А. В. Покровский, О представлении непрерывных функций в виде суммы квазианалитических,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 20–23

6. Chizhonkov E. V. Application of the Cossera spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes problem//Russ. J. Num. Anal. and Math. Modelling. 1994. 9, N 3. 191—199.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973.

Поступила в редакцию
27.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 517.548.3

А. В. Покровский

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СУММЫ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ

Пусть $C(J)$ — пространство непрерывных функций на замкнутом отрезке J из $\mathbf{R}$ с равномерной нормой: $\|f\|=\sup\limits_{x\in J}|f(x)|$, $B(r)$ — замкнутый шар из $C(J)$ радиуса r с центром в начале координат. Через $E_n(f)$ обозначим наименьшее уклонение функции f от пространства (алгебраических) полиномов степени $\leqslant n$ в этой метрике. Очевидно, что для каждой пары функций g, h из $C(J)$ и всех натуральных m и n выполняется неравенство

$$E_{\max\{m,n\}}(g+h)\leqslant E_m(g)+E_n(h). \tag{1}$$

Если $N=\{n(k)\}_1^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то говорят, что $f\in C(J)$ принадлежит квазианалитическому классу Бернштейна $B(J, N)$, если $E_s(f)\leqslant Cq^s$ $(C=C(f),\quad q=q(f)<1)$ для $s=s(k')$, где $\{s(k')\}_1^\infty$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, обладающая свойством: для каждого $k=1, 2, \dots$ найдется $s(k')$, такое, что $n(k)/l\leqslant s(k')\leqslant ln(k)$ при некотором $l=l(f)$, не зависящем от k.

С. Н. Бернштейн [1] показал, что если две функции f, g из $B(J,N)$ совпадают на некотором отрезке $j\subset J$, то они тождественны на J. В теории квазианалитических по Бернштейну функций важную роль играет следующая теорема А. И. Маркушевича [2] (см. также [1]): любая функция $f\in C(J)$ является суммой двух функций, каждая из которых принадлежит некоторому (своему) квазианалитическому классу Бернштейна. Приводимая ниже теорема существенно уточняет этот результат.

Напомним (см. [3]), что множество M в пространстве X с метрикой R называется вполне ограниченным, если при любом $\varepsilon>0$ для него существует конечная ε-сеть, т. е. такое конечное множество $E\subset X$, что для любого $x\in M$ существует $a\in E$ со свойством $R(x, a)\leqslant\varepsilon$.

Теорема. *Пусть задано некоторое множество $A\subset C(J)$. Для того чтобы существовали такие два класса $B(J,N)$ и $B(J,M)$ функций, квазианалитических по Бернштейну на J, что каждая функция f из A представляется в виде $f=f_1+f_2$, где $f_1\in B(J,N)$ и $f_2\in B(J,M)$, необходимо и достаточно, чтобы множество A представлялось в виде объединения некоторой последовательности вполне ограниченных множеств из $C(J)$.*

Доказательство. Пусть каждая функция $f(x)\in A$ есть $f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1\in B(J, N)$, $f_2\in B(J, M)$, $N=\{n_k\}_1^\infty$, $M=\{m_k\}_1^\infty$. Рассмотрим множества

$$A_p=\{f\in A: \|f\|\leqslant p,\ C(f_i)\leqslant p,\ q(f_i)\leqslant 1-1/p,\ l(f_i)\leqslant p\}.$$

Здесь $i=1,\ 2;\ C(f_i),\ q(f_i)$ и $l(f_i)$ — постоянные из определения классов Бернштейна. Очевидно, что $A=\bigcup\limits_1^\infty A_p$. Если $f(x)$ принадлежит A_p, то $E_s(f_1)\leqslant p(1-1/p)^s$, $E_r(f_2)\leqslant p(1-1/p)^r$, где $s=s(k')$, $r=r(k')$ $(k'=1,\ 2,\ldots)$, $\{s(k')\}_1^\infty$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, обладающая свойством из определения классов Бернштейна по отношению к $\{n(k)\}_1^\infty$; $\{r(k')\}_1^\infty$ — последовательность с аналогичным свойством по отношению к $\{m(k)\}_1^\infty$. Отсюда следует, что

$$E_{n(k)p}(f_1)\leqslant E_{s(k')}(f_1)\leqslant p(1-1/p)^{s(k')}\leqslant p(1-1/p)^{n(k)/p},$$

