С. Б. Вакарчук, О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 14–25

Принимая во внимание (12) и нижнюю оценку в (3) для с. в. Y_k, находим, что при $x > c$

$$ax^{-q} \leqslant \sum_{j=1}^{3} P[|S_j| \geqslant x/3]. \tag{18}$$

С помощью (17), (13) и неравенства Гёльдера получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_n\right| \leqslant \alpha_n n^{1-1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{1/q} = \alpha_n n^{1-1/q} < x_n/4.$$

Учитывая определение с. в. $Z_k^{(n)}$, находим, что $P[|S_2| \geqslant x_n/3] = 0$. Далее, согласно (16), (14) и (3) $P[U_k^{(n)} \neq 0] = P[|Y_k - X_k| \geqslant \alpha_n] \leqslant P[|Y_k| \geqslant \beta_n] \leqslant \leqslant b\beta_n^{-q} \leqslant ax_n^{-q}/(2n)$. Поэтому

$$P[|S_3| \geqslant x_n/3] \leqslant \sum_{k=1}^{n} P[U_k^{(n)} \neq 0] \leqslant ax_{nb}^{-}/2.$$

Из полученных соотношений и (18) следует $P[|S_1| \geqslant x_n/3] \geqslant ax_n^{-q}/2$. Отсюда

$$\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right\|^*_{L_{q,\infty}(\Omega)}\right)^q \geqslant 3^{-q}a/2$$

при условии (17). Это приводит к нижней оценке в (4). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Esseen K. G., Janson S. On moment conditions for normed sums of independent variables and martingale differences // Stochast. Proc. and Appl.— 1985.— V. 19.— № 1.—P. 173—182.
2. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
3. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 336 с.
4. Rodin V. A., Semyonov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. math.— 1975.— V. 1.— № 3.— P. 207—222.
5. Лоэв М. Теория вероятностей.— М.: Ин. лит., 1962.— 719 с.
6. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды.— М.: Мир, 1973.—302 с.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.— 524 с.
8. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М.: Наука, 1985.— 368 с.

г. Хабаровск

Поступили
первый вариант 18.11.1988
окончательный вариант 14.11.1990

С. Б. Вакарчук

УДК 517.512

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

В последние годы повышенный интерес и внимание математиков, занимающихся вопросами теории аппроксимации функций нескольких вещественных переменных, привлекают бесконечномерные подпространства, которые состоят из форм, включающих тензорные произведения функций меньшего числа переменных (см. [1] — [4]). Их использование в качестве аппроксимирующих подпространств дает некоторые преимущества по сравнению с традиционными методами (напр., по величине оценки погрешности приближения, по возможности более полного использования результатов, полученных в одномерном случае и т. д.) (см. [5] — [8]). На примере [9] очевидно, что аналогичные конструкции с успехом можно применять и в задачах приближения аналитических функций многих комплексных переменных. Данное сообщение также подтверждает это. В нем получены предельные равенства, связывающие порядок и тип целой функции двух переменных с ее наилучшими приближениями в пространстве Харди $H^p(U^2)$ элементами подпространства $G(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_m)$, построенного по тем же принципам, что и в [3], [7]. В тезисной форме эти результаты изложены в [10]. Следует отметить, что при аппроксимации полиномами аналитических функций одного переменного в пространстве $A_p(|z|<1)$ подобные задачи рассматривались A. R. Reddy [11] ($p=2$) и И. И. Ибрагимовым, Н. И. Шихалиевым [12] ($1 \leqslant p \leqslant \infty$).

