ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 6 (385)

УДК 517.929

Н.В. АЗБЕЛЕВ, В.В. МАЛЫГИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ [1)]

1. Введение

Предлагаемая работа посвящена вопросам устойчивости тривиального решения нелинейных скалярных уравнений с запаздыванием. В этой тематике чаще всего применяется аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, которое в большинстве известных нам работ предполагается автономным. Между тем, теорема Ляпунова справедлива в случае произвольного линейного приближения и, следовательно, новые результаты об асимптотических оценках функции Коши для линейных уравнений общего вида немедленно приводят к соответствующим результатам об устойчивости нелинейных уравнений.

В тех случаях, когда применение теоремы об устойчивости по линейному приближению встречает затруднения, оказывается возможным использовать линейные мажоранты (тоже не обязательно автономного типа) и, в частности, свойство положительности функции Коши этих мажорант.

Пусть $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\mathbb{R}_-=(-\infty,0)$, $\mathbb{R}=\mathbb{R}_+\cup\mathbb{R}_-$; $h\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ – измеримая по Лебегу функция, причем $h(t)\leqslant t$. Введем пространство C – непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_-$ функций с равномерной нормой, и пространство C_h – непрерывных на $[h(t),t]$ функций y с нормой $\|y\|_h = \max\limits_{s\in[h(t),t]}|y(s)|$. Обозначим $C_h(\beta)=\{y\in C_h\colon \|y\|_h<\beta\}$, $\beta>0$; $h_+(t)=\max\{0,h(t)\}$ $\forall t\in\mathbb{R}_+$.

На прямом произведении $\mathbb{R}_+\times C_h$ определим функционал F, удовлетворяющий условиям Каратеодори, и рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = F(t,x(\cdot)),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x(\xi)=\varphi(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}_-,\quad x(0)=\alpha. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) назовем функцию $x\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющую (1) почти всюду.

Будем считать, что уравнение (1) однозначно разрешимо на любом конечном отрезке $[0,T]$ при любых $\varphi\in C$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. Конкретные условия такой разрешимости можно найти в [1], [2].

Пусть $F(t,0)=0$; тогда при $\varphi=0$ и $\alpha=0$ уравнение (1) имеет *тривиальное решение* $x=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение $x=0$ уравнения (1) назовем устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $\|\varphi\|_C<\delta$, $|\alpha|<\delta$ имеем $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|<\varepsilon$; асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и найдется такое $b>0$, что из $\|\varphi\|_C<b$, $|\alpha|<b$ следует, что $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (93-011-1722).

2. Устойчивость по линейному приближению

Пусть функционал F имеет представление

$$F(t, x(\cdot)) = \int_0^t x(s)d_s r(t,s) + f(t, x(\cdot)),$$

где f: $\mathbb{R}_+ \times C_h \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям п. 1, функция $r(\cdot, s)$ измерима на $[s, \infty)$, а функция $\operatorname{var}_{s\in[0,t]} r(\cdot, s)$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0,T]$. Как известно [3], [4], в указанных предположениях линейное уравнение

$$\dot{x}(t) = \int_0^t x(s)d_s r(t,s) + f(t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с заданным начальным условием $x(0)=\alpha$ однозначно разрешимо при любой локально суммируемой функции f, и его решение имеет следующее элегантное представление [3]:

$$x(t) = C(t,0)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)ds, \quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Функцию $C(t,s)$ принято называть *функцией Коши* уравнения (2).

В работах [5]–[7] исследовались асимптотические свойства функции Коши уравнений вида (2) и были получены оценки скорости убывания $|C(t,s)|$ при $t\to\infty$.

