СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII, № 5 Сентябрь — Октябрь 1967 г.

УДК.517.11

Ю. Л. ЕРШОВ

НУМЕРАЦИИ СЕМЕЙСТВ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть A — семейство одноместных общерекурсивных функций (ОРФ). Нумерацией семейства A назовем отображение F натурального ряда $N = \{0, 1, \ldots\}$ на A. Нумерация F — вычислима, если двуместная функция $F(n, x) \overset{df}{=} F(n)(x)$ $(F(n) \in A)$ есть ОРФ. Функция, построенная по нумерации, является универсальной функцией для семейства A. И наоборот, всякая универсальная функция семейства определяет некоторую нумерацию. Таким образом, между нумерациями и универсальными функциями семейства существует взаимнооднозначное соответствие, так что нумерацию и соответствующую универсальную функцию мы всегда будем обозначать одной и той же буквой. В дальнейшем, чаще всего без явных указаний, мы будем иметь дело только с вычислимыми нумерациями семейств.

Если имеются две нумерации $F: N \to A$ и $G: N \to A$ семейства A, то будем говорить, что F сводима к G, если существует одноместная ОРФ h такая, что $\forall n \in N \ (F(n) = G(h(n)))$. Отношение сводимости рефлексивно и транзитивно. Стандартным образом на множестве всех вычислимых нумераций семейства A можно определить отношение эквивалентности (сводимость друг к другу) так, что сводимость определяет отношение частичного порядка на классах эквивалентных нумераций. Класс эквивалентных нумераций, содержащий F, будем обозначать $[F]$. Частично упорядоченное множество всех классов эквивалентных нумераций семейства A будем обозначать L_A.

Основная цель статьи — изучение множества L_A для различных семейств A.

Универсальную функцию (или нумерацию) семейства можно рассматривать как некий способ вычисления этого семейства. Отношение сводимости позволяет сравнивать различные способы вычисления. Поэтому элемент $[F] \in L_A$ можно интерпретировать, например, как сложность способа вычисления F. Для определения сложности (сложностей) можно было бы ввести более тонкие структуры, например, определяя сводимость с помощью более «простых» функций, точнее потребовав, чтобы h (смотри определение сводимости) было из некоторого подкласса H класса всех ОРФ, замкнутого относительно суперпозиции.

Для некоторых семейств одноместных ОРФ A множество L_A пусто. Пример — семейство всех одноместных ОРФ. Если $L_A \neq \Lambda$, то будем говорить, что A — вычислимое семейство. В дальнейшем мы будем иметь дело, без явных указаний на это, только с вычислимыми семействами. Случай, когда A конечно, тривиален, поэтому будем предполагать также, что A — бесконечно.

2. Укажем сейчас несколько простых свойств нумераций, вычислимых семейств и L_A.

а) L_A — верхняя полуструктура, т. е. для любых элементов $[F], [G] \in L_A$ существует наименьшая верхняя грань. Таковой является $[H]$, где

$$H(n) = \begin{cases} F(k), & \text{если } n = 2k, \\ G(k), & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Будем говорить, что нумерация $F : N \to A$ однозначна, если $F(n) \neq F(m)$, для $n \neq m$.

б) Если F — однозначная нумерация A, то $[F]$ — минимальный элемент L_A.

Действительно, это утверждение равносильно следующему: если нумерация $G : N \to A$ сводится к однозначной нумерации $F : N \to A$, то F также сводится к G.

Пусть h — одноместная ОРФ такая, что $\forall n \in N \ (G(n) = F(h(n)))$, тогда $h^{-1}(t) = \mu n(h(n) = t)$ есть ОРФ и сводит F к G.

в) Для всякой нумерации $F : N \to A$ семейства A существует однозначная нумерация $G : N \to A$, сводимая к F.

Доказательство смотри ниже (как в ([3]), где оно проведено для случая, когда A — множество всех одноместных примитивно-рекурсивных функций).

г) $\alpha \in L_A$ — минимальный элемент тогда и только тогда, когда $\alpha = [F]$, где F — однозначная нумерация.

Следует из б) и в).

д) Если f — произвольная одноместная ОРФ, A — вычислимое семейство, то $A \cup \{f\}$ и $A \setminus \{f\}$ — вычислимые семейства. Если B — вычислимое семейство, то $A \cup B$ — вычислимое семейство.

Это следует из существования однозначных нумераций вычислимых семейств b).

е) Если A и B — вычислимые семейства и $A \cap B = \Lambda$, то L_A изоморфно вкладывается в $L_{A \cup B}$ с сохранением верхней грани и минимальных элементов.

Доказательство. Пусть F — фиксированная однозначная нумерация B. Произвольной нумерации $G : N \to A$ поставим в соответствие нумерацию $G' : N \to A \cup B$, определенную так:

$$G'(n) = \begin{cases} F(k), & \text{если } n = 2k, \\ G(k), & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что соответствие $G \to G'$ индуцирует нужное вложение $i : L_A \to L_{A \cup B}$.

