Д. В. Осипов, Об адельной факторгруппе для алгебраической поверхности, *Алгебра и анализ*, 2018, том 30, выпуск 1, 151–169

Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №1

ОБ АДЕЛЬНОЙ ФАКТОРГРУППЕ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© Д. В. ОСИПОВ

Явно вычисляется адельная факторгруппа для превосходной нетеровой нормальной целой двумерной отделимой схемы. Приводится приложение полученного результата для случая неприводимой нормальной проективной алгебраической поверхности над полем.

§1. Введение

Пусть K — глобальное поле или поле рациональных функций алгебраической кривой, определенной над полем k, и $\mathbb{A}_K$ — группа аделей поля K. Тогда хорошо известно, что группа $\mathbb{A}_K/K$ является компактным топологическим пространством в теоретико числовом случае и линейно компактным k-векторным пространством в геометрическом случае, см., например, [1] и раздел 2 далее. Более того, из теоремы о сильной аппроксимации вытекает следующая точная последовательность, которую запишем для простейшего случая $K = \mathbb{Q}$:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Целью этой заметки является явное вычисление, подобно формуле (1), адельной факторгруппы

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F})/\left(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\right), \tag{2}$$

где X — превосходная нетерова (например, конечного типа над полем k или над кольцом $\mathbb{Z}$) нормальная целая двумерная отделимая схема X, $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$ — группа высших аделей локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X, подгруппа

$$\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})$$

является аналогом подгруппы, как выше, $K \subset \mathbb{A}_K$. Вместо фиксации нормирования, как, например, архимедова нормирования в формуле (1) (или

Ключевые слова: адели Паршина–Бейлинсона, двумерная нетерова схема, алгебраическая поверхность.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 14-50-00005).

точки на связной проективной кривой), зафиксируем приведенную одномерную замкнутую равноразмерную подсхему C схемы X, такую что открытая подсхема $X \setminus C$ аффинна.

Высшие адели были введены А. Н. Паршиным в статье [2] для случая гладкой проективной поверхности над полем, и А. А. Бейлинсоном в короткой заметке [3] (которая не содержала доказательств) для случая произвольной нетеровой схемы. Позднее доказательства результатов Бейлинсона про высшие адели появились в статье [4]. Обзор про высшие адели содержится также в статье [5].

Главная цель программы высших аделей состоит в возможных арифметических приложениях для изучения дзета-функций и L-функций арифметических схем, см. превосходный обзор А. Н. Паршина [6].

Недавно были также найдены интересные связи и пересечения, вызывающие множество вопросов, между теорией высших аделей и программой Ленглендса, см. [7, 8].

В качестве применения, из наших вычислений адельной факторгруппы (2) получаем соответствующую факторгруппу, когда X — проективная неприводимая нормальная поверхность над полем k, и кривая C является носителем обильного дивизора. Как и в одномерном случае, эта факторгруппа будет линейно компактным k-векторным пространством. Отметим, что эта факторгруппа в случае гладкой поверхности X и пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ была вычислена в [9, §14]. Но в доказательстве теоремы 3 из [9] имелись пробелы, см. замечание 5 далее.

Другое приложение вычисления адельной факторгруппы (2) для двумерных схем будет дано в последующей статье [10]. Там будет явно вычислена адельная факторгруппа на арифметической поверхности с учетом слоев над архимедовыми точками.

Эта заметка имеет следующую структуру. В разделе 2 напоминается одномерный случай. В разделе 3.1 напоминаются основные обозначения для аделей на двумерных нормальных превосходных целых отделимых нетеровых схемах. В разделе 3.2.1 строится сюръективное отображение из адельной факторгруппы 2. В разделе 3.2.2 вычисляется ядро этого отображения. В этом разделе получена теорема 1 о вычислении адельной факторгруппы (2). В разделе 4 вышепроделанные вычисления применяются к случаю проективной нормальной алгебраической поверхности, см. теорему 2.

Я благодарен А. Н. Паршину, так как наша совместная статья [9] привела к этой заметке. Я благодарен А. Б. Жеглову за указание на ссылку [11].

§2. Одномерный случай

Для лучшего понимания двумерного случая напомним сначала одномерный случай.

Пусть D — неприводимая алгебраическая кривая над полем k. Пусть η — общая точка кривой D, и $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок конечного ранга на кривой D. Зафиксируем (замкнутую) точку p на кривой D.

Для любой точки q на кривой D пусть $\widehat{\mathcal{O}}_q$ — пополнение локального кольца $\mathcal{O}_q$ точки q, $\widehat{\mathcal{F}}_q$ — пополнение слоя пучка $\mathcal{F}$ в точке q, и K_q — локализация кольца $\widehat{\mathcal{O}}_q$ относительно мультипликативной системы $\mathcal{O}_q \setminus 0$.

Пусть $j : U = D \setminus p \hookrightarrow D$ — открытое вложение. Рассмотрим подгруппу

$$A_U(\mathcal{F}) = H^0(U, j^*\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F}_\eta$$

и обычное адельное произведение

$$\mathbb{A}_D(\mathcal{F}) = \prod_{q\in D}{}' \widehat{\mathcal{F}}_q \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_q} K_q.$$

по всем (замкнутым) точкам кривой D.

Наша цель — построить точную последовательность

$$0 \longrightarrow \prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q \xrightarrow{\iota} \mathbb{A}_D(\mathcal{F})/\mathcal{F}_\eta \xrightarrow{\psi} \left(\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p\right)/A_U(\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \qquad (3)$$

где группа $\mathcal{F}_\eta$ диагонально вложена в группу $\mathbb{A}_D(\mathcal{F})$, отображение ι индуцировано естественным вложением

$$\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q \hookrightarrow \mathbb{A}_D(\mathcal{F}),$$

и отображение ψ будет определено далее.

