



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. Zigmunt, Remarks on the superposition  
measurability of a multivalued function,  
*Mat. Zametki*, 1990, Volume 48, Issue 3, 70–72

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm3332>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you  
have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 23, 2025, 13:24:28



## ЗАМЕЧАНИЯ О СУПЕРПОЗИЦИОННОЙ ИЗМЕРИМОСТИ МНОГОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

В. Зигмунт

В этой статье, примыкающей к работе [1], исследуется связь между суперпозиционной измеримостью многозначной функции двух переменных и измеримостью по совокупности этих переменных. Доказывается, что если многозначная функция удовлетворяет определенным условиям, то оба понятия измеримости эквивалентны. Кроме того приводится усиление теоремы 3 доказанной Цалюком [1].

Начнем с введения нужных обозначений и определений. Итак,  $P\mathfrak{X}$ ,  $U\mathfrak{X}$ ,  $\text{Comp } \mathfrak{X}$  будут обозначать совокупность всех, всех замкнутых и всех компактных подмножеств топологического пространства  $\mathfrak{X}$  соответственно. Если  $F: \mathfrak{X}_1 \rightarrow P\mathfrak{X}_2$  — многозначная функция, то множества  $GrF = \{(x, y) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2: y \in F(x)\}$ ,  $F^-A = \{x \in \mathfrak{X}_1: F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ ,  $F^+A = \{x \in \mathfrak{X}_1: F(x) \subseteq A\}$  называются графиком  $F$ , нижним и верхним образом множества  $A \subseteq \mathfrak{X}_2$  соответственно. Следуя [2], назовем многозначную функцию  $F: \mathfrak{X}_1 \rightarrow P\mathfrak{X}_2$  полунепрерывной сверху (снизу), если для любого замкнутого (открытого) множества  $A \subseteq \mathfrak{X}_2$ , множество  $F^-(A)$  (открыто) замкнуто в  $\mathfrak{X}_1$ , или, что эквивалентно, для любого открытого (замкнутого) множества  $B \subseteq \mathfrak{X}_2$ , множество  $F^+(B)$  открыто (замкнуто) в  $\mathfrak{X}_1$ .  $F$  называется непрерывной, если она одновременно полунепрерывна сверху и снизу. Пусть  $(Z, \mathfrak{M})$  — измеримое пространство. Тогда, следуя [4], многозначную функцию  $F: Z \rightarrow P\mathfrak{X}$  назовем  $\mathfrak{M}$ -измеримой (слабо  $\mathfrak{M}$ -измеримой), если для любого замкнутого (открытого) множества  $A \subseteq \mathfrak{X}$ , множество  $F^-A$   $\mathfrak{M}$ -измеримо, т. е.  $F^-(A) \in \mathfrak{M}$  или, что эквивалентно, для любого открытого (замкнутого) множества  $B \subseteq \mathfrak{X}$ , множество  $F^+(B)$   $\mathfrak{M}$ -измеримо. Пусть теперь  $(T, \Sigma)$  — измеримое пространство,  $(X, \rho_x)$  — полное сепарабельное метрическое пространство,  $(Y, \rho_y)$  — метрическое пространство. Будем говорить (см. [1]), что многозначная функция  $F: T \times X \rightarrow PY$  удовлетворяет слабому условию Каратеодори, если а) при каждом  $x \in X$  отображение  $t \rightarrow F(t, x)$   $\Sigma$ -измеримо и б) для любого  $t \in T$  отображение  $x \rightarrow F(t, x)$  полунепрерывно сверху. Если потребовать в б) непрерывность отображений  $x \rightarrow$

$\rightarrow F(t, x)$ , то получившееся условие назовем сильным условием Каратеодори. Многозначную функцию  $F: T \times X \rightarrow PY$  будем называть суперпозиционно измеримой, если для любой  $\Sigma$ -измеримой многозначной функции  $G: T \rightarrow UX$  отображение  $t \rightarrow F(t, G(t))$   $\Sigma$ -измеримо.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра универсально измеримых множеств [3, определение III.21] (здесь отметим, что тогда пространство  $(T, \Sigma)$  полное в смысле определения Химмельберга [4, с. 54]). Через  $\mathfrak{B}(X)$  обозначим борелевскую  $\sigma$ -алгебру подмножеств пространства  $X$ , через  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$  —  $\sigma$ -алгебру порожденной множествами  $A \times B$ , где  $A \in \Sigma$ ,  $B \in \mathfrak{B}(X)$ .

Известно [1, теорема 1], что если многозначная функция  $F: T \times X \rightarrow PY$  является  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ -измеримой, то она суперпозиционно измерима. Эта импликация обратима в случае многозначной функции удовлетворяющей слабому условию Каратеодори, что подтверждает следующая

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть многозначная функция  $F: T \times X \rightarrow PY$  удовлетворяет слабому условию Каратеодори. Тогда для того, чтобы она была  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ -измеримой, необходимо и достаточно, чтобы была суперпозиционно измеримой.