Следующие два утверждения показывают, что эти результаты можно эффективно использовать при исследовании уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть при некоторых $\gamma>0$ и $N>0$ для функции Коши (2) справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \leqslant N\exp(-\gamma(t-s)), \quad t\geqslant s\geqslant 0. \tag{4}$$

Тогда, если $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(t-h(t)) = \omega < \infty$ *и*

$$\lim_{\|y\|_h\to 0}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\frac{|f(t,y(\cdot))|}{\|y\|_h} = 0, \tag{5}$$

то при достаточно малых $\|\varphi\|_C$ и $|\alpha|$ для решения уравнения (1) имеет место оценка $|x(t)| \leqslant K\exp(-\gamma t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $A = \int_0^\omega \operatorname{var}_{s\in[0,t]} r(t,s)dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $N\varepsilon e^{\gamma\omega} - \gamma < 0$. По данному ε в силу (5) найдется $\delta > 0$, для которого из $\|y\|_h < \delta$ следует $|f(t, y(\cdot))| < \varepsilon\|y\|_h$. Выберем α и φ такими, чтобы $Ne^{\gamma\omega}(|\alpha| + A\|\varphi\|_C) < \delta$, и покажем, что тогда для решения уравнения (1) справедлива оценка $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)| < \delta$.

Предположим, что это неравенство неверно. Тогда можно указать такое $T > 0$, что $|x(T)| = \delta$, а $|x(t)| < \delta$ при $t < T$. Рассмотрим уравнение (1) на отрезке $[0, T]$. Из (3), (4), (5) с учетом выбора δ получаем

$$|x(t)| \leqslant |C(t,0)||\alpha| + \int_0^t |C(t,s)||f(s,x(\cdot))|ds +$$

$$+ \|\varphi\|_C\int_0^\omega |C(t,s)| \operatorname{var}_{\tau\in[0,s]} r(s,\tau)ds + N\exp(-\gamma t)(|\alpha| + A\|\varphi\|_C) +$$

$$+ N\varepsilon\int_0^t \exp(-\gamma(t-s)) \sup_{\tau\in[h(s),s]} |x(\tau)|ds.$$

По лемме Гронуолла–Беллмана [8] при любом $t\in[0,T)$

$$|x(t)| \leqslant Ne^{\gamma\omega}(|\alpha|+A\|\varphi\|_C)\exp((-\gamma+\varepsilon Ne^{\gamma\omega})t). \tag{6}$$

В силу непрерывности x и выбора α, φ имеем $\delta=|x(T)|<\delta$, что невозможно. Таким образом, предположение о конечности T ведет к противоречию; следовательно, оценка (6) справедлива при всех $t\in\mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть для функции Коши уравнения* (2) *справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \leqslant N\exp\left\{-\gamma\int_s^t p(\tau)d\tau\right\}, \quad t\geqslant s\geqslant 0$$

($\gamma>0$, $N>0$, p – *неотрицательная локально суммируемая функция*). *Тогда, если*

$$\int_0^\infty p(t)dt = \infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_{h_+(t)}^t p(s)ds < \infty, \quad \lim_{\|y\|_h\to 0}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\frac{|f(t,y(\cdot))|}{p(t)\|y\|_h} = 0,$$

то для решения уравнения (1) *имеет место оценка*

$$|x(t)| \leqslant K\exp\left\{-\gamma\int_0^t p(s)ds\right\}, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Для доказательства достаточно произвести в уравнении (1) замену переменных [9]: $u=\psi(t)=\int_s^t p(s)ds$, $y(u)=x(\psi^{-1}(u))$ и воспользоваться теоремой 1.

3. Признаки устойчивости типа теорем J. Yorke

Подчиним функционал F следующему требованию [10], [11]: при некотором $\beta>0$

$$-a(t)M_t(y) \leqslant F(t,y) \leqslant a(t)M_t(-y) \quad (\forall y\in C_h(\beta)). \tag{7}$$

Здесь a – неотрицательная локально суммируемая функция,

$$M_t(y) = \max\left\{0, \sup_{s\in[h(t),t]} y(s)\right\}, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

ЛЕММА 1. *Пусть выполнено условие* (7). *Тогда для решения уравнения* (1) *имеет место оценка*:

$$|x(t)| \leqslant N\exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\}, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{8}$$

где $N=\max\{|\alpha|, \|\varphi\|_C\}$.