Рассмотрим адельный комплекс для пучка $j_*j^*\mathcal{F}$, вычисляющий когомологии пучка $j_*j^*\mathcal{F}$ на кривой D:

$$\mathcal{F}_\eta \oplus \left(\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\right) \oplus \left(\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p\right) \longrightarrow \mathbb{A}_D(\mathcal{F}).$$

Так как кривая U аффинна, получаем $H^1(D, j_*\mathcal{O}_U) = 0$. Отсюда имеем

$$\mathbb{A}_D(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\eta + \left(\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\right) + \left(\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p\right). \qquad (4)$$

Теперь построим отображение ψ в последовательности (3) следующим образом. Пусть x — элемент из группы $\mathbb{A}_D(\mathcal{F})/\mathcal{F}_\eta$, и элемент $\widetilde{x} \in \mathbb{A}_D(\mathcal{F})$

— это любой подъем элемента x. Тогда по формуле (4) имеется элемент f из группы $\mathcal{F}_\eta$, такой что элемент $f+\widetilde{x}$ принадлежит подгруппе

$$\Big(\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\Big) \oplus \Big(\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p\Big).$$

Определим

$$\psi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} s\cdot \mathrm{pr}_p(f+\widetilde{x}),$$

где отображение pr_p является проекцией из группы $\mathbb{A}_D(\mathcal{F})$ в группу $\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p$, и отображение s есть естественное отображение

$$\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p \longrightarrow \Big(\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p\Big)/A_U(\mathcal{F}).$$

Ясно, что отображение ψ корректно определено, так как для любых других выборов $\widetilde{x}'$ и f' получаем, что элемент $\widetilde{x}-\widetilde{x}'+f-f'$ принадлежит подгруппе

$$\mathcal{F}_\eta \cap \Bigg(\Big(\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\Big) \oplus \Big(\widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} K_p\Big)\Bigg) = A_U(\mathcal{F}).$$

Из конструкции ясно, что отображение ι является вложением, отображение ψ – сюръекция, и выполнено $\psi\cdot\iota=0$. Кроме того, имеем

$$\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Im}\iota,$$

так как если $\psi(x)=0$, то имеется элемент $f\in\mathcal{F}_\eta$, такой что

$$f+\widetilde{x} \in \Big(\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\Big) + \Big(\mathcal{F}_\eta \cap \prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\Big),$$

и отсюда

$$\widetilde{x} \in \Big(\prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{F}}_q\Big) + \mathcal{F}_\eta.$$

Поэтому последовательность (3) точна.

Пример 1. Если $\mathcal{F}=\mathcal{O}(E)$ для дивизора E на кривой D, то последовательность (3) выглядит так:

$$0 \longrightarrow \prod_{q\in D, q\neq p} \widehat{\mathcal{O}}_q(E) \xrightarrow{\iota} \mathbb{A}_{k(D)}/k(D) \xrightarrow{\psi} K_p/A_U(E) \longrightarrow 0,$$

где $k(D)$ — поле рациональных функций на кривой D, и

$$A_U(E) = A_U(\mathcal{O}(E)).$$

Замечание 1. Ясно, что точная последовательность (3) очевидным образом обобщается на случай нескольких точек $p_1, \ldots, p_n$ на кривой D (вместо одной точки p) и аффинной открытой подсхемы

$$U = D \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Замечание 2. Для глобального поля K рассмотрим точную последовательность, аналогичную точной последовательности (1) и явно вычисляющую группу $\mathbb{A}_K/K$ (в случае, когда поле K — поле рациональных функций проективной кривой D над конечным полем k, это точная последовательность из примера 1). Из этой точной последовательности не трудно вывести, что группа $\mathbb{A}_K/K$ компактна. Из этого факта просто и элегантно сразу выводится закон взаимности о равенстве единице произведения всех нормализованных нормирований от произвольного ненулевого элемента из поля K, см. рассуждения после доказательства следствия 2 в [1, §14]. Отметим, что далеко идущими обобщениями этого закона взаимности являются законы взаимности для двумерного символа Конту–Каррера на алгебраической поверхности, доказанные в [12]. Локальные свойства многомерных символов Конту–Каррера подробно изучались также в [13, 14, 15].

§3. Случай двумерных схем

Цель этого и следующего разделов — рассмотрения случая факторгрупп групп аделей Паршина–Бейлинсона на двумерных схемах (на алгебраических поверхностях в следующем разделе).

3.1. Адельный формализм. Пусть X — превосходная нетерова (например, конечного типа над полем k или над кольцом $\mathbb{Z}$) нормальная целая двумерная отделимая схема. Для любой замкнутой точки $x \in X$ пусть $\widehat{\mathcal{O}}_x$ — пополнение локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки x относительно максимального идеала. Тогда кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_x$ является снова целозамкнутой областью целостности (см., например, [16, гл. 13, §33, теорема 79]). Пусть K_x будет локализацией кольца $\widehat{\mathcal{O}}_x$ относительно мультипликативной системы $\mathcal{O}_x \backslash 0$. Для любой одномерной целой замкнутой подсхемы D схемы X пусть K_D — пополнение поля рациональных функций на схеме X относительно дискретного нормирования, заданного подсхемой D.