Аналогично можно определить вложение $j : L_B \to L_{A \cup B}$. Пересечение образов $i(L_A)$ и $j(L_B)$ содержит только один элемент и этот элемент является минимальным. Кроме того, любые два элемента $\alpha_1, \alpha_2 \notin i(L_A) \cap \cap j(L_B)$, $\alpha_1 \in i(L_A)$, $\alpha_2 \in j(L_B)$ не сравнимы в $L_{A \cup B}$.

Определим еще ряд необходимых для дальнейшего понятий.

Под графиком Γ мы, как обычно, понимаем произвольное множество упорядоченных пар натуральных чисел такое, что выполнено условие: если (i, j), $(k, l) \in \Gamma$ и $i = k$, то $j = l$.

График Γ_f функции f это множество $\{(i, f(i)) \mid, i$ — принадлежит области определения функции $f\}$. Для ОРФ f, $\Gamma_{f,n} = \{(i, f(i)) \mid i \leqslant n\}$. Для произвольного графика Γ, $[\Gamma]$ — наибольший подграфик (т. е. $[\Gamma] \subseteq \Gamma$) такой, что из $(i, j) \in [\Gamma]$ и $k < i$ следует, что $(k, l) \in [\Gamma]$ для некоторого l. Будем писать $\Gamma_1 \asymp \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 графики тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — график; в противном случае будем писать $\Gamma_1 \not\asymp \Gamma_2$. Другими словами, $\Gamma_1 \not\asymp \Gamma_2$ означает, что

$$\exists i, j, k[(i, j) \in \Gamma_1 \& (i, k) \in \Gamma_2 \& j \neq k].$$

Используя приведенное обозначение, приведем формальное построение G для в).

Построим ОРФ h и h' так:

$$h'(n) = \mu t\, [\exists i_0 < \ldots < i_{n+1} \leqslant t \mathop{\&}_{\substack{j \neq k \\ \leqslant n+1}} \Gamma_{F(i_j), t} \not\asymp \Gamma_{F(i_k), t}],$$

$$h(0) = 0, \quad h(n+1) = \mu t\, [\mathop{\&}_{i=0}^{n} \Gamma_{F(t), h'(n+1)} \not\asymp \Gamma_{F(h(i)), h'(n+1)}].$$

Нужная нумерация: $G(n) \stackrel{df}{=} F(h(n))$.

Множество всех конечных графиков (как и множество всех конечных кортежей) можно занумеровать естественным образом (ср. ([2])). Это позволяет нам говорить в дальнейшем о рекурсивно перечислимых множествах конечных графиков и о частично-рекурсивных функциях, аргументами которых являются конечные графики (и кортежи).

Будем говорит, что два семейства A и B эффективно отделимы, если существуют два рекурсивно-перечислимых множества V_1 и V_2 конечных графиков таких, что выполнено условие:

$$\forall f \in A \exists \Gamma \in V_1 (\Gamma \subset \Gamma_f) \& \forall f \in B \exists \Gamma \in V_2 (\Gamma \subset \Gamma_f) \&$$
$$\& \forall \Gamma \in V_2 \forall f \in A (\Gamma \not\subset \Gamma_f) \& \forall \Gamma \in V_1 \forall f \in B (\Gamma \not\subset \Gamma_f).$$

ж) Если A и B вычислимые, эффективно отделимые семейства, то $L_{A \cup B} \cong L_A \times L_B$.

Пусть $F: N \to A \cup B$ — произвольная нумерация. Определим функцию X_F так:

$$X_F(n) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \Gamma \in V_1 \text{ такой, что } \Gamma \subset \Gamma_{F(n)}, \\ 0, & \text{если существует } \Gamma \in V_2 \text{ такой, что } \Gamma \subset \Gamma_{F(n)}. \end{cases}$$

Функция X_F — общерекурсивна и является характеристической функцией некоторого множества R. Пусть f_1 осуществляет прямой пересчет R, а f_2 — прямой пересчет $N \setminus R$, тогда $F_1(n) \stackrel{df}{=} F(f_1(n))$ и $F_2(n) \stackrel{df}{=} F(f_2(n))$ являются нумерациями A и B, соответственно. Несложно проверить, что соответствие $F \to (F_1, F_2)$ индуцирует изоморфизм $L_{A \cup B}$ на $L_A \times L_B$.

Замечание. Утверждение ж) справедливо и в случае, когда A или B конечно.

Любое семейство A можно рассматривать как подмножество бэровского пространства. Условие эффективной отделимости одноэлементного семейства $\{f\}$ и семейства A, равносильно тому, что f не принадлежит A и не является для A предельной точкой. Итак, если $f \notin A$ и не является для A предельной точкой, то $L_{A \cup \{f\}} \cong L_A$.

Если f предельная точка для A, то указанный изоморфизм может не выполняться.

3. Определим еще несколько необходимых понятий.