§ 1. Необходимые понятия и обозначения

Пусть $(z_1, z_2) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})$ — точки двумерного комплексного пространства C^2; $U^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, \; |z_2| < 1\}$ и $\Gamma^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = |z_2| = 1\}$ — соответственно единичный бицилиндр и его остов. Через $H^p(U^2)\,(0 < p \leqslant \infty)$ обозначают пространство всех аналитических в U^2 функций $f(z_1, z_2)$, для которых

$$\|f\|_p = \lim_{r_j \to 1-0\ (j=1,2)} M_p(r_1, r_2; f) < \infty, \tag{1}$$

где

$$M_p(r_1, r_2; f) = \left\{\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})|^p \, d\theta_1 d\theta_2\right\}^{1/p}.$$

Напомним, что $M_p(r_1, r_2; f) \leqslant M_p(r_1^*, r_2^*; f)$ при $0 < r_j \leqslant r_j^* < 1\,(j=1,2)$. Из [13] следует, что подобно одномерному случаю функцию $f \in H^p(U^2)$ $(0 < p \leqslant \infty)$ можно полагать заданной почти всюду на Γ^2, где имеет место вложение $H^p(U^2) \subset\!\!\!\to L^p(\Delta^2)$ $(\Delta^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$. Здесь $L^p(\Delta^2)$ — множество всех комплекснозначных функций $f(\theta_1, \theta_2)$, удовлетворяющих условию $\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta_1, \theta_2)|^p d\theta_1 d\theta_2\right\}^{1/p} < \infty$.

Все дальнейшие рассуждения будут проведены для случая $1 \leqslant p \leqslant \infty$, когда $H^p(U^2)$ — банахово пространство с нормой (1), которую в связи с [13] иногда записывают в виде

$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|^p d\theta_1 d\theta_2\right\}^{1/p}.$$

Пусть $f(z_1, z_2) = \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} z_1^j z_2^k$ является целой функцией двух комплексных переменных. Полагая $M(r, r; f) = \max\{|f(z_1, z_2)| : |z_1| = |z_2| = r\}$, всюду далее будем пользоваться данными в [14] определениями порядка ρ и типа σ целой функции $f(z_1, z_2)$, которые являются удобными характеристиками ее роста с возрастанием радиуса бицилиндра

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln M(r, r; f)}{\ln r}, \quad \sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r, r; f)}{r^\rho}.$$

Там же приведены формулы, выражающие порядок и тип целой функции через ее коэффициенты $c_{jk}(f)$:

$$\rho = \overline{\lim_{j+k \to \infty}} \frac{(j+k)\ln(j+k)}{-\ln|c_{jk}(f)|}, \quad (2) \qquad (\rho e \sigma)^{1/\rho} = \overline{\lim_{j+k \to \infty}} (j+k)^{1/\rho} \sqrt[j+k]{|c_{jk}(f)|}. \quad (3)$$

Следует отметить, что для порядка ρ и типа σ целой функции $f(z_1, z_2)$ А. А. Темляковым [15] были даны определения, отличающиеся от приведенных в [14], которые также являются удобными характеристиками роста функции при увеличении радиуса гиперконуса. Несмотря на некоторые различия в [14] и [15] при определении ρ и σ, в [14] была установлена возможность применения результатов [15] для получения формул (2) и (3). Это указывает на эквивалентность определений, принятых С. А. Ереминым и А. А. Темляковым.

Поскольку целая функция f аналитична во всем пространстве C^2, то, очевидно,

$$\overline{\lim_{j+k\to\infty}} \sqrt[j+k]{|c_{jk}(f)|}=0. \tag{4}$$

Пусть $(\boldsymbol{Z}_1, \|\cdot\|_{Z_1})$ и $(\boldsymbol{Z}_2, \|\cdot\|_{Z_2})$ — некоторые линейные нормированные пространства аналитических функций одного комплексного переменного, а $\mathfrak{N}_N$ и $\mathfrak{M}_M$ — их конечномерные подпространства ($\mathfrak{N}_N \subset \boldsymbol{Z}_1$, $\mathfrak{M}_M \subset \boldsymbol{Z}_2$) с базисами $\{a_0(z_1), a_1(z_1), \dots, a_N(z_1)\}$, $\{b_0(z_2), b_1(z_2), \dots, b_M(z_2)\}$ соответственно. Для упрощения записи нормированные пространства обозначим символами $\boldsymbol{Z}_1$ и $\boldsymbol{Z}_2$.

