С. П. Струнков, О разложении регулярного представления конечной группы с двумя образующими, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 149–151 оказываются антимероморфными в окрестности M_1. В противном случае удалось понизить число старших членов. Таким образом, через конечное число шагов оказывается, что f_{m+1} алгебраично над $O(M_1)[f_{m+2}, \ldots, f_N]$, что противоречит максимальности m.

Автор благодарит Пинчука С. И. за внимание к работе.

Башкирский государственный университет

Поступило 10.06.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bedford E., Bell S. // Manuscripta Math. 1985. V. 50. P. 1—10.
2. Пинчук С. И. Аналитическое продолжение голоморфных отображений и задачи голоморфной классификации многомерных областей: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Челябинск, 1979.

О РАЗЛОЖЕНИИ РЕГУЛЯРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

С. П. Струнков

Понятие образующих — одно из старейших в теории групп, но в то же время часто естественные вопросы, связанные с этим понятием, оказываются в числе самых трудных. Основная причина этого заключается в том, что сам по себе один факт, что данная группа порождена n или даже двумя образующими, имеет мало следствий (для неабелевых групп).

В настоящей работе получена некоторая информация о строении обыкновенного регулярного представления R конечной группы G, порожденной двумя образующими, порядки которых больше двух. Можно получить аналогичные результаты и для групп более чем с двумя образующими, но соответствующие соотношения для них менее обозримы, чем для рассматриваемых здесь групп.

ТЕОРЕМА. *Если конечная группа* $G = \langle a, b\rangle$, *причем* $|a| > 2$, $|b| > 2$, *то* $R + 1_G + 1_G = 1^G_{\langle a\rangle} + 1^G_{\langle b\rangle} + 1^G_{\langle ab\rangle} + T$, *где* T — *некоторое представление* G (T *может отсутствовать*).

Доказательство. Вначале пусть $|ab| > 2$, $a \neq b$, $a \neq b^{-1}$. Введем на G структуру замкнутой поверхности. Для этого будем считать элементы группы G основными вершинами (или нульмерными симплексами). Соединим вершины g_i и g_j группы G ребром, если $g_i^{-1}g_j = a, b, ab, a^{-1}, b^{-1}$ или $(ab)^{-1}$. Для каждого $g \in G$ объявим следующие множества элементов группы G многоугольниками:

$$M_a(g) = \{g, ga, ga^2, \ldots, ga^{|a|-1}\},$$

$$M_b(g) = \{g, gb, gb^2, \ldots, gb^{|b|-1}\},$$

$$M_{ab}(g) = \{g, gab, g(ab)^2, \ldots, g(ab)^{|ab|-1}\},$$

$$M_3(g) = \{g, ga, gab\}.$$

Многоугольники первых трех типов мы будем называть монохромными, имеющими вместе со своими ребрами окраску соответственно a, b и ab.

Заметим, что к любому ребру примыкают в точности два многоугольника. Действительно, к ребру (g_i, g_j) при $g_i^{-1}g_j = a$ примыкают только $M_a(g_i)$ и $M_3(g_i)$, ребро (g_i, g_j) при $g_i^{-1}g_j = b$ имеют своей стороной только многоугольники $M_b(g_i)$ и $M_3(g_i a^{-1})$. Все другие случаи рассматриваются аналогично. Таким образом, построенная система многоугольников представляет собой двумерную замкнутую поверхность S (см. [I, § 37]). Эта поверхность является ориентируемой, во всех многоугольниках $M_a(g)$, $M_b(g)$ и $M_{ab}(g)$ в каждом ребре (g_i, g_j) при $g_j^{-1}g_j = a$, b или ab будем считать g_i начальной точкой, а g_j — конечной, в многоугольниках же $M_3(g)$ эти ребра следует ориентировать противоположно. Кроме того, так как $G = \langle a, b\rangle$, то любые две вершины $g_1, g_2 \in G$ можно соединить путем, состоящим из ребер, следовательно, наша поверхность S связна.

