O. E. Zubelevich, On a chain on cone problem, *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, 2017, Volume 17, Issue 4, 57–63

DOI: 10.17377/PAM.2017.17.6

УДК 517.972.2
DOI 10.17377/PAM.2017.17.6

О. Э. Зубелевич

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ЦЕПИ НА КОНУСЕ*

Рассмотрена задача о равновесиях петли цепочки на гладком конусе в поле силы тяжести.

Ключевые слова: вариационные методы, равновесие цепи.

1. Постановка задачи и формулировка теоремы

В наследство от классического периода механике достались две вариационные задачи.

Задача о цепной линии была сформулирована в 1690 г. Якобом Бернулли и решена его братом Иоганном Бернулли, а также независимо Х. Гюйгенсом и Г. В. Лейбницем [1].

Задача о кривой скорейшего спуска — брахистохроне — была поставлена и решена в 1696 году Иоганом Бернулли [2].

Эти две задачи занимают в механике совершенно особое место и обладают всеми свойствами классических задач: их постановка проста и естественна, результат неочевиден, а решения нетривиальны, но при этом доводятся до явных формул не очень громоздкими вычислениями.

Вообще, вариационных задач, которые не были бы придуманы нарочно в учебных целях, а возникали бы естественным путем из механики, и при этом досчитывались бы до конца вручную, очень мало.

В этой статье мы рассмотрим одну из таких задач.

Концы однородной тонкой цепочки массой m и длиной l соединены. Эту петлю набрасывают на прямой круговой конус с углом раствора 2α, $\alpha \in (0, \pi/2)$. Поверхность конуса гладкая. Ось конуса направлена вертикально (*рис.* 1).

Найти возможные положения равновесия цепочки, при которых цепь обвивает конус один раз.

Эта задача обладает очевидным решением: вся цепочка лежит в горизонтальной плоскости и образует окружность. Такое положение равновесия мы будем называть тривиальным. Но есть ли другие положения равновесия?

Теорема 1. *Если $\pi/6 < \alpha < \pi/4$, то, кроме тривиального положения равновесия, цепочка имеет еще одно* (*с точностью до вращений вокруг оси конуса*) *положение равновесия. Мы будем называть его косым* (*см. рис.* 1).

При всех прочих допустимых значениях угла α цепочка имеет лишь тривиальное положение равновесия.

Численные эксперименты показывают, что в косом положении равновесия цепочка не образует плоскую кривую.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-01-03747).

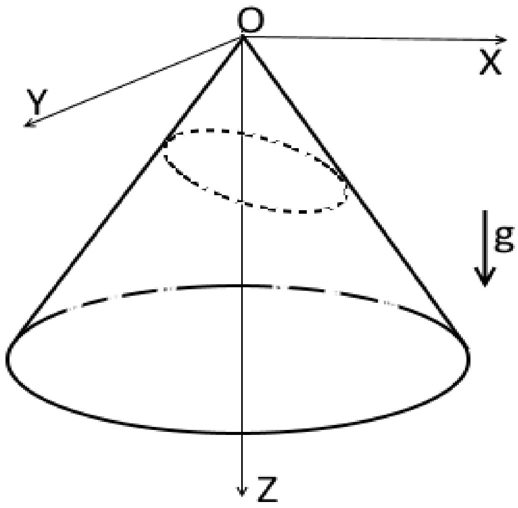

Рис. 1. Цепь на конусе

2. Доказательство теоремы

Введем декартову систему координат $Oxyz$ так, что ось Z направлена вертикально вниз вдоль оси конуса. Совместим данную декартову систему с цилиндрической:

$$(z, r, \psi), \quad x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi.$$

Уравнение конуса приобретает вид

$$z = ar, \quad a = \operatorname{ctg}\alpha > 0.$$

Будем считать, что линия цепочки на конусе описывается уравнением

$$r = r(\psi), \quad r(\psi + 2\pi) = r(\psi).$$

Элемент длины такой кривой на поверхности конуса выражается формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(1 + a^2)(r')^2 + r^2}\,d\psi, \quad r' = \frac{d}{d\psi}r(\psi).$$

Координата центра масс цепочки на оси Z выражается формулой

$$Z[r(\cdot)] = \frac{a}{l}\int_0^{2\pi} r(\psi)\,ds.$$

Будем исходить из того, что положением равновесия является экстремаль функционала $r(\cdot) \mapsto$ $\mapsto Z[r(\cdot)]$ в классе 2π-периодических функций $r(\psi)$ при условии

$$\int_0^{2\pi} ds = l. \tag{1}$$

Этой задаче отвечает лагранжиан

$$L(r, r') = \left(\frac{a}{l}r + \lambda\right)\sqrt{(1 + a^2)(r')^2 + r^2},$$

где λ — множитель Лагранжа.