Пусть $x \in D$ — любая пара, такая что x — замкнутая точка на схеме X, и D — одномерная целая замкнутая подсхема схемы X. Пусть ρ_i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, будут все простые идеалы высоты один в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_x$, которые содержат идеал $\rho_D \widehat{\mathcal{O}}_x$, где простой идеал ρ_D кольца $\mathcal{O}_x$ определяет подсхему $D\,|_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_x}$. Определим кольцо

$$K_{x,D} = \prod_{1\leqslant i\leqslant l} K_i,$$

где K_i — двумерное локальное поле, полученное как пополнение поля $\operatorname{Frac}\widehat{\mathcal{O}}_x$ относительно дискретного нормирования, заданного простым идеалом ρ_i. Подобным образом, определим кольцо

$$\mathcal{O}_{K_{x,D}} = \prod_{1\leqslant i\leqslant 1} \mathcal{O}_{K_i},$$

где $\mathcal{O}_{K_i}$ — кольцо дискретного нормирования поля K_i.

Для любого квазикогерентного пучка на схеме X определена группа аделей, см. ее определение, например, в [4, 5]. Будем использовать следующие обозначения. Для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на схеме X пусть $\widehat{\mathcal{F}}_q$ — пополнение слоя $\mathcal{F}_q$ пучка $\mathcal{F}$ в точке q схемы X. Если D — одномерная подсхема схемы X, то через $\widehat{\mathcal{F}}_D$ будем обозначать пополнение слоя пучка $\mathcal{F}$ в общей точке подсхемы D, то есть в незамкнутой точке схемы X, замыкание которой совпадает с подсхемой D. Рассмотрим группу аделей пучка $\mathcal{F}$:

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) = \prod_{x\in D}{}' K_{x,D}(\mathcal{F}) \ \subset\ \prod_{x\in D} K_{x,D}(\mathcal{F}),$$

где группа

$$K_{x,D}(\mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{F}}_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_x} K_{x,D},$$

и $x \in D$ пробегает по всем парам, описанным выше. Определим также группу

$$\mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{F}_x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_x} \mathcal{O}_{K_{x,D}}.$$

Также определены подгруппы группы $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) &= \mathbb{A}_X(\mathcal{F}) \cap \prod_D K_D(\mathcal{F}),\\
\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) &= \mathbb{A}_X(\mathcal{F}) \cap \prod_x K_x(\mathcal{F}),\\
\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) &= \mathbb{A}_X(\mathcal{F}) \cap \prod_{x\in D} \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) = \prod_{x\in D}{}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где пересечение берется в группе

$$\prod_{x\in D} K_{x,D}(\mathcal{F}),$$

и мы рассматриваем диагональное вложения произведений $\prod_D$ и $\prod_x$ в произведение $\prod_{x\in D}$, кроме того

$$K_D(\mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{F}}_D \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_D} K_D,$$
$$K_x(\mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{F}}_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_x} K_x.$$

Кроме того, для любого подмножества Δ множества всех пар $x \in D$, описанных выше, будем использовать обозначение $\prod'_\Delta$ для пересечения произведения $\prod_\Delta$ тех же самых сомножителей с группой $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$ внутри группы $\prod_{x\in D} K_{x,D}(\mathcal{F})$ (сравните с формулой (5)).

3.2. Факторгруппа группы аделей.

3.2.1. *Конструкция сюръективного отображения φ.* Сохраним обозначения из раздела 3.1.

Пусть C — приведенная одномерная замкнутая равноразмерная подсхема схемы X. Рассмотрим

$$C = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant w} C_i,$$

где C_i — целые одномерные замкнутые подсхемы схемы X. Предположим, что подсхема $U = X \setminus C$ аффинна. Пусть $j : U \hookrightarrow X$ — соответствующее вложение.

Пусть $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на схеме X. Отметим, что

$$H^i(X, j_*j^*\mathcal{F}) = H^i(U, j^*\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{для} \qquad i \geqslant 1.$$

Заметим также, что

$$j_*j^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} j_*\mathcal{O}_U.$$

Так как мы предположили, что схема X целая и нормальная (в частности, множество особых точек схемы X состоит из конечного числа замкнутых точек), то имеем

$$j_*\mathcal{O}_U = \varinjlim_n \mathcal{O}_X(nC), \tag{6}$$

где $\mathcal{O}_X(nC)$ — рефлексивный когерентный подпучок без кручения постоянного пучка поля рациональных функций на схеме X, и этот подпучок состоит из элементов пучка $j_*\mathcal{O}_U$, имеющих дискретные нормирования, задаваемые подсхемами C_i (где $1 \leqslant i \leqslant w$), большие или равные $-n$. (Это следует, например, из [11, §3]).

Из $H^2(X, j_*j^*\mathcal{F}) = 0$ и адельного комплекса для пучка $j_*j^*\mathcal{F}$ получаем

$$\mathbb{A}_X(j_*j^*\mathcal{F})) = \mathbb{A}_{X,12}(j_*j^*\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,01}(j_*j^*\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(j_*j^*\mathcal{F}). \tag{7}$$

Имеем

$$\mathbb{A}_X(j_*j^*\mathcal{F}) = \mathbb{A}_X(\mathcal{F}),$$
$$\mathbb{A}_{X,01}(j_*j^*\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}),$$
$$\mathbb{A}_{X,02}(j_*j^*\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}).$$