Полагаем

$$G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)=\boldsymbol{Z}_2\otimes\mathfrak{N}_N+\boldsymbol{Z}_1\otimes\mathfrak{M}_M, \tag{5}$$

где $\otimes$ и $+$ суть операции соответственно тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (5)

$$g_{N,M}(z_1, z_2)=\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(z_2)\,a_j(z_1)+\sum_{k=0}^{M}\psi_k(z_1)\,b_k(z_2),$$

где $\{\varphi_j(z_2)\}_{j=0}^{N}\subset\boldsymbol{Z}_2$, $\{\psi_k(z_1)\}_{k=0}^{M}\subset\boldsymbol{Z}_1$, будем называть обобщенными полиномами [7], [8].

Пусть $\boldsymbol{Z}$ — линейное нормированное пространство аналитических функций двух комплексных переменных, содержащее множество $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$. Обозначим $\mathbf{E}(f;\ g_{N,M};\ \boldsymbol{Z})=\|f-g_{N,M}\|_Z$, $\mathbf{E}(f,\ G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M),\ \boldsymbol{Z})=$ $=\inf\{\mathbf{E}(f; g_{N,M}; \boldsymbol{Z}): g_{N,M}\in G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)\}$.

Всюду далее полагаем $\boldsymbol{Z}=H^p(U^2)$, $\boldsymbol{Z}_j=H^p(U^1)\,(j=1, 2)$, $\mathfrak{N}_N=\mathbf{P}_N$, $\mathfrak{M}_M=\mathbf{P}_M$, где $\mathbf{P}_k$ — подпространство полиномов степени, не превосходящей k. Это означает, что при изучении вопросов, связанных с наилучшим приближением элементами множества $G(\mathbf{P}_N, \mathbf{P}_M)$, напр., в пространстве $H^q(U^2)$, имеем

$$G(\mathbf{P}_N, \mathbf{P}_M)=\{g_{N,M}: g_{N,M}(z_1, z_2)=\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(z_2)z_1^j+\sum_{k=0}^{M}\psi_k(z_1)z_2^k,$$

$$\varphi_j(z_2)\in H^q(U^1)\,(j=0, 1, \dots, N),\quad \psi_k(z_1)\in H^q(U^1)\ (k=0,\ 1, \dots, M)\}.$$

Для упрощения обозначений запишем $\mathbf{E}_{N,M}(f)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{E}(f, G(\mathbf{P}_N, \mathbf{P}_M), H^p(U^2))$. Под обобщенным полиномом Тейлора порядка $\{n-1,\ m-1\}$ $(n,\ m=1, 2, \dots)$ аналитической в U^2 функции $f(z_1, z_2)=\sum_{j,k=0}^{\infty}c_{jk}(f)z_1^jz_2^k$ будем понимать следующее выражение:

$$T_{n-1,m-1}(z_1, z_2; f)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_{jk}(f)z_1^jz_2^k+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}c_{jk}(f)z_1^jz_2^k-$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}c_{jk}(f)z_1^jz_2^k. \tag{6}$$

Очевидно, $T_{n-1,m-1}\in G(\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_{m-1})$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Среди всех обобщенных полиномов вида*

$$g_{n-1,m-1}(z_1, z_2)=\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_j(z_2)z_1^j+\sum_{k=0}^{m-1}\psi_k(z_1)z_2^k \quad (n, m=1, 2, \ldots), \tag{7}$$

принадлежащих множеству $G(\mathbf{P}_{n-1}; \mathbf{P}_{m-1})$, *наилучшее приближение функции* $f\in H^2(U^2)$ *доставляет ее обобщенный полином Тейлора порядка* $\{n-1, m-1\}$.