Обобщенный интеграл энергии имеет вид

$$h = r'\frac{\partial L}{\partial r'} - L$$

или

$$-\Big(\frac{a}{l}r + \lambda\Big)r^2 = h\sqrt{(1+a^2)(r')^2 + r^2}. \tag{2}$$

Таким образом, константа h и выражение $-\Big(\frac{a}{l}r + \lambda\Big)$ должны иметь один и тот же знак при всех $\psi \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\operatorname{sgn} h = -\operatorname{sgn}\Big(\frac{a}{l}r + \lambda\Big). \tag{3}$$

В этом предположении возведем равенство (2) в квадрат:

$$(1+a^2)(r')^2 + r^2 - \frac{1}{h^2}\Big(\frac{a}{l}r + \lambda\Big)^2 r^4 = 0,$$

и сделаем замену переменных $r \mapsto \rho$ по формуле

$$r = \frac{\lambda l}{a}\rho, \quad \rho = \rho(\psi). \tag{4}$$

Получим

$$(1+a^2)(\rho')^2 + \rho^2 - u^2(\rho+1)^2\rho^4 = 0, \tag{5}$$

где

$$u^2 = \frac{\lambda^4 l^2}{h^2 a^2}. \tag{6}$$

При этом условие (1) приобретает вид

$$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1+a^2)(\rho')^2 + \rho^2}\, d\psi = \frac{a}{|\lambda|}. \tag{7}$$

План дальнейших действий следующий. Подбором константы u^2 мы найдем 2π-периодическое решение $\rho(\psi)$ уравнения (5) и затем подберем $|\lambda|$ так, чтобы было выполнено (7). По причинам, которые станут ясны ниже, мы будем считать, что

$$\lambda < 0. \tag{8}$$

Затем известные u^2 и $|\lambda|$ мы подставим в формулу (6) и найдем константу h^2.

При этом решение ρ должно быть таким, чтобы выражение

$$\Big(\frac{a}{l}r + \lambda\Big) = \lambda(\rho+1)$$

было знакопостоянным при всех ψ. Если решение $\rho(\psi)$ обеспечивает знакопостоянство указанного выражения, то условие (3) можно удовлетворить выбором знака h.

Уравнение (5) допускает положение равновесия $\rho = 0$, которое, очевидно, не имеет физического смысла. Отметим еще, что решение уравнения (5) не может принимать значение -1, так как при $\rho = -1$ левая часть уравнения (5) оказывалась бы положительной.

С учетом этих наблюдений введем новую переменную $t = \psi/\sqrt{a^2+1}$ и перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{(\rho+1)^2\rho^4}\dot\rho^2 + \frac{1}{\rho^2(\rho+1)^2} = u^2, \quad \dot\rho = \frac{d\rho}{dt}. \tag{9}$$

Теперь мы ищем решение $\rho(t)$ уравнения (9) с периодом

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Уравнение (9) имеет вид интеграла энергии натуральной динамической системы с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{(\rho+1)^2\rho^4}\dot\rho^2$$

и потенциальной энергией

$$V(\rho) = \frac{1}{\rho^2(\rho+1)^2}.$$

Воспользуемся этим наблюдением для анализа системы (9).

Построив график потенциальной энергии V, легко убедиться, что в точке $C = (-1/2, 0)$ фазовой плоскости $(\rho, \dot\rho)$ имеется положение равновесия типа «центр», которое окружают периодические траектории, «зажатые» между вертикальными прямыми $\rho = -1$ и $\rho = 0$ (рис. 2). Траектории маркируются параметром u^2. В других областях фазового пространства периодических траекторий нет.

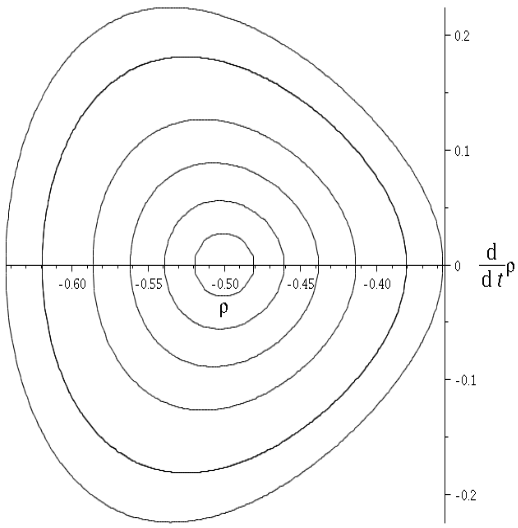

Рис. 2. Фазовый портрет системы (9)

Таким образом, все периодические кривые удовлетворяют условию

$$\rho(t) \in (-1, 0),$$

значит, функция $\rho + 1 > 0$. В силу формул (8) и (4) функция $r > 0$.

Положение равновесия C соответствует значениям $u = \pm 4$, и отвечает тривиальной ситуации, когда вся цепочка находится в горизонтальной плоскости и образует окружность.

Интегрируя уравнение (9), найдем период траектории $\rho(t)$ как функцию параметра u:

$$\tau(u) = -2\int\limits_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{u^2(\rho+1)^2\rho^2-1}}, \quad \rho_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{1-4/u}}{2}.$$

Функция $\tau(u)$ определена при $u > 4$. Можно показать, что функция τ непрерывна и является монотонно убывающей.