Так как для любой аффинной открытой подсхемы $V = \operatorname{Spec} A$ схемы X выполнено (доказательство аналогично доказательствам в [17, предложение 1(5)] и в [17, предложение 4(2)])

$$\mathbb{A}_{V,12}((j_*j^*\mathcal{F}) \mid_V) = \mathbb{A}_{V,12}(\mathcal{O}_V) \otimes_A H^0(V, (j_*j^*\mathcal{F}) \mid_V),$$

то получаем

$$\mathbb{A}_{X,12}(j_*j^*\mathcal{F}) = \prod_{x\in D, D\not\subset C}{}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) \oplus \prod_{1\leqslant i\leqslant w} \prod_{x\in C_i}{}' K_{x,C_i}(\mathcal{F}). \tag{8}$$

Обозначим

$$\mathbb{A}^U_{X,12}(\mathcal{F}) = \prod_{x\in D, D\not\subset C}{}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}). \tag{9}$$

Отсюда и из формулы (7) получаем

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) + \Big(\mathbb{A}^U_{X,12}(\mathcal{F}) \oplus \prod_{1\leqslant i\leqslant w} \prod_{x\in C_i}{}' K_{x,C_i}(\mathcal{F})\Big). \tag{10}$$

Теперь хотим построить отображение φ:

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) / \left(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\right) \xrightarrow{\varphi} \Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant w} \prod_{x\in C_i}{}' K_{x,C_i}(\mathcal{F})\Big) / \Upsilon(\mathcal{F}), \tag{11}$$

где группа

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathcal{F}) = \operatorname{pr}_C \Big(&\big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\big) \\ &\cap \big(\mathbb{A}^U_{X,12}(\mathcal{F}) \oplus \prod_{1\leqslant i\leqslant w} \prod_{x\in C_i}{}' K_{x,C_i}(\mathcal{F})\big)\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь отображение pr_C является проекцией из группы $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$ на группу

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w} \prod_{x\in C_i}{}' K_{x,C_i}(\mathcal{F}).$$

Определим отображение φ следующим образом:

$$\varphi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} s \cdot \operatorname{pr}_C(\widetilde{x} + g),$$

где s является естественным отображением из группы

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i}' K_{x,C_i}(\mathcal{F})$$

в группу

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i}' K_{x,C_i}(\mathcal{F})/\Upsilon,$$

элемент $\widetilde{x}$ — это любой подъем элемента x из группы

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F})/(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F})+\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}))$$

в группу

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}),$$

и элемент

$$g\ \in\ (\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F})+\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}))$$

выбран так, чтобы было выполнено свойство

$$\widetilde{x}+g\ \in\ \mathbb{A}^U_{X,12}(\mathcal{F})\oplus\prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i}' K_{x,C_i}(\mathcal{F}). \tag{13}$$

(Такой элемент g существует по формуле (10)).

Отображение φ корректно определено, так как если элемент $\widetilde{x}'$ — другой подъем, и элемент g' — другой выбор соответствующего элемента, то имеем

$$\widetilde{x}'+g'-\widetilde{x}-g\in(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F})+\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}))\cap\Big(\mathbb{A}^U_{X,12}(\mathcal{F})\oplus\prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i}' K_{x,C_i}(\mathcal{F})\Big).$$

Кроме того, из конструкции ясно, что отображение φ сюръективно.

Лемма 1. *Имеется равенство подгрупп группы* $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{X,12}(j_*j^*\mathcal{F})&\cap\big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F})+\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\big)\\&=\big(\mathbb{A}_{X,12}(j_*j^*\mathcal{F})\cap\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F})\big)+\big(\mathbb{A}_{X,12}(j_*j^*\mathcal{F})\cap\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\big).\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим пучок $\mathcal{H}=j_*j^*\mathcal{F}$ на схеме X и рассмотрим диаграмму с точными столбцами:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_{X,0}(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{H})\cap\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[d, hook] \\
\mathbb{A}_{X,0}(\mathcal{H})\oplus\mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{H})\oplus\mathbb{A}_{X,2}(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{H})\oplus\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{H})\oplus\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{A}_X(\mathcal{H}) \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{H})\oplus\mathbb{A}_{X,2}(\mathcal{H}) \arrow[r] & (\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{H})+\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{H}))\oplus\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{H}) \arrow[r] & \mathbb{A}_X(\mathcal{H}),
\end{tikzcd}$$

где средняя строка — это адельный комплекс для пучка $\mathcal{H}$ на схеме X. Этот адельный комплекс вычисляет когомологии пучка $\mathcal{H}$ на схеме X. Поэтому утверждение леммы следует из длинной точной последовательности, построенной по этой диаграмме, и фактов:

$$H^1(X, \mathcal{H}) = 0$$

и

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{H}) &= \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{H}) \cap \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{H}), \\ \mathbb{A}_{X,2}(\mathcal{H}) &= \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{H}) \cap \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{14}$$

Для доказательства формул (14) заметим, что достаточно рассмотреть пучок

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nC), \quad \text{где} \quad n \geqslant 0,$$

вместо пучка $\mathcal{H}$, так как

$$\mathcal{H} = \varinjlim_{n} \left(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nC)\right),$$

и адельные группы-сомножители коммутируют с прямыми пределами. Теперь первое равенство в (14) является верным, так как его легко увидеть для локально свободного пучка, и пучок

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nC)$$

является обратимым за исключением конечного числа особых точек схемы X, которые не влияют на равенство. Второе равенство легко также увидеть для открытой подсхемы схемы X, на которой пучок