Пусть f и g — частично-рекурсивные одноместные функции. Будем говорить, что f сводится к g, если существует ОРФ h такая, что $f = g * h$ ($*$ — суперпозиция). С помощью отношения сводимости определим на множестве всех одноместных (не пустых) частично-рекурсивных функций отношение эквивалентности и на множестве классов эквивалентных функций отношение частичного порядка. Полученное таким образом частично-упорядоченное множество обозначим $L_{\text{чр}}$. Эквивалентные функции, очевидно, имеют одинаковую область значений. Для фиксированного рекурсивно-перечислимого множества R обозначим через L_R подмножество $L_{\text{чр}}$, состоящее из всех классов эквивалентных функций, имеющих R в качестве области значения. Легко заметить, что если R_1 и R_2 имеют одинаковую мощность, то L_{R_1} и L_{R_2} изоморфны как частично-упорядоченные множества. Для $R = \{0\}$, $\{0, 1\}$, $\ldots$, $\{0, \ldots, n-1\}$, $\ldots$, N — соответствующие множества L_R будем обозначать так: L_1, L_2, $\ldots$, L_n, $\ldots$, L_ω. Укажем некоторые простые свойства введенных множеств.

а) $L_{\text{чр}}$ и L_R являются верхними полуструктурами и верхняя грань элементов $\alpha, \beta \in L_R$ в L_R совпадает с таковой в $L_{\text{чр}}$.

б) L_R имеет наименьший элемент α_R, состоящий из всех ОРФ, имеющих R областью значения.

Пусть f — ОРФ, а g — частично-рекурсивная функция, имеющая R областью значения. Пусть h_1 — ОРФ, перечисляющая область определения g. Положим, $h_2(x) = \mu t(g(h_1(t)) = f(x))$. h_2 — ОРФ. Функция $h = h_2 * h_1$ сводит f к g.

в) $L_R \setminus \alpha_R = L_R'$ также имеет наименьший элемент, состоящий из всех частично-рекурсивных, не ОРФ с рекурсивной областью определения, имеющих R областью значения.

г) Наименьший элемент L_R является минимальным элементом в $L_{\text{чр}}$.

д) L_1' изоморфно как упорядоченное множество верхней полуструктуре классов эквивалентных не пустых рекурсивно-перечислимых множеств относительно m-сводимости. Аналогично, $L_2', \ldots, L_n', \ldots$ изоморфны верхней полуструктуре классов эквивалентных двоек, $\ldots$, n-ок, $\ldots$ не пустых, не пересекающихся рекурсивно-перечислимых множеств относительно m-сводимости. L_ω' допускает такую же интерпретацию с помощью последовательностей непустых рекурсивно-перечислимых множеств, как это делается в ([1]).

е) $L_1', L_2', \ldots, L_\omega'$ имеют наибольший элемент.

Это следует из д) (смотри [1]).

ж) L_1 — ретракт множества $L_{\text{чр}}$, т. е. существует гомоморфизм $\varepsilon_0 : L \to L_1$, тождественный на L_1. Кроме того, $\varepsilon_0(L_\omega) = L_1$ и $\varepsilon_0(L_n) = L_1$ для всех n.

Пусть o — одноместная функция, тождественно равная нулю, тогда соответствие $f \to o * f$ индуцирует на $L_{\text{чр}}$ необходимый ретракт.

Обозначим через L_0 достаточно хорошо изученную верхнюю полуструктуру степеней неразрешимости рекурсивно-перечислимых множеств [4]. Существует эпиморфизм $\varepsilon_1 : L_1' \to L_0$.

з) $L_1', L_2', \ldots, L_n', \ldots, L_\omega'$ бесконечны, в каждой из этих полуструктур имеются не сравнимые элементы.

Достаточно доказать з) для L_1'. Но для L_1' это хорошо известно, что следует, например, из существования эпиморфизма ε_1 и справедливости соответствующих утверждений для L_0, но утверждения об L_1' намного проще, чем соответствующие факты об L_0.

4. Перейдем теперь к исследованию L_A.

Теорема 1. *Если семейство A содержит по крайней мере одну предельную точку, другими словами, если выполнено следующее условие*:

$$\exists f_0 \in A \forall n \in N \exists g \in A\, [f_0 \neq g \,\&\, \Gamma_{f_0, n} = \Gamma_{g, n}], \tag{$*$}$$

то L_A бесконечна и содержит не сравнимые элементы.

Доказательство. Пусть $f_0 \in A$ — предельная точка, а $F : N \to A \setminus \{f_0\}$ — однозначная нумерация семейства $A \setminus \{f_0\}$. Произвольной нумерации G семейства A поставим в соответствие функцию S_G:

$$S_G(n) = \begin{cases} m, \text{ если } F(m) = G(n), \\ \text{не определена, если } G(n) = f_0. \end{cases}$$

Обозначим через S множество всех тех G, для которых S_G — частично-рекурсивна. Заметим, что если $G_1 \in S$ и G_2 — нумерация A, сводящаяся с помощью h к G_1, то $G_2 \in S$, так как $S_{G_2} = S_{G_1} * h$.