и аналогично

$$E_{m(k)p}(f_2)\leqslant p(1-1/p)^{m(k)/p},$$

где $k=1,\ 2,\ \ldots$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Выберем и зафиксируем $k=k(\varepsilon)$ столь большим, что $p(1-1/p)^{n(k)/p}\leqslant\varepsilon/3$, $p(1-1/p)^{m(k)/p}\leqslant\varepsilon/3$. Используя (1), получим

$$E_{\max\{n(k)p,\ m(k)p\}}(f_1+f_2)\leqslant E_{n(k)p}(f_1)+E_{m(k)p}(f_2)\leqslant$$
$$\leqslant p(1-1/p)^{n(k)p}+p(1-1/p)^{m(k)p}\leqslant\varepsilon/3+\varepsilon/3=2\varepsilon/3,$$

т. е. полиномы степени $\leqslant\max\{n(k)p,\ m(k)p\}$ образуют $2\varepsilon/3$-сеть в A_p. Если $C_{p,k}$ есть множество полиномов этой сети, то ясно, что $C_{p,k}$ содержится в $B(p+2\varepsilon/3)$.

Поскольку для конечномерных пространств понятия ограниченности и вполне ограниченности эквивалентны, то мы можем выбрать из $C_{p,k}$ конечное подмножество, которое есть $\varepsilon/3$-сеть для $C_{p,k}$ (см. [3]). Очевидно, что оно является ε-сетью в A_p, т. е. A_p вполне ограничено.

Пусть теперь $A=\bigcup\limits_1^\infty A_p$, где $A_p\,(p=1,\ 2,\ldots)$ вполне ограничены в $C(J)$, и пусть $q\,(0<q<1)$ фиксировано. Поскольку по теореме Вейерштрасса полиномы плотны в $C(J)$, то мы можем выбрать конечную $1/2$-сеть полиномов в A_1. Пусть $t(0,\ 1)=0$, а $t(1,\ 1)$ — максимальная из степеней полиномов, образующих эту сеть. Построим в A_1 конечную $q^{t(1,1)}/4$-сеть полиномов, и пусть $t(2,\ 1)$ — максимальная из степеней полиномов этой сети. Увеличим, если нужно, $t(2,\ 1)$ так, чтобы $t(2,\ 1)>t(1,\ 1)$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность $\{t(k,\ 1)\}_1^\infty$, такую, что $t(k+1,\ 1)>t(k,\ 1)$ и в A_1 существует конечная $q^{t(k,1)}/2^{k+1}$-сеть из полиномов степени $\leqslant t(k+1,\ 1)$. Если $f(x)$ принадлежит A_1, $P_0(x)\equiv 0$ и $\{P_k(x)\}_1^\infty$ — такая последовательность полиномов, что $P_k(x)$ — ближайший к $f(x)$ элемент построенной $q^{t(k-1,1)}/2^k$-сети, то, полагая

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^\infty(P_{2k}(x)-P_{2k-1}(x))\text{ и }f_2(x)=\sum_{k=1}^\infty(P_{2k-1}(x)-P_{2k-2}(x)),$$