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nC)$$

локально свободен, так как X — нормальная схема. Поэтому достаточно проверить это равенство локально для особой (замкнутой) точки x схемы X, где оно следует из равенства $\widehat{\mathcal{O}}_x$-подмодулей поля $\operatorname{Frac} \widehat{\mathcal{O}}_x$:

$$\mathcal{O}_x(nC) \otimes_{\mathcal{O}_x} \widehat{\mathcal{O}}_x = \widehat{\mathcal{O}}_x\left(nC\,|_{\operatorname{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_x)}\right). \tag{15}$$

Равенство (15) является верным, так как пополнение максимального Коэно–Маколеева $\mathcal{O}_x$-модуля (или, что тоже самое в этом случае, рефлексивного модуля) является максимальным Коэно–Маколеевым $\widehat{\mathcal{O}}_x$-модулем (т.е. рефлексивным модулем). □

Для любой пары $x \in D$ на схеме X (как в разделе 3.1) имеем каноническое вложение групп

$$p_{x,D,\mathcal{F}} \; : \; K_x(\mathcal{F}) \hookrightarrow K_{x,D}(\mathcal{F}).$$

Для любой замкнутой точки $x \in X$ определим подгруппу $B_{x,C}(\mathcal{F})$ группы $K_x(\mathcal{F})$ следующим образом:

$$B_{x,C}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{D \ni x,\, D \not\subset C} p^{-1}_{x,D,\mathcal{F}} \left(p_{x,D,\mathcal{F}}(K_x(\mathcal{F})) \cap \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) \right).$$

Замечание 3. Из доказательства леммы 1 имеем, что

$$B_{x,C}(\mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{O}}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} (j_* j^* \mathcal{F})_x = \widehat{\mathcal{F}}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} (j_* j^* \mathcal{O}_X)_x.$$

Замечание 4. В [9, §14] использовалось обозначение B_x вместо $B_{x,C}$ (т.е. без указания на подсхему C).

Теперь из леммы 1 и формулы (8) непосредственно получаем

$$\begin{gathered} \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})) \\ = \Bigg(\prod_{D \subset X, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D \oplus \prod_{1 \leqslant i \leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) \Bigg) + \Bigg(\prod_{x \in U} \widehat{\mathcal{F}}_x \oplus {\prod_{x \in C}}' B_{x,C}(\mathcal{F}) \Bigg). \end{gathered} \tag{16}$$

Поэтому отображение проекции (см. формулу (12)) дает

$$\mathrm{pr}_C \left(\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})) \right) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) + {\prod_{x \in C}}' B_{x,C}(\mathcal{F}).$$

Таким образом, принимая во внимание формулу (11), получаем, что отображение φ есть следующее сюръективное отображение:

$$\begin{gathered} \mathbb{A}_X(\mathcal{F}) / \big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) \big) \\ \xrightarrow{\varphi} \Bigg(\prod_{1 \leqslant i \leqslant w} {\prod_{x \in C_i}}' K_{x,C_i}(\mathcal{F}) \Bigg) \Big/ \Bigg(\prod_{1 \leqslant i \leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) + {\prod_{x \in C}}' B_{x,C}(\mathcal{F}) \Bigg). \end{gathered}$$

3.2.2. *Вычисление ядра.* Рассмотрим теперь естественное отображение

$${\prod_{x \in D, D \not\subset C}}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}_X(\mathcal{F}) / \left(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) \right).$$

Ясно, что $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Ker} \varphi$. (В самом деле, для конструкции отображения φ возьмем $g = 0$ и подъем $\widetilde{x}$, который приходит из образа отображения ϕ).

Покажем, что $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Im} \phi$. Пусть $\varphi(x) = 0$ для элемента x из группы $\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) / \left(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) \right)$. Тогда, по конструкции, имеется элемент g из группы $\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})$, такой что

$$\widetilde{x} + g \in {\prod_{x \in D,\, D \not\subset C}}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) + \big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) \big),$$

где включение "$\in$" следует из формул (13) и (12). Поэтому имеем.

$$\widetilde{x} \in \prod_{x\in D,\, D\not\subset C}{}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) + \big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\big),$$

Таким образом, получаем, что $\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Поэтому для явного описания группы

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) / \left(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\right)$$

мы должны вычислить группу $\mathrm{Ker}\,\phi$.

Ясно, что

$$\mathrm{Ker}\,\phi = \big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\big) \cap \prod_{x\in D,\, D\not\subset C}{}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}),$$

Вычислим группу $\mathrm{Ker}\,\phi$ более явно.

Для любой пары $x \in D$ на схеме X (как в разделе 3.1) имеем канонические вложения групп

$$q_{x,D,\mathcal{F}} \;:\; K_D(\mathcal{F}) \hookrightarrow K_{x,D}(\mathcal{F}).$$

Теперь *определим* подгруппу $A_C(\mathcal{F}) \subset \prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F})$[1] как образ проекции группы $\mathrm{Ker}\,\Xi$ в группу

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}),$$

где отображение

$$\Xi \;:\; \prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) \oplus \prod_{x\in C} B_{x,C}(\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i} K_{x,C_i}(\mathcal{F}), \qquad (17)$$

и

$$\Xi(z\oplus v) = \prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i} q_{x,C_i,\mathcal{F}}(z) - \prod_{1\leqslant i\leqslant w}\prod_{x\in C_i} p_{x,C_i,\mathcal{F}}(v)$$

для элементов

$$z \in \prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) \quad \text{и} \quad v \in \prod_{x\in C} B_{x,C}(\mathcal{F}).$$

Отметим, что если $w = 1$, то есть $C = C_1$, то

$$A_C(\mathcal{F}) = \bigcap_{x\in C} q^{-1}_{x,C,\mathcal{F}}\Big(q_{x,C,\mathcal{F}}\big(K_C(\mathcal{F})\big) \cap p_{x,C,\mathcal{F}}\big(B_{x,C}(\mathcal{F})\big)\Big).$$

[1] Напомним, что $C = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant w} C_i$, где C_i — целая одномерная подсхема схемы X.