Доказательство. Используя уравнения замкнутости для одномерного и двумерного случаев [16], запишем

$$\mathrm{E}^2(f; g_{n-1,m-1}; H^2(U^2))=\sum_{j,k=0}^{\infty}|c_{jk}(f)|^2+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(\varphi_j)|^2+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}|c_j(\psi_k)|^2-$$

$$-2\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Re}\,[c_{jk}(f)\overline{c_k(\varphi_j)}]+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}\,[c_{jk}(f)\overline{c_j(\psi_k)}]-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{Re}\,[c_k(\varphi_j)\overline{c_j(\psi_k)}]\right\}.$$

Производя в данном выражении перегруппировку слагаемых, после несложных преобразований получим

$$\mathrm{E}^2(f; g_{n-1,m-1}; H^2(U^2))=\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}|c_{jk}(f)|^2+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=m}^{\infty}|c_{jk}(f)-c_k(\varphi_j)|^2+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=n}^{\infty}|c_{jk}(f)-c_j(\psi_k)|^2+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}|c_{jk}(f)-c_k(\varphi_j)-c_j(\psi_k)|^2.$$

Отсюда следует, что выражение $\mathrm{E}^2(f; g_{n-1,m-1}; H^2(U^2))$ достигает минимума при:

$$c_k(\varphi_j)=c_{jk}(f)\,(j=0, 1, \ldots, n-1;\ \ k=m, m+1, \ldots), \tag{8}$$

$$c_j(\psi_k)=c_{jk}(f)\,(k=0, 1, \ldots, m-1;\ j=n,\ n+1, \ldots), \tag{9}$$

$$c_k(\varphi_j)+c_j(\psi_k)=c_{jk}(f)\,(j=0, 1, \ldots, n-1;\ \ k=0, 1, \ldots, m-1). \tag{10}$$

Подставляя в (7) вместо $\varphi_j(z_2)$ и $\psi_k(z_1)$ их разложения в ряд Тейлора в окрестности точки 0 и учитывая (8)—(10), получаем (6). Лемма доказана.

Следствие. Для произвольной функции $f\in H^2(U^2)$ и $\overline{f}\in G(\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_{m-1})$ справедливо равенство $\mathrm{E}_{n-1,m-1}(f)_2=\{\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}|c_{jk}(f)|^2\}^{1/2}$ $(n, m=1, 2, \ldots)$.

Предложение 1. *Пусть* $0<p\leqslant q$ *и функция* $f(z_1, z_2)\in H^p(U^2)$. *Тогда имеет место следующее неравенство*:

$$M_q(r_n, r_m; f)\leqslant(nm)^{1/p-1/q}\|f\|_p \quad (n, m=2, 3, \ldots),$$

где $r_k=1-1/k$.

Доказательство. Известно (см., напр., [17]), что для модуля аналитической функции $f(z)\in H^p(U^1)$ выполняется неравенство

$$(1-|z|^2)^{1/p}|f(z)|\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}, \tag{11}$$

где z — произвольная точка из $U^1=\{z:|z|<1\}$. При произвольном фиксированном $z_2(|z_2|<1)$ из (11) получаем

$$\sup\{|f(z_1, z_2)|:|z_1|=r_n\}\leqslant n^{1/p}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta_1}, z_2)|^p d\theta_1\right\}^{1/p}.$$

Применяя (11) к $f(e^{i\theta_1}, z_2)$, где θ_1 — произвольная фиксированная точка из $[0, 2\pi)$, имеем

$$\sup\{|f(e^{i\theta_1}, z_2)| : |z_2| = r_m\} \leqslant m^{1/p}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|^p d\theta_2\right\}^{1/p}.$$

Сопоставив два последних неравенства, запишем

$$\sup\{|f(z_1, z_2)| : |z_1| = r_n, |z_2| = r_m\} \leqslant (nm)^{1/p}\|f\|_p. \tag{12}$$

Используя (12), получаем

$$M_q(r_n, r_m; f) = \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_n e^{i\theta_1}, r_m e^{i\theta_2})|^{q-p}|f(r_n e^{i\theta_1}, r_m e^{i\theta_2})|^p d\theta_1 d\theta_2\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant (nm)^{1/p-1/q}\|f\|_p^{1-p/q}\|f\|_p^{p/q} = (nm)^{1/p-1/q}\|f\|_p.$$

Предложение 1 доказано.