Доказательство проводится по схеме леммы 2.1 из [11] на основе неравенства Гронуолла–Беллмана [8].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\int_0^\infty a(t)dt<\infty$. *Тогда тривиальное решение уравнения* (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство следует из оценки (8).

ЛЕММА 2. *Пусть* $\int_0^\infty a(t)dt<\infty$. *Тогда для любых* $\varepsilon>0$, $\delta>0$ *найдется такое* $T>0$, *для которого из условий* $\|\varphi\|_C<\delta$, $|\alpha|<\delta$ *следует, что при всех* $t,s\geqslant T$ $|x(t)-x(s)|<\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (1) и неравенств (7) и (8) получаем

$$|\dot{x}(t)| \leqslant a(t)N\exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\} \leqslant a(t)K,$$

где $K=N\exp\left\{\int_0^\infty a(t)dt\right\}$. Отсюда следует, что при $t,s\geqslant T$

$$-K\int_T^\infty a(s)ds \leqslant x(t)-x(s) \leqslant K\int_T^\infty a(s)ds.$$

В силу суммируемости a интегралы в последнем неравенстве могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора T, что и доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\int_0^\infty a(t)dt < \infty$. *Тогда любое решение уравнения* (1) *имеет при* $t \to \infty$ *конечный предел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение вытекает из леммы 2 и полноты пространства $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{h_+(t)}^{t} a(s)ds \equiv p < 3/2. \tag{9}$$

Тогда для достаточно малых $|\alpha|$ *и* $\|\varphi\|_C$ *решение уравнения* (1) *имеет при* $t\to\infty$ *конечный предел.*

Если, кроме того, $a(t)>0$ *при всех* $t\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^\infty a(t)dt=\infty$, *и для любой последовательности* $\{t_m\}\to\infty$ *и произвольной последовательности* $\{y_m\}\in C_h$, *сходящейся к отличной от нуля постоянной функции, последовательность* $\{(a(t_m))^{-1}F(t_m, y_m)\}$ *не сходится к нулю, то нулевое решение уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве первой части теоремы выделим два случая.

1. $\int_0^\infty a(t)dt < \infty$. Требуемое утверждение содержится в теореме 3.

2. $\int_0^\infty a(t)dt = \infty$. Обозначим

$$a_1(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } a(t)>0, \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{1+t^2}, & \text{если } a(t)=0; \end{cases}$$

$$a_2(t) = a_1(t)-a(t), \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Так как $a_1(t)\geqslant a(t)$, то, если для функционала F выполнено условие (7) с функцией a, оно будет выполнено и с функцией a_1. В силу построения a_1 и определения a_2 имеем

$$\int_0^\infty a_2(t)dt \leqslant \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{1+t^2}dt = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{h_+(t)}^{t} a_1(s)ds \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{h_+(t)}^{t} a(s)ds + \int_0^\infty a_2(s)ds \leqslant p+\varepsilon.$$

Выбрав $\varepsilon>0$ достаточно малым, обеспечим выполнение неравенства $p+\varepsilon<3/2$. Таким образом, построенная нами функция a_1 обладает всеми свойствами функции a, отличаясь от нее лишь одним: для функции a_1 отображение $\psi(t)=\int_0^t a_1(s)ds$ строго монотонно.