Имеем естественное вложение τ:

$$\tau \ : \ A_C(\mathcal{F}) \hookrightarrow {\prod_{x\in C}}' B_{x,C}(\mathcal{F}) \hookrightarrow {\prod_{x\in X}}' K_x(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathbb{A}_X(\mathcal{F}), \tag{18}$$

где первая стрелка обозначает отображение $z \mapsto v$ (см. определение отображения Ξ в (17)).

Имеем также естественное вложение γ:

$$\gamma \ : \ A_C(\mathcal{F}) \hookrightarrow \prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathbb{A}_X(\mathcal{F}). \tag{19}$$

Мы *утверждаем*, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\phi &= \bigl(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\bigr) \cap {\prod_{x\in D,\, D\not\subset C}}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}) \\ &\supset \prod_{D\subset X,\, D\not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod_{x\in U} \widehat{\mathcal{F}}_x + (\tau-\gamma)\bigl(A_C(\mathcal{F})\bigr). \end{aligned} \tag{20}$$

В самом деле, ясно, что первые два слагаемые из последней суммы принадлежат группе $\operatorname{Ker}\phi$. Кроме того, из конструкции получаем

$$\begin{aligned} &\tau(A_C(\mathcal{F})) \subset \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}), \quad \gamma(A_C(\mathcal{F})) \subset \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}), \\ &\qquad\text{и} \quad (\tau-\gamma)(A_C(\mathcal{F})) \subset {\prod_{x\in D,\, D\not\subset C}}' \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Поэтому,

$$(\tau-\gamma)(A_C(\mathcal{F})) \subset \operatorname{Ker}\phi.$$

С другой стороны (напомним обозначение из формулы (9)),

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\ \phi &= \mathbb{A}^U_{X,12}(\mathcal{F}) \cap \bigl(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\bigr) \\ &\subset \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap \bigl(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\bigr). \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание формулу (16), и используя тот факт, что проекция группы $\operatorname{Ker}\phi$ на любую группу $K_{x,C_i}(\mathcal{F})$ есть ноль, получаем, что в группе $\operatorname{Ker}\phi$ вклад от элементов из группы

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F})$$

должен “компенсироваться” вкладом от элементов из группы

$${\prod_{x\in C}}' B_{x,C}(\mathcal{F})$$

(для того чтобы получить ноль). Отсюда и из формулы (20) получаем, что

$$\operatorname{Ker}\phi = \prod_{D\subset X, D\not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod_{x\in U} \widehat{\mathcal{F}}_x + (\tau-\gamma)(A_C(\mathcal{F})). \tag{21}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Имеется следующая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow \frac{\prod'_{x\in D,\, D\not\subset C} \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F})}{\prod_{D\subset X,\, D\not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod_{x\in U} \widehat{\mathcal{F}}_x + (\tau-\gamma)(A_C(\mathcal{F}))}$$

$$\xrightarrow{\phi} \frac{\mathbb{A}_X(\mathcal{F})}{\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})} \xrightarrow{\varphi} \frac{\prod_{1\leqslant i\leqslant w} \prod'_{x\in C_i} K_{x,C_i}(\mathcal{F}))}{\prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) + \prod'_{x\in C} B_{x,C}(\mathcal{F})} \longrightarrow 0.$$

Вычислим теперь явно группу $A_C(\mathcal{F})$.

Предложение 1. *Имеется изоморфизм*

$$A_C(\mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{n} \varprojlim_{m<n} H^0\Big(X, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\mathcal{O}_X(nC)/\mathcal{O}_X(mC)\big)\Big), \tag{22}$$

возникающий из канонических вложений (с одинаковым образом) групп из левой и правой части формулы (22) *в группу*

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}).$$

Доказательство. Пусть J_C — пучок идеалов подсхемы C схемы X. Для целых чисел $n>m$ рассмотрим 1-мерную замкнутую подсхему

$$Y_{n-m} = (C, \mathcal{O}_X/J_C^{n-m}) \subset X$$

с топологическим пространством как у подсхемы C и структурным пучком $\mathcal{O}_X/J_C^{n-m}$. Пучок

$$\mathcal{F}_{n,m} = \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\mathcal{O}_X(nC)/\mathcal{O}_X(mC)\big)$$

является когерентным пучком на схеме Y_{n-m}. Теперь доказательство следует из вычисления группы

$$H^0(X, \mathcal{F}_{n,m}) = H^0(Y_{n-m}, \mathcal{F}_{n,m})$$

при помощи адельного комплекса для пучка $\mathcal{F}_{n,m}$ на 1-мерной схеме Y_{n-m} (см. также формулу (6) и замечание 3) и перехода к инъективному пределу по n и проективному пределу по m. Итоговый комплекс (поле перехода к инъективному пределу по n и проективному пределу по m) выглядит следующим образом:

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) \oplus {\prod_{x\in C}}' B_{x,C}(\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{1\leqslant i\leqslant w} {\prod_{x\in C_i}}' K_{x,C_i}(\mathcal{F}). \qquad \square$$

§4. Случай проективной алгебраической поверхности

Рассмотрим теперь случай проективной алгебраической нормальной неприводимой поверхности X над полем k. Напомним, что подсхема

$$C = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant w} C_i,$$

где C_i — неприводимые замкнутые кривые на X. Предположим, что

$$\widetilde{C} = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant w} m_i C_i \quad (\text{где } m_i \geqslant 1 \text{ — некоторые целые числа})$$

— обильный дивизор на поверхности X, то есть пучок $\mathcal{O}_X(l\widetilde{C})$ — очень обильный обратимый пучок на поверхности X для некоторого целого числа $l \geqslant 0$.