будем иметь $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $\sum\limits_{k=1}^n(P_{2k}-P_{2k-1})$ — полином степени $\leqslant t(2n,\ 1)$,

$$E_{t(2n,1)}(f_1)\leqslant\left\|f_1-\sum_{k=1}^n(P_{2k}-P_{2k-1})\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^\infty\|P_{2k}-P_{2k-1}\|\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (\|f-P_{2k}\|)+\|f-P_{2k-1}\|)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (q^{t(2k-1,1)}/2^{2k}+q^{t(2k-2,1)}/2^{2k-1})\leqslant$$

$$\leqslant q^{t(2n,1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^{-2k}+2^{1-2k})\leqslant q^{t(2n,1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{2-2k}\leqslant q^{t(2n,1)}\, 2^{1-2n}$$

и, следовательно, $E_{t(2n,1)}(f_1)=o(q^{t(2n,1)})$ при $n\to\infty$. Аналогично получаем, что $E_{t(2n-1,1)}(f_2)=o(q^{t(2n-1,1)})$ при $n\to\infty$. Выберем далее в A_2 конечную 1/2-сеть полиномов. Пусть $t(0,\ 2)=0$, $t(1,\ 2)$ — максимальная степень полиномов этой сети. При необходимости увеличивая $t(1,\ 2)$, можно считать, что $t(1,\ 2)$ содержится в $\{t(k,\ 1)\}_1^{\infty}$, и если $t(1,\ 2)=t(m,\ 1)$, то m нечетно. Затем, как и для A_1, построим в A_2 индуктивно последовательность $q^{t(k,2)}/2^{k+1}$-сетей полиномов $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, таких, что $q^{t(k,2)}/2^{k+1}$-сеть состоит из полиномов степени $\leqslant t(k+1,\ 2)$, $t(k+1,\ 2)>t(k,\ 2)$, $t(k,\ 2)$ содержится в $\{t(k,\ 1)\}_1^{\infty}$ и если $t(k,\ 2)=t(m,\ 1)$, то k и m имеют одинаковую четность. Как и выше, устанавливается, что любая $f(x)$ из A_2 есть $f_1(x)+f_2(x)$, где $E_{t(2k,2)}(f_1)=o(q^{t(2k,2)})$ при $k\to\infty$ и $E_{t(2k-1,2)}(f_2)=o(q^{t(2k-1,2)})$ при $k\to\infty$. Продолжим этот процесс. В результате при всех $p=1,2,\ldots$ получим для каждой функции $f(x)$ из A_p такое представление $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, что $E_{t(2k,p)}(f_1)=o(q^{t(2k,p)})$ при $k\to\infty$ и $E_{t(2k-1,p)}(f_2)=o(q^{t(2k-1,p)})$ при $k\to\infty$, где $\{t(k,\ p)\}_{k=1}^{\infty}$ — такие возрастающие последовательности, что $\{t(k,\ p+1)\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность $\{t(k,\ p)\}_{k=1}^{\infty}$ и если $t(n,\ p)=t(m,\ p+1)$, то n и m имеют одинаковую четность.

Положим $n(k)=t(2k,\ 2k)$, $m(k)=t(2k-1,\ 2k-1)$, $k=1,\ 2,\ldots$. По построению каждая $f(x)$ из A есть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $E_{n(k)}(f_1)=o(q^{n(k)})$ и $E_{m(k)}(f_2)=o(q^{m(k)})$ при $k\to\infty$. Таким образом, f_1 принадлежит $B(J,\ N)$, f_2 принадлежит $B(J,\ M)$, где $N=\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $M=\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Не существует таких классов $B(J,\ N)$ и $B(J,\ M)$ функций, квазианалитических по Бернштейну на J, что каждая функция f из $C(J)$ представляется в виде $f=f_1+f_2$, где $f_1\in B(J,\ N)$ и $f_2\in B(J,\ M)$.*

Это вытекает из того, что полное метрическое пространство $C(J)$ не может быть представлено в виде объединения последовательности вполне ограниченных (а значит, и нигде не плотных) множеств.