Сделаем в уравнении (1) замену переменных (ср. [9])

$$u = \psi(t), \quad y(u) = x(\psi^{-1}(u)), \quad u\in\mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Функция ψ взаимно однозначно отображает отрезок $[h_+(t), t]$ на $[g_+(u), u]$, причем $g_+(u)=$ $=\psi(h_+(\psi^{-1}(u)))=u-v$, где $v = \int_{h_+(\psi^{-1}(u))}^{\psi^{-1}(u)} a(s)ds$. Заметим, что в силу леммы 1 поведение ре-

шения уравнения (1) на конечном интервале $[0,T]$ не влияет на его асимптотические свойства; поэтому, не нарушая общности, мы можем рассматривать решение только при $t\in[T,\infty)$. Выберем T таким, чтобы $0\leqslant v\leqslant p+\varepsilon$. Тогда заменой (10) уравнение (1) (при $t\geqslant T$) сводится к уравнению

$$y'(u) = F_1(u, y(\cdot)), \quad u\geqslant\psi(T), \tag{11}$$

где функционал $F_1(u, y(\cdot))=(a_1(\psi^{-1}(u)))^{-1}F(\psi^{-1}(u), x(\cdot))$ определен на множестве $\mathbb{R}_+\times C_g$ и в силу (7) и (9) удовлетворяет условиям теоремы 1 работы [10]; в ходе доказательства этой теоремы (с. 200) установлено, что решение y уравнения (11) имеет предел при $u\to\infty$. Так как из $t\to\infty$ следует, что $u\to\infty$, а $x(t)=y(\psi(t))$, то решение уравнения (1) также имеет предел на бесконечности.

Для доказательства второй части теоремы применим к уравнению (11) теорему 1 (ii) из [10]. Получим, что решение уравнения (11) асимптотически устойчиво, а значит, в силу (10) тривиальное решение уравнения (1) также асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $a(t)>0$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$ и*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_{h_+(t)}^{t} a(s)ds \leqslant 3/2. \tag{12}$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1) *устойчиво по Ляпунову.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция a суммируема на $\mathbb{R}_+$, то требуемое утверждение следует из теоремы 2. Пусть интеграл от a по $\mathbb{R}_+$ расходится. Делаем замену переменных (10), вновь приводим уравнение (1) к виду (11) и применяем теорему 1 (i) работы [10].

Конкретизируем теоремы 4 и 5 для уравнения вида

$$\dot{x}(t) = -a(t)f(x(h(t))), \quad t\in\mathbb{R}_+, \quad x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}_-; \quad x(0) = \alpha. \tag{13}$$

Здесь функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, a локально суммируема и положительна на $\mathbb{R}_+$, h измерима на $\mathbb{R}_+$ и $h(t)\leqslant t$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $xf(x)>0$ при любом $x\neq0$ и существует такое $\beta>0$, что $|f(x)|\leqslant|x|$ как только $|x|<\beta$.*

Тогда:

а) *если выполнено неравенство* (9), *то при достаточно малых $\|\varphi\|_C$ и $|\alpha|$ решение уравнения* (13) *имеет предел при $t\to\infty$; если, кроме того, $\int_0^\infty a(t)dt=\infty$, то нулевое решение уравнения* (13) *асимптотически устойчиво;*

б) *если выполнено неравенство* (12), *то нулевое решение уравнения* (13) *устойчиво по Ляпунову.*

4. Знакоопределенные решения

Будем предполагать, что $\varphi=0$. Тогда для уравнения (1) справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция $t-h(t)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, для функционала F выполнено условие* (5) *и, кроме того, при любых $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times C_h$ из неравенства $x(\cdot)>0$ ($x(\cdot)<0$) следует что $F(t, x(\cdot))\geqslant0$ ($F(t, x(\cdot))\leqslant0$).*

Тогда существует такое $\delta>0$, что при всех α: $0<|\alpha|<\delta$ решение уравнения (1) *с начальным условием $x(0)=\alpha$ сохраняет знак.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\omega=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(t-h(t))$ и рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{x}(t) = \varepsilon x(h_0(t)) = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{14}$$

где

$$h_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t\in[0,\omega], \\ t-\omega, & \text{если } t\in[\omega,\infty). \end{cases}$$

Пусть $0<\varepsilon\omega<e^{-1}$. Тогда функция Коши $C(t,s)$ уравнения (14) положительна [12]. По найденному ε найдем в силу (5) такое $\delta>0$, чтобы из $\|y\|_h<\delta$ следовало $|F(t,y(\cdot))|<\varepsilon\|y\|_h$.