**Доказательство.** Необходимость вытекает из [1, теорема 1].

**Достаточность.** Прежде всего отметим, что суперпозиционная измеримость влечет за собой  $\Sigma$ -измеримость множеств  $\{t \in T: F(t, A) \cap B \neq \emptyset\}$  для любых  $A \in UX$ ,  $B \in UT$ . Каждому  $B \in UY$  и каждому  $t \in T$  поставим в соответствие множество  $\Phi_B(t)$ , определенное по правилу  $\Phi_B(t) = \{x \in X: F(t, x) \cap B \neq \emptyset\}$ . Поскольку  $F$  полунепрерывна сверху по  $x$ , то множество  $\Phi_B(t)$  замкнуто в  $X$ . Кроме того, для любого фиксированного  $B \subset UY$  отображение  $\Phi_B: T \rightarrow UX$   $\Sigma$ -измеримое. Действительно, для любого замкнутого  $A \subset X$  имеем  $\Phi_B^-(A) = \{t \in T: \Phi_B(t) \cap A \neq \emptyset\} = \{t \in T: \exists_{x \in A} x \in \Phi_B(t)\} = \{t \in T: \exists_{x \in A} F(t, x) \cap B \neq \emptyset\} = \{t \in T: F(t, A) \cap B \neq \emptyset\} \in \Sigma$ . Таким образом, согласно [4, теорема 3.5], график  $\Phi_B$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ . Отсюда, в силу произвольности множества  $B \in UY$  и равенства  $\text{Gr } \Phi_B = \{(t, x) \in T \times X: x \in \Phi_B(t)\} = \{(t, x) \in T \times X: F(t, x) \cap B \neq \emptyset\} = F^-(B)$ , вытекает  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ -измеримость многозначной функции  $F$ . Теорема доказана.

Следующий результат является усилением теоремы 3 из [1] (поскольку мы не требуем локальной компактности многозначной функции).

**ТЕОРЕМА 2.** Если многозначная функция  $F: T \times X \rightarrow \text{Comp } Y$  удовлетворяет сильному условию Каратеодори, то она  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ -измерима, и следовательно, суперпозиционно измерима.

**Доказательство.** Пусть  $B \in UY$ ,  $A$  — счетное всюду плотное множество в  $X$ . Положим  $B^n = \{y \in Y: \rho_y(y, B) < 1/n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, в силу  $\Sigma$ -измеримости по  $t$  функции  $F$ , имеем

$\{t \in T: F(t, a) \subset B^n\} \in \Sigma$  и, очевидно,  $\{x \in X: \rho_x(x, a) < 1/n\} \in \mathfrak{B}(X)$  для любых  $a \in A$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Кроме того, верна следующая эквивалентность:

$$F(t, x) \subset B \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} (\rho_x(x, a) < 1/n) \wedge \\ \wedge (F(t, a) \subset B^n), \quad (t, x) \in T \times X.$$

В самом деле, если  $F(t, x) \subset B$ , то благодаря верхней полунепрерывности по  $x$  многозначной функции  $F$  получаем справедливость правой стороны эквивалентности. Обратно, если выполнена правая сторона эквивалентности, то существует такая сходящаяся к  $x$  последовательность  $\{a_n\} \subset A$ , что  $F(t, a_n) \subset B^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что  $x \in \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, благодаря нижней полунепрерывности по  $x$  функции  $F$ , согласно [2, следствие 2а, с. 185], имеем  $F(t, x) \subset \overline{SF(t, \{a_n, a_{n+1}, \dots\})} \subset \subset \overline{SF(t, \{a_n, a_{n+1}, \dots\})} = \bigcup_{i=n}^{\infty} F(t, a_i) \in \overline{B^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $S(R)$  означает операцию объединения всех множеств семейства  $R$  [2, с. 13]. Отсюда следует, что  $F(t, x) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B^n} = B$ . Теперь, учитывая эту эквивалентность, получаем

$$F^+(B) = \{(t, x) \in T \times X: F(t, x) \subset B\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{a \in A} \{t \in T: \\ F(t, a) \subset B^n\} \times \{x \in X: \rho_x(x, a) < 1/n\} \in \Sigma \times \mathfrak{B}(X).$$

Это означает, что многозначная функция  $F: T \times X \rightarrow \text{Comp } Y$  слабо  $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ -измерима. Но в случае компактнозначной функции слабая измеримость эквивалентна измеримости [4, теорема 3.1]. Таким образом,  $F$   $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ -измерима и, следовательно, суперпозиционно измерима. Теорема доказана.

Институт математики при  
Университете М. Кюри-Складовской  
(Люблин, ПР)

Поступило  
14.06.88

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ц а л ю к В. З. О суперпозиционной измеримости многозначных функций // Математические заметки. 1988. Т. 43, вып. 1. С. 98—102.
- [2] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [3] C a s t a i n g С., V a l a d i e r М. Convex analysis and measurable multifunctions // Lect. Notes in Math. V. 580. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [4] H i m m e l b e r g С. J. Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53—71.