Поэтому, доказательство существования u_δ, удовлетворяющей (13), проводится точно также как и в классической лемме Хопфа (см., например, [6, 7]).

Пусть $w\in V_r^2(\Omega)$, $q\in W_r^1(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу: найти $v\in W_r^2(\Omega)$, $p\in W_r^1(\Omega)$, $\omega\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla\omega\cdot\nabla\phi\,dx + \int_\Omega ((w+u_\delta)\cdot\nabla)\omega\cdot\phi\,dx + \int_\Omega F(q)\omega\cdot\phi\,dx = \\ = \int_{\Gamma_1} g_n(\omega-\omega_0)\cdot\phi\,ds \quad \forall\phi\in H^1(\Omega), \tag{14}$$

$$-\nu\Delta v + \nabla p = \Phi(w,\omega) \ \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega, \ v|_\Gamma = 0, \ \sup_{x\in\Omega} p = 0, \tag{15}$$

$$\Phi(w,\omega) = -((w+u_\delta)\cdot\nabla)(w+u_\delta) + f + \nu\Delta u_\delta + K_M(\omega\times(w+u_\delta)).$$

Если окажется, что $w = v$, $p = q$, то тройка функций $u = v + u_\delta$, p, ω является решением задачи (7)—(9).

Лемма 1. *Для любых $w\in V_r^2$, $q\in W_r^1(\Omega)$ существует единственное решение задачи* (14), *причем выполняется принцип максимума* (11) *и оценка*

$$\varepsilon\|\nabla\omega\|_{0,2}^2 \le \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |g_n|\omega_0^2\,ds. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем принцип максимума. Выбирая в (14)

$$\phi = \omega_M, \quad \omega_{M,i} = \max\{\omega_i - M_i, 0\}, \ i = 1,2,3,$$

получаем

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla \omega_M|^2\, dx + \int_\Omega (u\cdot\nabla)\omega_M \cdot \omega_M\, dx + \int_{\Gamma_1} g_n \omega_M \cdot (\omega_0 - \omega)\, ds = -\int_\Omega F(q)\omega\omega_M\, dx.$$

Здесь $u = w + u_\delta$. Так как функция F неотрицательна, то $F(q)\omega\omega_M \geq 0$ п.в. в Ω. Используя формулу интегрирования по частям и учитывая, что $u = g$ на Γ, $g_n < 0$ на Γ_1, $g_n \geq 0$ на Γ_2, $g_n(\omega_0 - \omega)\omega_M \geq -\omega_M^2 g_n$ на Γ_1, получаем

$$\int_\Omega (u\cdot\nabla)\omega_M\cdot\omega_M\, dx + \int_{\Gamma_1} g_n\omega_M\cdot(\omega_0-\omega)\, ds \geq -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} g_n\omega_M^2\, ds.$$

Следовательно,

$$\varepsilon\int_\Omega |\nabla\omega_M|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |g_n|\omega_M^2\, ds \leq 0.$$

Значит, $\omega_M = 0$ п.в. в Ω, т. е. $\omega_i \leq M_i$ п.в. в Ω. Неравенство $\omega_i \geq m_i$ доказывается аналогично. Из принципа максимума и альтернативы Фредгольма вытекает разрешимость эллиптической задачи (14) [8]. Для доказательства оценки (16) достаточно выбрать в (14) $\phi = \omega$ и учесть, что

$$F(q)\omega^2 \geq 0, \quad \int_\Omega (u\cdot\nabla)\omega\cdot\omega\, dx \geq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} g_n\omega^2\, ds, \quad \omega\cdot\omega_0 \leq \omega^2/2 + \omega_0^2/2.$$

Лемма доказана.

Если $\omega \in L^\infty(\Omega)$, $w \in W_r^2(\Omega)$, то функция $\Phi(w,\omega) \in L^r(\Omega)$ и, следовательно, существует решение $v \in W_r^2(\Omega)$, $p \in W_r^1(\Omega)$ системы Стокса (15). Таким образом, можно ввести оператор $T: W_r^2(\Omega)\times W_r^1(\Omega) \to W_r^2(\Omega)\times W_r^1(\Omega)$, который каждой паре функций (w,q) ставит в соответствие пару (v,p), являющуюся вместе с функцией $\omega \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ решением задачи (14), (15). Пара (v,p) является неподвижной точкой оператора T, если и только если $u = v + u_\delta$, p, ω — решение регуляризованной задачи (7)–(9). Для доказательства существования неподвижной точки применим теорему Лере–Шаудера. Используя компактность вложений

$$W_r^2(\Omega)\subset C^1(\overline{\Omega}), \quad W_r^1(\Omega)\subset C^0(\overline{\Omega}), \quad H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega), \quad H^{1/2}(\Gamma)\subset L^3(\Gamma),$$

непрерывность оператора следа $H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$, а также следующую оценку [9, 3, 7]:

$$\begin{aligned} &\|v\|_{2,s} + \|p\|_{1,s} \leq C(\Omega,s)\|-\nu\Delta v + \nabla p\|_{0,s} \\ &\qquad\qquad \forall v\in V_s^2, \quad p\in W_s^1(\Omega), \quad \int_\Omega p\, dx = 0, \quad s\in(1,\infty), \end{aligned} \tag{17}$$