Если S_{G_1} и S_{G_2} соответствуют нумерациям G_1 и G_2 семейства A, то любая ОРФ, сводящая S_{G_1} к S_{G_2}, сводит G_1 к G_2. Следовательно, если обозначим через $\bar{S}$ подмножество L_A всех классов эквивалентных нумераций, состоящих из нумераций S, то соответствие $G \to S_G$ индуцирует изоморфизм j: $\bar{S} \xrightarrow{b} L_{\omega'}$. $\bar{S}$ и $j(\bar{S})$ — идеалы в L_A и $L_{\omega'}$, соответственно.

Покажем теперь, что $\varepsilon_0 * j : \bar{S} \to L_1'$ является эпиморфизмом, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Будем предполагать, что имеется эффективная процедура для вычисления функции f_0 и функций $F(n)$ такая, что на каждом шаге c вычисляются конечные графики $\Gamma_{f_0}{}^c \subset \Gamma_{f_0}$, $\Gamma^c_{F(n)} \subset \Gamma_{F(n)}$, для любого n, почти все пустые и такие, что $\Gamma_{f_0} = \bigcup\limits_c \Gamma_{f_0}{}^c$ и $\Gamma_{F(n)} = \bigcup\limits_c \Gamma^c_{F(n)}$ для всех n; $\Gamma_f{}^c \subseteq \Gamma_f{}^{c'}$, если $c \leqslant c'$.

Пусть $R \neq N$ — бесконечное рекурсивно перечислимое множество и пусть задан эффективный способ вычисления R, по шагам. На шаге c вычисленно конечное множество $R^c \subset R$, $R^c \subseteq R^{c'}$, для $c \leqslant c'$ и $R = \bigcup_c R^c$. Выберем еще $R_1 \subset R$ — бесконечное рекурсивное подмножество и обозначим через g — прямой пересчет R_1.

Определим $h(c) = \mu t(\Gamma_{f_0}{}^c \subset \Gamma_{F(t)})$. h — ОРФ, из-за условия (*).

Нумерация G_R строится так: определим построение по шагам конечных графиков $L^c_{G_R}$ и $\Gamma_S{}^c$: $\Gamma_S{}^0 = \wedge$; $\Gamma^0_{G_R(n)} = \Gamma_{f_0}{}^0$, если $n \notin R_1$; $\Gamma^0_{G_R(n)} = \Gamma^0_{F(m)}$, если $n \in R_1$ и $g(m) = n$; $c > 0$, $\Gamma^c_{G_R(n)} = \Gamma_{f_0}{}^c$, если $n \notin R_1 \cup R^c$, $\Gamma^c_{G_R(n)} = \Gamma^c_{F(m)}$, если $n \in R_1$ и $g(m) = n$; $\Gamma^c_{G_R(n)} = \Gamma^{c-1}_{G_R(n)} \cup \Gamma^c_{F(m)}$, если $n \in R^{c-1} \setminus R_1$ и $S(n) = m$ и $\Gamma^c_{G_R(n)} = \Gamma^{c-1}_{G_R(n)} \cup \Gamma^c_{F(m_c)}$, если $n \in R^c \setminus (R_1 \cup R^{c-1})$, $m_c = h(c-1)$ и $\Gamma_S{}^c = \Gamma_S{}^{c-1} \cup \{(n, m_c) \mid n \in R^c \setminus (R_1 \cup R^{c-1})\}$.

Полагаем, $\Gamma_{G_R(n)} = \bigcup_c \Gamma^c_{G_R(n)}$ и $\Gamma_s = \bigcup_c \Gamma_s{}^c$. Этим определяется нумерация G_R семейства A. Из построения видно, что область определения S есть $R \setminus R_1$ и для $n \in R$ $G_R(n) \in A \setminus \{f_0\}$, а для $n \notin R$ $G_R(n) = f_0$, а функция S_{G_R} равна функции

$$S_{G'_R}(n) = \begin{cases} m_1, \text{ если } n \in R_1 \text{ и } g(m_1) = n, \\ m_2, \text{ если } n \in R \setminus R_1 \text{ и } S(n) = m, \\ \text{не определена, если } n \notin R, \end{cases}$$

и, следовательно, частично-рекурсивна и имеет область определения R. Теорема доказана.

Замечание. Если вместо множества S рассмотреть множество $S_0 \subset S$ нумераций $G \in S$ таких, что S_G — разнозначна, т. е. $S_G(n) \neq S_G(m)$, если $n \neq m$ принадлежат области определения, то про $\bar{S}_0$ (образ S_0 в L_A) можно доказать (ср. доказательство теоремы 2) аналогичное утверждение, т. е. $\varepsilon_0 * j(\bar{S}_0) = L_1'$. Если имеется несколько предельных точек $f_0, f_1, \ldots$, то, используя множества S_0, получим идеалы $T_0, T_1, \ldots$ полуструктуры L_A и изоморфизмы $j_0 : T_0 \to L_\omega'$, $j_1 : T_1 \to L_\omega'$, $\ldots$ такие, что $\varepsilon_0 * j_s(T_s) = L_1'$, $s = 0, 1, \ldots$ и для любых двух элементов $\alpha \in T_{s_1}$, $\beta \in T_{s_2}$, $s_1 \neq s_2$ таких, что $j_{s_1}(\alpha)$ и $j_{s_2}(\alpha) \neq 0 \in L_\omega'$, α и β не сравнимы в L_ω'.