Пусть теперь $0<\alpha<\delta$. Рассмотрим решение уравнения (1) с начальным условием $x(0)=\alpha$. Предположим, что это решение имеет нули на $\mathbb{R}_+$; обозначим его первый нуль через T. В силу (3) уравнение (1) можно переписать в виде

$$x(t) = C(t,0)\alpha + \int_0^t C(t,s)(\varepsilon x(h_0(s))-F(s,x(\cdot)))ds, \quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Так как $x(t)>0$ при $t\in[0,T)$, то $F(t,x(\cdot))\geqslant 0$ и $\dot{x}(t)\leqslant 0$. Но тогда в силу выбора δ имеем $F(s,x(\cdot))<\varepsilon \sup\limits_{\tau\in[h_0(s),s]}|x(\tau)|=\varepsilon x(h_0(s))$. Подставив в равенство (15) $t=T$, получим противоречие: $0=x(T)>0$. Следовательно, $x(t)>0$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$. Случай $\alpha<0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование $\varphi=0$ существенно, как показывает следующий пример:

$$\dot{x}(t) = -x^3(t-2\pi), \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$x(\xi) = \delta\sin\xi, \text{ при } \xi\in[-2\pi,0].$$

Интегрируя уравнение на $[0,2\pi]$, получим, что $x(2\pi)=0$ при любом δ.

Из теоремы 6 вытекает еще один признак асимптотической устойчивости уравнения (13).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть в уравнении* (13) $\varphi=0$, $f(0)=f'(0)=0$, $xf(x)>0$ *при всех* $x\neq 0$.

Тогда, если $\int_0^\infty a(t)dt=\infty$ *и* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}\int\limits_{h_+(t)}^{t} a(s)ds<\infty$, *то нулевое решение уравнения* (13) *асимптотически устойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для определенности $x(0)=\alpha>0$. Заменой переменных (10) сведем (13) к уравнению

$$y'(u) = -f(y(g(u))), \quad u\in\mathbb{R}_+,$$

$$y(\xi) = 0, \quad \xi\in\mathbb{R}_-; \quad y(0) = \alpha; \quad \text{при этом} \quad g_+(u) = \int_0^{h_+(\psi^{-1}(u))} a(s)ds.$$

По теореме 6 для достаточно малых α $y(u)>0$ при всех $u\in\mathbb{R}_+$. Следовательно, $y'(u)<0$ и при $u\to+\infty$ функция y имеет конечный предел y_0. Но тогда $\lim\limits_{u\to\infty} f(y(g(u)))=f(y_0)=0$, а значит, $y_0=0$. Так как u и t стремятся к бесконечности одновременно, то утверждение доказано.

5. Примеры

Покажем, как полученные результаты можно применить к исследованию прикладных задач.

А. *Уравнение Хатчинсона–Райта.* Известно, что природные популяции не могут мгновенно реагировать на внешние воздействия: реакция наступает лишь через некоторый промежуток времени. Одна из первых математических моделей в биологии, учитывающая временные запаздывания, была предложена Хатчинсоном в [13]. В эквивалентной форме это же уравнение изучал Райт [14] в связи с распределением простых чисел:

$$\dot{x}(t) = -px(t-1)(1+x(t)), \quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{16}$$

Так как уравнение (16) автономно, то исследование его линейного приближения легко проводится методом квазиполиномов [8]. Однако в последнее время появились работы, в которых уравнение Хатчинсона–Райта встречается в обобщенной форме – с параметрами p и h, зависящими от времени [15]:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = -p(t)x(h(t))(1+x(t)), \quad t\in\mathbb{R}, \\ x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при } \xi\leqslant 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Проведем анализ уравнения (17) на основе полученных нами теорем.