Предложение 2. *Имеется изоморфизм*

$$H^0(X, j_*j^*\mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{n} \varprojlim_{m<n} H^0\Big(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\mathcal{O}_X(nC)/\mathcal{O}_X(mC)\big)\Big),$$

возникающий из композиции отображений пучков

$$j_*j^*\mathcal{F} \simeq \varinjlim_{n} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nC) \longrightarrow \varinjlim_{n} \varprojlim_{m<n} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\mathcal{O}_X(nC)/\mathcal{O}_X(mC)\big).$$

Доказательство. Рассмотрим дивизор $C' = l\widetilde{C}$, такой что обратимый пучок $\mathcal{O}_X(C')$ очень обилен. Ясно, что

$$\varinjlim_{n} \varprojlim_{m<n} H^0\Big(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\mathcal{O}_X(nC)/\mathcal{O}_X(mC)\big)\Big) \simeq \varinjlim_{r} \varprojlim_{s<r} H^0\Big(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\mathcal{O}_X(rC')/\mathcal{O}_X(sC')\big)\Big),$$

так как имеется изоморфизм соответствующих IndPro систем.

Нормальная поверхность является Коэно–Маколеевой схемой. Так как дивизор C' очень обилен, то из [18, глава III, теорема 7.6] имеем

$$H^i(X, \mathcal{F}(sC')) = 0, \quad \text{если} \ \ i \leqslant 1 \ \ \text{и} \ \ s \ll 0.$$

Теперь из применения этих равенств к точной последовательности пучков на поверхности X:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(sC') \longrightarrow \mathcal{F}(rC') \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{O}_X(rC')/\mathcal{O}_X(sC')\right) \longrightarrow 0.$$

получаем изоморфизм

$$\varinjlim_r \varprojlim_{s<r} H^0\left(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{O}_X(rC')/\mathcal{O}_X(sC')\right)\right) \simeq \varinjlim_r H^0\left(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(rC')\right).$$

Окончательно имеем

$$\varinjlim_r H^0\left(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(rC')\right) \simeq H^0(X, j_* j^* \mathcal{F}). \qquad \square$$

Из предложений 1 и 2 следует, что

$$A_C(\mathcal{F}) = H^0(X, j_* j^* \mathcal{F}) \subset \mathcal{F}_\eta,$$

где η — общая точка поверхности X. Поэтому для элемента a из группы $A_C(\mathcal{F})$ имеем

$$(\tau - \gamma)(a) = I(a) - J(a),$$

где элемент $I(a)$ — образ элемента a в группе $\prod_{D \subset X,\, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D$ при диагональном вложении, и $J(a)$ — образ элемента a в группе $\prod_{x \in U} \widehat{\mathcal{F}}_x$ при диагональном вложении.[2] Таким образом, получаем, что

$$(\tau - \gamma)(A_C(\mathcal{F})) \ \subset \prod_{D \subset X,\, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod_{x \in U} \widehat{\mathcal{F}}_x.$$

Поэтому из формулы (21) получаем

$$\operatorname{Ker} \phi = \prod_{D \subset X,\, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod_{x \in U} \widehat{\mathcal{F}}_x. \tag{23}$$

Таким образом, из формулы (23) и теоремы 1 выводим теорему 2.

Теорема 2. *Пусть* $\widetilde{C} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant w} m_i C_i$ *(здесь* $m_i \geqslant 1$ *некоторые целые числа) — обильный дивизор на нормальной проективной неприводимой алгебраической поверхности* X *над полем* k*, где* C_i *— неприводимые кривые. Рассмотрим открытую подсхему* $U = X \setminus C$*, где* $C = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant w} C_i$*. Для*

[2]Напомним также, что отображения τ и γ были определены формулами (18) и (19) соответственно.

любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X имеется следующая точная последовательность.

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow \frac{\prod'_{x\in D,\, D\not\subset C} \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F})}{\prod\limits_{D\subset X,\, D\not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod\limits_{x\in U} \widehat{\mathcal{F}}_x} &\xrightarrow{\phi} \frac{\mathbb{A}_X(\mathcal{F})}{\mathbb{A}_{X,\,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,\,02}(\mathcal{F})} \\
&\xrightarrow{\varphi} \frac{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant w} \prod'_{x\in C_i} K_{x,\,C_i}(\mathcal{F}))}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant w} K_{C_i}(\mathcal{F}) + \prod'_{x\in C} B_{x,\,C}(\mathcal{F})} \longrightarrow 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Замечание 5. Как было указано в предисловии, теорема 2 была сформулирована как теорема 3 в [9] для гладкой проективной связной алгебраической поверхности X, пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, и если все числа $m_i = 1$. Но доказательство в [9] было некорректно: оно содержало пробелы. В частности, дополнительный член $(\tau - \gamma)(A_C(\mathcal{F}))$ из теоремы 1 не был рассмотрен.