Итак, в случае, когда A содержит предельную точку, теорема 1 дает определенную качественную картину полуструктуры L_A. В случае, когда A не содержит предельных точек, т. е. когда A дискретно, положение может быть иным.

Будем говорить, что семейство A эффективно дискретно, если существует рекурсивно-перечислимое множество V конечных графиков такое, что выполнено условие:

$$\forall \Gamma \in \bigvee \forall f, g \in A\, [\Gamma \subset \Gamma_f \,\&\, \Gamma \subset \Gamma_g \to f = g] \,\&\, \forall f \in A \exists \Gamma \in \bigvee\, [\Gamma \subset \Gamma_f].$$

Это определение и нижеследующее предложение есть в некотором смысле обобщение определения и свойства ж) из п. 2 на случай разложения A в бесконечное множество одноэлементных семейств.

Предложение 1. Если A эффективно дискретное семейство, то L_A — одноэлементно. Другими словами, все нумерации A эквивалентны.

Доказательство. Пусть F и G — две нумерации семейства A, h — рекурсивная функция, перечисляющая V. Определим следующие функции $h_1(n) = \mu t(h(t) \subset \Gamma_{F(n)})$ и $h_2(n) = \mu t(h(h_1(n)) \subset \Gamma_{G(t)})$. Тогда h_2 сводит F к G. Предложение доказано.

Как дело обстоит в случае, когда A дискретно, но не эффективно дискретно, не ясно. Пример такого семейства указан ниже.

5. В этом пункте мы докажем теорему 2, которая дает больше информации об L_A, чем теорема 1, в предположении, что A удовлетворяет более сильному условию:

$$\forall f \in A \forall n \in N \exists g \in A\, (f \neq g \& \Gamma_{f,n} = \Gamma_{g,n}) \qquad (**)$$

иными словами, если A не содержит изолированных точек.

Теорема 2. *Если семейство A не содержит изолированных точек, то для любой нумерации F семейства A существует однозначная нумерация G семейства A такая, что $[F]$ и $[G]$ не сравнимы в L_A, т. е. F и G не сводимы друг к другу.*

Доказательство. Будем предполагать, что имеется эффективная процедура вычисления по шагам графиков функций $F(n)$ и $\{m\}$ ($\{m\}$ — частично-рекурсивная функция с клиниевским номером m) для всех n и m, так что выполнены условия: если $\Gamma^c_{F(n)}$ и $\Gamma^c_{\{m\}}$ обозначают конечные подграфики графиков $\Gamma_{F(n)}$ и $\Gamma_{\{m\}}$, вычисленные к концу шага c, то для почти всех m и n $\Gamma^c_{F(n)} = \Gamma^c_{\{m\}} = \Lambda$ и $\Gamma_{F(n)} = \bigcup\limits_c \Gamma^c_{F(n)}$, $\Gamma_{\{m\}} = \bigcup\limits_c \Gamma^c_{\{m\}}$ для всех m и n. Используя условие $(**)$, можно построить частично-рекурсивную функцию h такую, что h — двуместная функция, первый аргумент пробегает конечные графики, второй всевозможные конечные кортежи натуральных чисел и $h(\Gamma, n_1, \ldots, n_l)$ определена тогда и только тогда, когда существует m такое, что $\Gamma \subset \Gamma_{F(m)}$; в последнем случае, если $h_0 = h(\Gamma,\, n_1,\, \ldots,\, n_l)$, то $\Gamma \subset \Gamma_{F(h_0)} \& \mathop{\&}\limits_{j=1}^{l} F(h_0) \neq F(n_j)$. Укажем явно вид h только для кортежей длины 1:

$$h(\Gamma, n) = r\,(\mu t\, [\Gamma \subset \Gamma^{l(t)}_{F(r(t))} \& \Gamma^{l(t)}_{F(r(t))} \not\subseteq \Gamma^{l(t)}_{F(n)}]).$$

Укажем теперь индуктивное построение нумерации G. На каждом шаге c будут определены конечные графики $\Gamma^c_{G(n)}$ для всех n, почти все пустые. $\Gamma^c_{G(n)} \subseteq \Gamma^{c'}_{G(n)}$ для $c \leqslant c'$. $G(n)$ будет определена с помощью графика $\Gamma_{G(n)} = \bigcup\limits_c \Gamma^c_{G(n)}$. В ходе построения, на каждом шаге c некоторым (конечному множеству) натуральным числам будут присвоены индекс и номер. Символически $n \xrightarrow{c} \varepsilon, m$. Читается — числу n на шаге c присвоен индекс ε и номер m. Возможные номера — натуральные числа, возможные индексы — элементы множества пар $\{(a, b) \mid a \in \{0, 1\},\ b \in N\}$. Индексы упорядочены: $\varepsilon_1 = (a_1, b_1) < \varepsilon_2 = (a_2, b_2) \Leftrightarrow (b_1 < b_2) \vee (b_1 = b_2 \& a_1 < a_2)$. Запись $n \xrightarrow{c} \varepsilon$ означает $\exists m (n \xrightarrow{c} \varepsilon, m)$, аналогично понимается $n \xrightarrow{c} m$.