Пусть x — произвольный элемент группы G, а φ_x — левый сдвиг G, осуществляемый элементом x, т. е. $\varphi_x(g) = xg$ для любого $g \in G$. Тогда для $c = a$, b, ab или 3 имеем $\varphi_x M_c(g) = M_c(xg)$. Отображение φ_x сохраняет также отношение смежности многоугольников. Так, если многоугольники $M_{c_1}(g_1)$ и $M_{c_2}(g_2)$ имеют общее ребро (g_i, g_j), то многоугольники $\varphi_x M_{c_1}(g_1)$, $\varphi_x M_{c_2}(g_2)$ имеют общее ребро (xg_i, xg_j) той же окраски, что и ребро (g_i, g_j). Следовательно, каждое отображение φ_x продолжается до непрерывного отображения поверхности S, ассоциированной с построенной системой многоугольников. Это отображение индуцирует соответствующее отображение $\widetilde{\varphi}^{(1)}$ на первой группе гомологий $H_1(S)$, которую мы будем рассматривать, например, над полем рациональных чисел Q. Нас будет интересовать след отображения $\widetilde{\varphi}^{(1)}$.

Для вычисления $\widetilde{\varphi}^{(1)}$ триангулируем каждый многоугольник (за исключением многоугольников $M_3(g)$) добавлением к нему центра и ребер, соединяющих этот центр с основными вершинами. В результате получим симплициальный комплекс A, вершинами (т. е. нульмерными симплексами) которого будут элементы группы G и добавленные центры многоугольников. Продолжим наше отображение φ_x естественным образом до симплициального отображения всего комплекса A. Триангуляция сохраняет группы гомологий и отображение $\widetilde{\varphi}_x^{(1)}$, поэтому наши вычисления $\widetilde{\varphi}_x^{(1)}$ мы будем проводить для комплекса A.

Так как монохромные многоугольники являются левыми смежными классами по подгруппам $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle ab\rangle$, то они не пересекаются, следовательно, их общее число равно $|G|/|a| + |G|/|b| + |G|/|ab|$. Пусть A_0, A_1, A_2 — линейные пространства над Q, натянутые на нульмерные, одномерные и двумерные симплексы A (т. е. на все вершины, ребра и треугольники A). Рассмотрим отображение φ_x отдельно на A_0, A_1 и A_2. На элементах группы G отображение φ_x действует регулярно, на центрах монохромных многоугольников так же, как на сами многоугольники $M_a(g)$, $M_b(g)$, $M_{ab}(g)$. Но так как эти многоугольники представляют собой левые смежные классы по подгруппам $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle ab\rangle$ соответственно, то действие на них левых сдвигов φ_x эквивалентно сумме представлений $1^G_{\langle a\rangle}, 1^G_{\langle b\rangle}, 1^G_{\langle ab\rangle}$. Таким образом, на A_0 представление φ группы G (мы будем обозначать его $\varphi^{(0)}$) эквивалентно представлению $R + 1^G_{\langle a\rangle} + 1^G_{\langle b\rangle} + 1^G_{\langle ab\rangle}$. На одномерных симплексах, т. е. на ребрах, как легко видеть, группа G действует без неподвижных точек. Число всех ребер равно $6|G|$ (число ребер, соединяющих элементы группы G, равно $6|G|/2$, число ребер, появившихся после триангуляции, равно $(|G|/|a|)|a| + (|G|/|b|)|b| + (|G|/|ab)|ab|)$. Следовательно, действие $\varphi^{(1)}$ отображения φ на A_1 эквивалентно сумме шести экземпляров представления R. И наконец, действия φ_x при $x \neq 1$ и на треугольниках $M_3(g)$, и треугольниках, на которые разбиты все многоугольники $M_a(g)$, $M_b(g)$ и $M_{ab}(g)$, также не содержат неподвижных точек. Число всех треугольников равно $4|G|$, действие $\varphi^{(2)}$ группы G на A_2 (т. е. ограничение φ на A_2) эквивалентно сумме четырех экземпляров представления R. По формуле Хопфа [1, § 79] имеем $\operatorname{tr}\varphi^{(0)} - \operatorname{tr}\varphi^{(1)} + \operatorname{tr}\varphi^{(2)} = 1 - \operatorname{tr}\widetilde{\varphi}^{(1)} + 1$ (наличие двух единиц в правой части вытекает из связности и ориентируемости поверхности S). Переходя к представлениям, из формулы Хопфа получаем искомое равенство $R + 1_G + 1_G = 1^G_{\langle a\rangle} + 1^G_{\langle b\rangle} + 1^G_{\langle ab\rangle} + \widetilde{\varphi}^{(1)}$.