Таким образом, всякому корню u уравнения

$$\tau(u) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$$

отвечает решение уравнения (9) с искомым периодом. Это решение соответствует косому равновесию цепочки.

Доказательство теоремы завершается следующей леммой.

Лемма 1. *Верны формулы*

$$\lim_{u\to 4+} \tau(u) = \sqrt{2}\pi, \quad \lim_{u\to\infty} \tau(u) = \pi. \tag{10}$$

Действительно, дополнительное косое равновесие реализуется тогда и только тогда, когда

$$\pi < \frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}} < \sqrt{2}\pi$$

или

$$\pi/6 < \alpha < \pi/4.$$

Теорема доказана.

2.1. *Доказательство леммы*

Первую и наиболее простую из формул (10) мы проверим не совсем формально, основываясь на механических соображениях. Строгий вывод этой формулы можно провести методами, которые мы развиваем ниже при доказательстве второй формулы (10).

В окрестности точки C с точностью до квадратичных членов уравнение (9) имеет вид

$$\dot{\xi}^2 + 2\xi^2 = \text{const}, \quad \rho = -\frac{1}{2} + \xi.$$

Значит, период малых колебаний в окрестности положения равновесия равен $2\pi/\sqrt{2}$. Или

$$\lim_{u\to 4+} \tau(u) = \sqrt{2}\pi.$$

Проверим вторую формулу. Отметим, что

$$\tau(u) = -\frac{2}{u}\int\limits_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{(\rho-\rho_-)(\rho-\rho_+)(\rho-\tilde{\rho}_-)(\rho-\tilde{\rho}_+)}},$$

где

$$\tilde{\rho}_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{1+4/u}}{2}.$$

Вводя параметр $\epsilon = 1/u \to 0$ при $u \to \infty$, получим

$$\rho_+ = -\epsilon + O(\epsilon^2), \qquad \rho_- = -1 + \epsilon + O(\epsilon^2),$$
$$\tilde\rho_+ = \epsilon + O(\epsilon^2), \qquad \tilde\rho_- = -1 - \epsilon + O(\epsilon^2).$$

Причем при малых ϵ верны неравенства

$$\rho_+ < -\epsilon, \quad \rho_- > -1 + \epsilon.$$

Представим функцию τ в виде

$$\tau(u) = -2\epsilon\Big(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{(\rho-\rho_-)(\rho-\rho_+)(\rho-\tilde\rho_-)(\rho-\tilde\rho_+)}} + I\Big),$$

где

$$I = \int\limits_{\rho_-}^{-\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{(\rho-\rho_-)(\rho-\rho_+)(\rho-\tilde\rho_-)(\rho-\tilde\rho_+)}}.$$

В этом интеграле $\rho - \tilde\rho_- \ge c_1\epsilon$,

$$|\rho| \ge 1/2, \quad (\rho-\rho_+)(\rho-\tilde\rho_+) \ge c_2,$$

где положительные постоянные c_1, c_2 не зависят от ϵ.

Поэтому

$$|I| \le \frac{c_3}{\sqrt\epsilon}\int\limits_{\rho_-}^{-\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho-\rho_-}} \le \frac{c_4}{\sqrt\epsilon}.$$

Положительные константы c_3, c_4 не зависят от ϵ.

Таким образом,

$$\tau(u) = -2\epsilon\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{(\rho-\rho_-)(\rho-\rho_+)(\rho-\tilde\rho_-)(\rho-\tilde\rho_+)}} + O(\sqrt\epsilon). \tag{11}$$

Преобразуем интеграл в формуле (11) следующим образом:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{(\rho-\rho_-)(\rho-\rho_+)(\rho-\tilde\rho_-)(\rho-\tilde\rho_+)}} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{(1+O(\epsilon))\,d\rho}{\rho(\rho+1)\sqrt{(\rho-\rho_+)(\rho+\rho_+-\rho_+-\tilde\rho_+)}}.$$

Поскольку $-\rho_+ - \tilde\rho_+ = O(\epsilon^2)$, последний интеграл равен

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{(1+O(\epsilon))\,d\rho}{\rho(\rho+1)\sqrt{\rho^2-\rho_+^2}}.$$

Интеграл

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho(\rho+1)\sqrt{\rho^2-\rho_+^2}}$$

вычисляется явно, однако мы не будем приводить его первообразную в силу ее громоздкости, а выпишем только асимптотическую формулу

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho(\rho+1)\sqrt{\rho^2-\rho_+^2}} = -\frac{\pi}{2\epsilon} + O\Big(\ln\frac{1}{\epsilon}\Big).$$

Собирая все эти формулы, мы получаем $\tau(u) = \pi + O(\sqrt{\epsilon})$.

Лемма доказана.

Список литературы

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. Т. 2.

2. *Полак Л. С.* Уильям Гамильтон. М.: Наука, 1993.

Материал поступил в редколлегию 27.02.2017

Адрес автора

ЗУБЕЛЕВИЧ Олег Эдуардович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия

ozubel@yandex.ru