Построение будет таково, что будут выполнены условия:

а) $\forall c, n[\Gamma^c_{G(n)} \neq \Lambda \leftrightarrow \exists \varepsilon, m(n \xrightarrow{c} \varepsilon, m)]$, положим $P(c, n) \Leftrightarrow \exists \varepsilon, m(n \xrightarrow{c} \varepsilon, m)$.

б) $\forall c, c', n, \varepsilon, m \exists \varepsilon', m' [c < c' \& (n \xrightarrow{c} \varepsilon, m) \to ((n \xrightarrow{c'} \varepsilon' m') \& (\varepsilon' < \varepsilon \vee \vee \varepsilon = \varepsilon' \& m = m'))]$.

в) $\forall c, n, m [(n \xrightarrow{c} m) \to \Gamma^c_{F(m)} \subseteq \Gamma^c_{G(n)} \subset \Gamma_{F(m)}]$.

г) $\forall c, n_1, n_2 [n_1 \neq n_2 \& P(c, n_1) \& P(c, n_2) \to \Gamma^c_{G(n_1)} \not\top \Gamma^c_{G(n_2)}]$.

На шаге 0 полагаем $\Gamma^0_{G(n)} = \Lambda$ для всех n, никаких присвоений нет.
Пусть $c > 0$.
Случай 1. ex $(0, c) = 0$, ex $(1, c) = m$, полагаем $\varepsilon_c = (0, m)$.
Подслучай а). Выполнено условие:

$$\exists n, \varepsilon [\Gamma^{c-1}_{G(n)} \subset \Gamma_{F(m)} \& (n \xrightarrow{c-1} \varepsilon) \& \varepsilon \leqslant \varepsilon_c].$$

Тогда делаем присвоения и построения так, чтобы выполнялись условия

$\forall n, \varepsilon, m[(n \xrightarrow{c} \varepsilon, m) \leftrightarrow (n \xrightarrow{c-1} \varepsilon, m)]$ — не меняем присвоений; $\Gamma^c_{G(n)} = \Gamma^{c-1}_{G(n)} \cup \Gamma^c_{F(m)}$, если $n \xrightarrow{c} m$.

Подслучай б). Не имеет место а) и выполнено условие:
существует n такое, что

$$\exists \varepsilon [\Gamma^{c-1}_{G(n)} \subset \Gamma_{F(m)} \& (n \xrightarrow{c-1} \varepsilon) \& \varepsilon > \varepsilon_c].$$

Пусть n_0 — наименьшее (единственное, ввиду условия г)) число, удовлетворяющее этому условию.

Делаем присвоение $n_0 \xrightarrow{c} \varepsilon_c, m$. Остальные присвоения не меняем. $\Gamma^c_{G(n)}$ определяется как в 1, а).

Подслучай в). Не имеет место а) и б), тогда

$$\forall n [P(c-1, n) \to \Gamma^{c-1}_{G(n)} \not\subset \Gamma_{F(m)}].$$

Пусть n_0 — наименьшее число, которому на шаге $c-1$ ничего не присвоено. Присваиваем $n_0 \xrightarrow{c} \varepsilon_c, m$. Остальных присвоений не меняем. Определяем число $d = \mu t[t \geqslant c \& \forall n (P(c-1, n) \to \Gamma^d_{F(m)} \not\top \Gamma^{c-1}_{G(n)}]$. Полагаем $\Gamma^c_{G(n_0)} = \Gamma^d_{F(m)}$, для остальных n как в 1, а).

Случай 2. ex$(0, c) > 0$, ex$(1, c) = m$.

Полагаем $\varepsilon_c = (1, m)$. Рассмотрим конечный график $\Gamma_c \overset{df}{=} [\Gamma^c_{\{m\}}]$.

Подслучай а). Выполнено условие

$$\exists n [(n \xrightarrow{c-1} \varepsilon_c)] \vee \forall n, j \exists \varepsilon [(n, j) \in \Gamma_c \to (n \xrightarrow{c-1} \varepsilon) \& \varepsilon < \varepsilon_c].$$

Поступаем как в случае 1, а).

Подслучай б), а) — не имеет места. Тогда:

существует n такое, что

$$\exists_j\,[(n,j)\in\Gamma_c\&\forall\varepsilon\,(\neg\,(n\xrightarrow{c-1}\varepsilon)\vee(n\xrightarrow{c-1}\varepsilon)\&\varepsilon>\varepsilon_c)].$$

Пусть n_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию, и $(n_0,j_0)\in$ $\in\Gamma_c$. Вычисляем $h_0=h(\Gamma^{c-1}_{G(n_0)},j_0,m_1,\ldots,m_l)$, где

$$\{m_1,\ldots,m_l\}=\{m\,|\,\exists n(n\neq n_0\&(n\xrightarrow{c-1}m))\}.$$

Присваиваем $n_0\xrightarrow{c}\varepsilon_c,h_0$. Остальные присвоения не меняем. Пусть

$$d=\mu t\,[t\geqslant c\&\forall n,m\,(n\neq n_0\&(n\xrightarrow{c}m)\to\Gamma^t_{F(h_0)}\not\asymp\Gamma^t_{F(m)})].$$

Теперь полагаем $\Gamma^c_{G(n)}=\Gamma^{c-1}_{G(n)}\cup\Gamma^d_{F(m)}$, для всех n и m таких,что $n\xrightarrow{c}m$.