При $|ab| = 2$ в случае $a \neq b$, $a \neq b^{-1}$ ребрами мы будем соединять такие элементы g_i, $g_j \in G$, для которых $g_i^{-1}g_j = a$, b, a^{-1} или b^{-1}, и объявим многоугольниками, соприкасающимися в точке $g \in G$, следующие множества элементов: $M_a(g)$, $M_b(g)$, как и для случая $|ab| > 2$, а также четырехугольники

$$M_{ab}(g) = \{g, ga, gab, gaba\},$$

$$M_{ba}(g) = \{g, gb, gba, gbab\}.$$

Триангуляцию всех многоугольников (в том числе $M_{ab}(g)$ и $M_{ba}(g)$) мы проводим, как и выше. Число всех четырехугольников $M_{ab}(g)$ и $M_{ba}(g)$ равно $2|G|/4 = |G|/|ab|$, G действует на них транзитивно, как на левых смежных классах по подгруппе $\langle ab\rangle$. Это вытекает из того, что каждый из этих четырехугольников содержит левый смежный класс группы G по подгруппе $\langle ab\rangle$, причем разные четырехугольники содержат и разные классы. Следовательно, $\varphi^{(0)} = R + 1^G_{\langle a\rangle} + 1^G_{\langle b\rangle} + 1^G_{\langle ab\rangle}$. Число ребер равно $6|G|$ и представление $\varphi^{(1)}$ есть сумма шести экземпляров представления R. Число двумерных симплексов равно $|a|(|G|/|a|) + |b|(|G|/|b|) + 4(|G|/|ab|) = 4|G|$ и отображение φ_x при $x \neq 1$ не имеет на них неподвижных точек, т. е. $\varphi^{(2)} = R + R + R + R$. Подставляя значения $\varphi^{(i)}$ в формулу Хопфа, снова получаем равенство $R + 1_G + 1_G = 1^G_{\langle a\rangle} + 1^G_{\langle b\rangle} + 1^G_{\langle ab\rangle} + \tilde{\varphi}^{(1)}$.

При подсчете числа ребер мы пользовались тем, что $a \neq b$, $a \neq b^{-1}$. Если $a = b$ или $a = b^{-1}$, то G — циклическая группа и наше утверждение для регулярного представления выполняется также. Теорема тем самым полностью доказана.

Следствие. *Пусть конечная группа $G = \langle a, b\rangle$, причем $|a| > 2$, $|b| > 2$, F — ее произвольное абсолютно неприводимое нееединичное обыкновенное представление. Обозначим через k_x кратность вхождения F в представление $1^G_{\langle x\rangle}$. Тогда $k_a + k_b + k_{ab} \leqslant n$, где n — степень представления F.*

Замечание. Легко показать, что при $|a| = 3$, $|b| = 3$, $|ab| = 2$ порядок группы G равен 12, а при $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|ab| = 2$ он равен 60. В обоих этих случаях $H_1(S) = 0$ и, следовательно, представление T в формуле разложения регулярного представления отсутствует.

Московский
инженерно-физический институт

Поступило
18.03.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.; Л.: ГОНТИ, 1938.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

М. Х. Халлаев

Пусть функции $\psi_1(\tau, \eta)$ и $\psi_2(\tau, \eta)$ определены на всей плоскости (τ, η), дифференцируемы по первому аргументу и непрерывно дифференцируемы по второму. Положим $\rho(\tau, \eta) = \frac{1}{2}[\psi_2(\tau, \eta) - \psi_1(\tau, \eta)]$ и обозначим через $K(\eta)$ кривизну линии $z = \psi_2(\tau, \eta)$, $\tau = \text{const}$. Пусть выполнены следующие условия:

1) $0 < \rho(\tau, \eta) < h$, $h = \text{const}$;
2) $\rho(-\tau, \eta) = \rho(\tau, \eta)$;