Из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть* $\int_0^\infty |p(t)|\,dt < \infty$. *Тогда любое решение уравнения (17) имеет при* $t\to\infty$ *конечный предел.*

Из следствия 1 и результатов работы [5] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть* $p(t)\geqslant 0$ *и* $\int_0^\infty p(t)dt = \infty$.

Тогда, если выполнено хотя бы одно из условий

а) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \int\limits_{h_+(t)}^{t} p(s)ds < 3/2$, б) $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{h_+(t)}^{t} p(s)ds < \pi/2$,

то нулевое решение уравнения (17) асимптотически устойчиво.

Б. *Уравнение Мэкки–Гласса.* Другой интересный пример уравнения с запаздыванием встречается при изучении процесса кроветворения. Эта модель была предложена Мэкки и Глассом в [16]:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = -ax(t) + \frac{\beta\theta^n x(t-\tau(t))}{\theta^n + x^n(t-\tau(t))}, \quad t\in\mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}_-; \quad x(0) = \alpha.\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь a, β, θ, n – положительные постоянные, τ – измеримая неотрицательная ограниченная функция. Уравнение (18) рассматривается в окрестности стационарного решения $x_0=\theta\left(\frac{\beta-a}{a}\right)^{1/n}$. Заменой переменных $y=x-x_0$ (18) сводится к уравнению

$$\dot{y}(t) = -ay(t) - by(t-\tau(t)) + f(y(t-\tau(t))), \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

для которого исследуется устойчивость тривиального решения. Здесь $b = \beta(n(1-a/\beta)-1)$, функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f(0)=f'(0)=0$. Используя результат работы [7], получаем в силу теоремы 1

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть* $a>0$, $b>0$ *и* $b^2/a^2-(b/a)(1+b/a)\exp(-a/b\exp(-a\omega)) > -1$, *где* $\omega = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}\tau(t)$. *Тогда для решения уравнения (18) при достаточно малых* $\|\varphi-x_0\|_C$ *и* $|\alpha-x_0|$ *справедлива оценка*

$$|x(t)-x_0| \leqslant N\exp(-\gamma t) \quad (t\in\mathbb{R}_+,\ \gamma>0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.

2. Гусаренко С.А., Жуковский Е.С., Максимов В.П. *К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами* // ДАН СССР. – 1986. – Т.287. – № 2. – С.268–272.

3. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решения линейного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9. – № 6. – С.1026–1036.

4. Максимов В.П. *Линейное функционально-дифференциальное уравнение* //Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Казан. гос. ун-т. – Казань, 1974.

5. Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т.28. – № 10. – С.1716–1723.

6. Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С.46–53.

7. Малыгина В.В. *Об асимптотическом поведении решения одного класса скалярных уравнений с последействием* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 12. – С.80–82.

8. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

9. Ladas G., Sficas Y.G., Stavroulakis I.P. *Asymptotic behavior of solutions of retarded differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V.88. – № 2. – P.247–253.

10. Yorke J.A. *Asymptotic stability for one-dimensional differential-delay equations* // J. Different. Equat. – 1970. – V.7. – № 1. – P.189–202.

11. Yoneyama T. *On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations* // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – V.125. – № 1. – P.161–173.

12. Гусаренко С.А., Домошницкий А.И. *Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т.25. – № 12. – С.2090–2103.

13. Hutchinson G.E. *Circular causal systems in ecology* // Ann. N.Y. Acad. Sci. – 1948. – № 50. – P.221–246.

14. Wright E.M. *A nonlinear difference-differential equation* // J. reine und angew. Math. – 1955. – Bd. 194. – S.66–87.

15. Sugie J. *On the stability for a population growth equation with time delay* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser.A. – 1992. – № 120. – P.179–184.

16. Mackey M., Glass L. *Oscilation and chaos in physiological control systems* // Science. – 1977. – № 197. – P.537–541.

г.Пермь

Поступила
25.04.1994