Построение закончено. Проверка выполнимости условий а), б), в) и г) тривиальна.

1) На каждом шаге ни один индекс и ни один номер не присвоены более чем одному числу.

Утверждение об индексе видно из построения, утверждение о номере следует из условий в) и г).

2) Если числу n на некотором шаге c присвоен индекс ε, то существует шаг $c_0\geqslant c$, индекс $\varepsilon_0\leqslant\varepsilon$ и номер m_0 такие, что $\forall c'\geqslant c_0(n\xrightarrow{c'}\varepsilon_0,m_0)$.

Это следует из условия б) и конечности числа индексов строго меньших ε.

3) Если $\exists c_0\forall c[c\geqslant c_0\to(n\longrightarrow m)]$, то $G(n)=F(m)$. Это следует из условия в) и соотношения $\bigcup\limits_c\Gamma^c_{F(m)}=\Gamma_{F(m)}$.

4) Для любого индекса ε существует шаг $c(\varepsilon)$ такой, что

$$\exists n\forall c\,[c\geqslant c(\varepsilon)\to(n\xrightarrow{c}\varepsilon)]\vee\forall n\forall c\,[c\geqslant c(\varepsilon)\to\neg\,(n\xrightarrow{c}\varepsilon)].$$

Это легко следует из 1) и 2).

5) Если m — клиниевский номер общерекурсивной функции, то $\exists n\exists c_0\forall c[c\geqslant c_0\to(n\to(1,m))]$.

Выберем c такой, что $c>c((1,m))$, $\varepsilon_c=(1,m)$,

$$\overline{\overline{[\Gamma^c_{\{m\}}]}}>\overline{\overline{\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\leqslant(1,m)\}}}.$$

При построении на шаге c имеет место случай 2. Подслучай б) невозможен, так как $c>c((1,m))$. Следовательно, верно

$$\exists n[(n\xrightarrow{c-1}\varepsilon_c)]\vee\forall n,j\exists\varepsilon[(n,j)\in\Gamma_c\to(n\xrightarrow{c-1}\varepsilon)\&\varepsilon<\varepsilon_c].$$

Второй дизъюнктивный член ложен из-за соотношения мощностей по 1). Итак, $\exists n(n\xrightarrow{c-1}\varepsilon_c)$, но $c-1\geqslant c(\varepsilon_c)$, следовательно, $\exists n\forall c\geqslant c((1,m))\,(n\xrightarrow{c}(1,m))$. Утверждение доказано.

6) $\forall n\exists c,\varepsilon(n\xrightarrow{c}\varepsilon)$. Другими словами, любому натуральному числу на некотором шаге что-то присваивается.

Предположим, что это не так и пусть n_0 — наименьшее число, которому ни на каком шаге ничего не присваивается. Пусть числам $<n_0$ постоянно присвоены индексы $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_0-1}$. Это означает, что для $n' < n_0$, $\exists c_0 \forall c[c \geqslant c_0 \to (n' \xrightarrow{c} \varepsilon_{n'})]$. Выберем m таким, что $\{m\}$ — общерекурсивная функция и $(1, m) > \varepsilon_i$, $i = 0, \ldots, n_0 - 1$. Из 5) следует, что существует число n_1 и шаг c_0 такие, что на шаге $c_0 : \varepsilon_{c_0} = (1, m)$ имеет место случай 2, б) и числу n_1 присваивается индекс ε_{c_0}, причем $\forall c \geqslant \geqslant c_0[n_1 \xrightarrow{c} (1, m)]$, иными словами, если на шаге c_0 числу n_1 индекс $(1, m)$ присваивается постоянно. Так как числам $<n_0$ приписываются постоянно индексы $<(1, m)$, то $n_1 \geqslant n_0$. Так как на шаге c_0 имеет место случай 2, б), то n_1 — наименьшее число n, для которого

$$\exists j\,[(n, j) \in \Gamma_{c_0} \& \forall \varepsilon\, (\neg\, (n \xrightarrow{c-1} \varepsilon) \vee (n \xrightarrow{c-1} \varepsilon)\, \& \varepsilon > \varepsilon_{c_0})].$$

Но из $\exists j[(n_1, j) \in \Gamma_{c_0}] \to \exists j[(n_0, j) \in \Gamma_{c_0}]$, и из определения n_0, $\forall \varepsilon (\neg\, (n_0 \xrightarrow{c-1} \varepsilon))$. Следовательно, $n_0 = n_1$ и $n_0 \xrightarrow{c_0} (1, m)$. Это противоречит выбору n_0. Утверждение доказано.