Следствие 2. *Существуют два таких класса $B(J,N)$ и $B(J,M)$ функций, квазианалитических по Бернштейну на J, что каждая функция $f\in C(J)$, удовлетворяющая условию Липшица с некоторым показателем $\alpha>0$ и некоторой постоянной $C>0$ (т. е. $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|^{\alpha}$ при всех x_1, x_2 из J), представляется в виде $f=f_1+f_2$, где $f_1\in B(J,N)$ и $f_2\in B(J,M)$.*

Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить искреннюю благодарность научному руководителю профессору Е. П. Долженко за постановку задачи и оказанное внимание.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-01-00236) и Международного научного фонда (grant NCF000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Аналитические функции вещественной переменной, их возникновение и пути обобщений//Собрание сочинений. Т. 1. М., 1952.

2. Маркушевич А. И. О наилучшем приближении//Докл. АН СССР. 1944. **44**, № 7. 290—292.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989.

Поступила в редакцию
13.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 517.2

П. В. Альбрехт

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ε-ВЫБОРКАХ

Пусть X — действительное линейное нормированное пространство (ЛНП), $Y \subset X$ — конечномерное подпространство, $\rho(x, Y)$ — расстояние от $x \in X$ до множества Y, $B=\{x: \|x\| \leqslant 1\}$, $S=\{x: \|x\|=1\}$.

Пусть $\varepsilon \geqslant 0$. Мультипликативной (аддитивной) ε-проекцией назовем многозначное отображение

$$x \mapsto P_m^\varepsilon x = \{y \in Y : \|x-y\| \leqslant \rho(x, Y)(1+\varepsilon)\}$$

$$(x \mapsto P_a^\varepsilon x = \{y \in Y : \|x-y\| \leqslant \rho(x, Y)+\varepsilon\}).$$

При $\varepsilon=0$ получаем определение оператора метрической проекции.

Мультипликативной (аддитивной) ε-выборкой $M: U \to Y$ $(A: U \to Y)$, где $U \subseteq X$, назовем любое однозначное отображение, такое, что

$$\forall x \in U \;\; Mx \in P_m^\varepsilon x \;\; (Ax \in P_a^\varepsilon x).$$

Известно, что для любого конечномерного подпространства Y существуют непрерывные ε-выборки из ε-проекций. В последнее время большое внимание уделяется вопросам существования липшицевых и дифференцируемых ε-выборок.

В [1] установлено, что хаусдорфово расстояние $h(P_a^\varepsilon x_1, P_a^\varepsilon x_2)$ является липшицевым (различные липшицевы оценки величины $h(P_a^{\varepsilon_1} x_1\; P_a^{\varepsilon_2} x_2)$ можно найти в работах [1—4]). Из этого факта, применяя проектор Штейнера [5] к отображению $x \mapsto P_a^\varepsilon x$, легко вывести существование липшицевых ε-выборок (см., например, [6]). В частности, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-выборка $M: X \to Y$, такая, что

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; \|Mx_1 - Mx_2\| \leqslant c(n, \varepsilon)\|x_1 - x_2\|,$$

где $n = \dim Y$, константа c не зависит от x_1, x_2.

В настоящей статье доказывается существование дифференцируемых ε-выборок, имеющих ту же гладкость, что и норма пространства X (теорема 1). Теорема 2 утверждает, что построить ε-выборки большей гладкости, вообще говоря, нельзя.

Пусть X, X_1=ЛНП, $U \subseteq X$—замкнутое множество, отображение $F: U \to X_1$ определено и непрерывно в некоторой окрестности множества U; $r > 0$, $r = k + \gamma$, где $k = \begin{cases} [r], & r \notin \mathbf{N}; \\ r-1, & r \in \mathbf{N}, \end{cases}$ $0 < \gamma \leqslant 1$.

Определение. Будем писать $F \in H^r(U)$, если

$$\forall x_1, x_2 \in U \;\; \|F^{(k)}(x_1) - F^{(k)}(x_2)\| \leqslant C\|x_1 - x_2\|^\gamma,$$

где константа c не зависит от x_1, x_2.