нетрудно видеть, что оператор T слабо сходящиеся последовательности переводит в сильно сходящиеся и, следовательно, является вполне непрерывным. Осталось доказать, что все возможные решения уравнения:

$$\lambda T(v,p) = (v,p) \tag{18}$$

равномерно ограничены по $\lambda\in[0,1]$. Уравнение (18) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_\Omega \nabla\omega\cdot\nabla\phi\, dx + \int_\Omega ((v+u_\delta)\cdot\nabla)\omega\cdot\phi\, dx + \int_\Omega F(p)\omega\cdot\phi\, dx = \\ &\qquad = \int_{\Gamma_1} g_n(\omega-\omega_0)\cdot\phi\, ds \quad \forall\phi\in H^1, \end{aligned} \tag{19}$$

$$-\nu\Delta v + \nabla p = \lambda\Phi(v,\omega) \ \ \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega, \quad v|_\Gamma = 0, \quad \sup_{x\in\Omega} p = 0, \tag{20}$$

$$\Phi(v,\omega) = -((v+u_\delta)\cdot\nabla)(v+u_\delta) + f + \nu\Delta u_\delta + K_M(\omega\times(v+u_\delta)).$$

Из леммы 1 вытекает

$$\|\omega\|_{0,\infty} \le \max\{|M|,|m|\}, \quad |M| = \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}, \quad |m| = \sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

Тогда скалярно в $L^2(\Omega)$, умножая первое уравнение в (20) на v, используя формулу интегрирования по частям и теорему Соболева о вложениях, получаем

$$\nu \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \le \delta \|v\|_1^2 + C\|v\|_1.$$

Следовательно, $\|v\|_1 \le C$ при достаточно малом δ. Здесь и далее через C обозначены постоянные, не зависящие от ε и λ. Тогда, используя неравенство (17), которое верно при любом $r \in (1,\infty)$, и теорему Соболева о вложениях, нетрудно получить следующую цепочку оценок

$$\begin{aligned}&\|\Phi\|_{0,3/2} \le C \Rightarrow \|v\|_{2,3/2} \le C \Rightarrow \|\Phi\|_{0,2} \le C \Rightarrow \|v\|_{2,2} \le C \Rightarrow\\ &\Rightarrow \|\Phi\|_{0,r} \le C \Rightarrow \|v\|_{2,r} \le C \quad (\Phi = \Phi(v,\omega)).\end{aligned}$$

Оценка для v получена. Из уравнения (15) вытекает неравенство $\|\nabla p\|_{0,r} \le C_7$, из которого, а также из условия: $\sup_{x\in\Omega} p = 0$ следует $\|p\|_{1,r} \le C$. Таким образом, все решения уравнения (18) ограничены равномерно по $\lambda \in [0,1]$ (и $\varepsilon > 0$). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1 Пусть $u_\varepsilon \in W_r^2(\Omega)$, $p_\varepsilon \in W_r^1(\Omega)$, $\omega_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ — решение регуляризованной задачи (7)—(9). Из оценок (10), (11) вытекает существование последовательностей

$$\begin{array}{lll} u_{\varepsilon_k} \to u & \text{слабо в } W_r^2(\Omega), & \text{сильно в } C^1(\overline{\Omega}),\\ p_{\varepsilon_k} \to p & \text{слабо в } W_r^1(\Omega), & \text{сильно в } C^0(\overline{\Omega}),\\ \omega_{\varepsilon_k} \to \omega & *\text{-слабо в } L^\infty(\Omega) & \text{при } \varepsilon_k \to 0.\end{array}$$

Очевидно, что u, p, ω удовлетворяют уравнениям (1) почти всюду, соотношению (4) и граничному условию $u = g$ на Γ. Из (8) вытекает равенство

$$\begin{aligned}&\varepsilon_k \int_\Omega \nabla\omega_{\varepsilon_k}\cdot\nabla\phi\,dx - \int_\Omega (u_{\varepsilon_k}\cdot\nabla)\phi\cdot\omega_{\varepsilon_k}\,dx + \int_\Omega F(p_{\varepsilon_k})\omega_{\varepsilon_k}\cdot\phi\,dx + \int_{\Gamma_1} g_n\omega_0\cdot\phi\,ds = 0\\ &\forall\phi \in H^1(\Omega),\ \phi|_{\Gamma_2} = 0,\end{aligned}$$

переходя к пределу в котором и используя (12), получаем (5). Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. *Лелюх В.Д., Ненашев Е.Н.* К теории движения сыпучей среды в неподвижной газовой фазе // Применение аналитических и численных методов в механике жидких и сыпучих сред. Горький, 1972. С. 4–20 (Уч. зап. Горьков. ун-та. Сер. Механика; Вып. 156)

2. *Антонцев С.Н., Лелюх В.Д.* О разрешимости начально-краевой задачи в одной модели динамики среды с внутренними степенями свободы // Динамика сплошной среды. 1972. Вып. 12. С. 26–51.

3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.

4. *Фролов Н.Н.* О разрешимости краевой задачи движения неоднородной жидкости // Матем. заметки. 1993. Т. 53. Вып. 6. С. 130–140.

5. *Фролов Н.Н.* Краевая задача, описывающая движение неоднородной жидкости // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 433–451.

6. *Чеботарев А.Ю.* Стационарные вариационные неравенства в модели неоднородной жидкости // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1185–1193.

7. *Girault V., Raviart P.* Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer – Verlag, New York: 1986.

8. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

9. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 30 июня 2004 г.

Работа поддержана грантом конкурса научных проектов ДВО РАН 2004 г. (проект № 04-3-Г-01-019)

Illarionov A.A., Chebotarev A.Yu. The solvability of stationary boundary problem for model of the granular medium. Far Eastern Mathematical Journal. 2004. V. 5. № 2. P. 178–183.

ABSTRACT

The solvability of the boundary problem for equations describing the stationary moving of incompressible medium with inner degrees of freedom is proved

Key words: *Navier-Stokes equation, model of the granular medium, weak solution.*