7) $\forall n \exists k (G(n) = F(k))$. Иными словами, для любого n функция $G(n)$ принадлежит A.

Это непосредственно следует из 2), 3) и 6).

8) $\forall m \exists n (F(m) = G(n))$.

Рассмотрим индекс $\varepsilon_0 = (0, m)$. Если после шага $c(\varepsilon_0)$ ε_0 присвоен некоторому числу n, то из 3) следует, что $F(m) = G(n)$. Если это не так, то существует n, которому постоянно приписан индекс $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, и для бесконечного числа шагов c, $\Gamma^{c-1}_{G(n)} \subset \Gamma_{F(m)}$. Последнее влечет, что $G(n) = F(m)$. Утверждение доказано.

9) G — нумерация семейства A.

Это непосредственно видно из 7) и 8). Вычислимость видна из построения.

10) G — однозначная нумерация A.

Это следует из условия г) и 9).

11) G — не сводима к F.

Предположим противное. Пусть $\{m\}$ — ОРФ, сводящая G к F, т. е. для любого n, $G(n) = F(\{m\}(n))$. По 5) существует шаг c_0, на котором имеет место 2, б), $\varepsilon_{c_0} = (1, m)$, число n_0 и номер h_0 такие, что $n_0 \xrightarrow{c_0} (1, m)$, h_0 и $\forall c \geqslant c_0 (n_0 \xrightarrow{c_0} (1, m))$. Тогда $G(n_0) = F(h_0)$. По определению $h_0 = h(\Gamma^{c_0-1}_{G(n_0)}, \{m\}(n_0), \ldots)$ и, по определению функции h, $F(h_0) \neq \neq F(\{m\}(n_0))$. Итак, $G(n_0) = F(h_0) \neq F(\{m\}(n_0))$. Противоречие.

12) F не сводима к G.

Это следует из 10) и 11). Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если семейство A удовлетворяет условию (**), то L_A не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента и имеет счетное число минимальных, L_A — не структура.*

Если G и F удовлетворяют заключению теоремы, то $[F] \cup [G] > > [F]$, $[G]$. Это доказывает утверждение об отсутствии наибольшего элемента L_A. Остальные утверждения вытекают непосредственно из формулировки теоремы.

Будем говорить, что нумерация F семейства A главная, если $[F]$ — наибольший элемент L_A (сравни ([2])).

Следствие 2. *Семейство всех одноместных примитивных рекурсивных функций удовлетворяет условию* $(**)$ *и, следовательно, для этого семейства справедливы утверждения теоремы* 2 *и следствие* 1. *В частности, это семейство не имеет главной нумерации.*

6. В этом пункте приведем два примера.

Предложение 2. Если $f_0 \in A$ таково, что $A \setminus \{f_0\}$ — эффективно-дискретное семейство, то L_A изоморфно вкладывается как идеал в L_ω'. В частности, L_A имеет наименьший элемент.

Доказательство. Если f_0 не предельная точка A, то из предложения 1 следует, что L_A — одноэлементно. Если f_0 — предельная точка, то нетрудно показать, что $\bar{S} = L_A$ (для $\bar{S}$ смотри доказательство теоремы 1). Пусть F — однозначная нумерация $A \setminus \{f_0\}$, h_1 определена, как в доказательстве предложения 1. Тогда для любой нумерации G семейства A функция $h_G(n) = \mu t(h(h_1(n)) \subset \Gamma_{G(t)})$ и функция S_G совпадают, но первая частично-рекурсивна. Предложение доказано.

Пример 1. Положим $F(n, x) = sgn \cdot sg(n \dot{-} x) + \overline{sgn}$. Тогда, если A_0 — семейство одноместных функций, для которых F — универсальна. $F(0)$ — единственная предельная точка в A_0 и $A_0 \setminus \{F(0)\}$ — эффективно дискретное множество. Соответствующее множество графиков $V = \{\Gamma_j | \ j = 0, 1, \dots\}, \Gamma_j = \{(j, 1), \ (j+1, 0)\}$.

Теорема 1 показывает, что L_{A_0} — бесконечно, предложение 2, что L_{A_0} имеет наименьший элемент.

Пример 1 показывает, что заключение следствия 1 к теореме 2 не может быть распространено на семейства, удовлетворяющие условию $(*)$.

Неизвестен ответ на следующий вопрос: вытекает ли из условия $(*)$ для A отсутствие главной нумерации? Что L_A не структура?

Предложение 3 (пример 2). Существует дискретное, но не эффективно дискретное вычислимое семейство одноместных ОРФ A_1.

Полное доказательство этого предложения будет опубликовано в журнале «Алгебра и логика».

Останется невыясненным: какова может быть мощность L_A для дискретных, но не эффективно дискретных семейств A? Может ли L_A быть структурой?

Поступило
18.V.1967

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, 1965.
[2] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, Физматгиз, 1960.
[3] Liu S. C., An enumeration of the primitive recursive functions without repartition, Tohôku. Math. J., 12, № 3 (1960), 400—403.
[4] Sacks G., Degrees of unsolvability, Prinseton (1963).