Из теоремы 2 явно видим, что k-векторное пространство

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) / \big(\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F})\big)$$

является линейно компактным k-векторным пространством (или компактным топологическим пространством, если поле k конечно.) В самом деле, первый ненулевой член в точной последовательности (24) может быть переписан как

$$\frac{\prod'_{x\in D,\, D\not\subset C} \mathcal{O}_{K_{x,D}}(\mathcal{F})}{\prod\limits_{D\subset X,\, D\not\subset C} \widehat{\mathcal{F}}_D + \prod\limits_{x\in U} \widehat{\mathcal{F}}_x} \simeq \frac{\prod\limits_{D\subset X,\, D\not\subset C} \left(\left(\frac{\prod'_{x\in D} \mathcal{O}_{K_{x,D}}}{\widehat{\mathcal{O}}_D} \right) \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_D} \widehat{\mathcal{F}}_D \right)}{\prod\limits_{x\in U} \widehat{\mathcal{F}}_x},$$

и k-векторные пространства $\widehat{\mathcal{F}}_x$ для любой точки $x \in X$ и k-векторные пространства

$$\Big(\prod'_{x\in D} \mathcal{O}_{K_{x,D}} \Big) / \widehat{\mathcal{O}}_D$$

для любой неприводимой кривой $D \subset X$ являются линейно компактными k-векторными пространствами, см. [9, замечание 26]. Последний ненулевой член в точной последовательности (24) может быть переписан аналогично и при помощи тех же самых аргументов, что и в теореме 4 из [9]. (На двумерном локальном поле и, более общо, на группе $\mathbb{A}_X$ имеется естественная топология индуктивных и проективных пределов, впервые введенная А. Н. Паршиным в [19] для случая $\mathbb{F}_q((t_1))\ldots((t_n))$, см. также ее свойства, например, в [14, §3.2] и [20, §§2,3]).

Под конец мы напомним, что используя эти и другие вычисления, в [9, §14.3] была предложена аналогия для первого и последнего ненулевых членов в точной последовательности (24) в случае простейшей арифметической поверхности $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. В частности, последний ненулевой член должен был бы быть равен

$$\mathbb{R}((t))/\left(\mathbb{Z}((t)) + \mathbb{R}[t^{-1}]\right).$$

Это будет подтверждено явными вычислениями с арифметическими аделями на арифметических поверхностях в [10]. (Арифметические адели, то есть адели на арифметической поверхности с учетом слоев над архимедовыми точками базы, были введены в [9, пример 11]. Смотрите также применения в [21, §4]).

Список литературы

[1] Касселс Дж., *Глобальные поля*, Алгебраическая теория чисел, Мир, М., 1969.

[2] Паршин А. Н., *К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **40** (1976), №4, 736–773.

[3] Бейлинсон А. А., *Вычеты и адели*, Функц. анал. и его прил. **14** (1980), №1, 44–45.

[4] Huber A., *On the Parshin–Beilinson adeles for schemes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **61** (1991), 249–273.

[5] Osipov D. V., *n-dimensional local fields and adeles on n-dimensional schemes*, Surveys in contemporary mathematics, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 347, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 131–164.

[6] Parshin A. N., *Representations of higher adelic groups and arithmetic*, Proc. Internat. Congress of Mathematicians. Vol. 1, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, pp. 362–392.

[7] Паршин А. Н., *Вопросы и замечания к программе Ленглендса*, Успехи мат. наук **67** (2012), №3, 115–146.

[8] Паршин А. Н., *О гипотезе прямого образа в относительной программе Ленглендса*, Успехи мат. наук **70** (2015), №5, 181–182.

[9] Осипов Д. В., Паршин А. Н., *Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей.* II, Изв. РАН. Сер. мат. **75** (2011), №4, 91–164.

[10] Osipov D. V., *Arithmetic surfaces and adelic quotient groups*, preprint (2017).

[11] Burban I., Drozd Yu., *Maximal Cohen-Macaulay modules over surface singularities*, Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, pp. 101–166.

[12] Osipov D., Zhu X., *The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws*, J. Algebraic Geom. **25** (2016), no. 4, 703–774.

[13] Горчинский С. О., Осипов Д. В., *Явная формула для многомерного символа Конту-Каррера*, Успехи мат. наук **70** (2015), №1, 183–184.

[14] Горчинский С. О., Осипов Д. В., *Многомерный символ Конту–Каррера: локальная теория*, Мат. сб. **206** (2015), №9, 21–98.

[15] Горчинский С. О., Осипов Д. В., *Многомерный символ Конту–Каррера и непрерывные автоморфизмы*, Функц. анал. и его прил. **50** (2016), №4, 26–42.

[16] Matsumura H., *Commutative algebra*, Second ed., Math. Lecture Note Ser., vol. 56, Benjamin/Cummings Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1980.

[17] Осипов Д. В., *Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий*, Изв. РАН. Сер. мат. **65** (2001), №5, 91–128.
[18] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
[19] Паршин А. Н., *Локальная теория полей классов*, Тр. Мат. ин-та СССР **165** (1984), 143–170.
[20] Горчинский С. О., Осипов Д. В., *Непрерывные гомоморфизмы между алгебрами итерированных рядов Лорана над кольцом*, Тр. Мат. ин-та РАН **294** (2016), 54–75.
[21] Osipov D. V., *Second Chern numbers of vector bundles and higher adeles*, Bull. Korean Math. Soc. **54** (2017), no. 5, 1699–1718.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
119991 Москва,
ул. Губкина, д. 8
E-mail: d_osipov@mi.ras.ru

Поступило 01 июля 2017 г.