Под $J_n(t)$ будем подразумевать ядро Джексона порядка n, а под $\omega_{1,1}(f; \delta_1, \delta_2)_p$ $(\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — смешанный интегральный модуль непрерывности функции $f(z_1, z_2) \in H^p(U^2)$. Напомним (см., напр., [18], [19]), что

$$J_n(t) = \frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 = \frac{1}{2}\sum_{k=-(2n-2)}^{2n-2} j_k e^{ikt} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где j_k — некоторые числа;

$$\omega_{1,1}(f; \delta_1, \delta_2)_p = \sup\left\{\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i(\theta_1+h_1)}, e^{i(\theta_2+h_2)}) - f(e^{i(\theta_1+h_1)}, e^{i\theta_2}) -\right.\right.$$

$$\left.\left.- f(e^{i\theta_1}, e^{i(\theta_2+h_2)}) + f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|^p d\theta_1 d\theta_2\right]^{1/p} : |h_j| \leqslant \delta_j \ (j = 1, 2)\right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для аналитической на множестве U^1 функции $f(z)$ оператор $P_{J_n} f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(ze^{it}) J_n(t)\,dt$ является многочленом степени $2(n-1)$.

Символами P_{J_n, z_1} и P_{J_m, z_2} будем обозначать операторы с ядрами Джексона J_n и J_m, которые действуют на аналитическую в U^2 функцию $f(z_1, z_2)$ соответственно как на функцию от z_1 (при фиксированном z_2) и как на функцию от z_2 (при фиксированном z_1). Очевидно, выражение $P_{J_n, J_m} f(z_1, z_2) = P_{J_n, z_1} f(z_1, z_2) + P_{J_m, z_2} f(z_1, z_2) - P_{J_n, z_1} \cdot P_{J_m, z_2} f(z_1, z_2)$ является обобщенным многочленом, принадлежащим $G(\mathbf{P}_{2n-2}, \mathbf{P}_{2m-2})$.

Предложение 2. *Пусть функция* $f(z_1, z_2) \in H^p(U^2)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. *Тогда справедливо неравенство* $\|f - P_{J_n, J_m} f\|_p \leqslant 36\omega_{1,1}(f; 1/n, 1/m)_p$.

Доказательство. Так как имеет место соотношение

$$f(z_1, z_2) - P_{J_n, J_m} f(z_1, z_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(z_1, z_2) - f(z_1 e^{it_1}, z_2) -$$

$$- f(z_1, z_2 e^{it_2}) + f(z_1 e^{it_1}, z_2 e^{it_2})] J_n(t_1) J_m(t_2)\,dt_1 dt_2,$$

то, используя обобщенное неравенство Минковского [19], запишем

$$\|f - P_{J_n, J_m} f\|_p \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_{1,1}(f; |t_1|, |t_2|)_p J_n(t_1) J_m(t_2)\,dt_1 dt_2.$$

Для произвольных чисел $k_1>0$, $k_2>0$ выполняется неравенство $\omega_{1,1}(f;\ k_1\delta_1,\ k_2\delta_2)_p \leqslant (k_1+1)(k_2+1)\,\omega_{1,1}(f;\ \delta_1,\ \delta_2)_p$. Тогда на основании [18] (с. 129) получаем

$$\|f-P_{J_n,J_m}f\|_p \leqslant \omega_{1,1}\left(f;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\right)_p \left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (nt+1)J_n(t)\,dt\right\}\times$$
$$\times\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (mt+1)J_m(t)\,dt\right\} \leqslant 36\omega_{1,1}\left(f;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\right)_p.$$

Предложение 2 доказано.

Пусть

$$\mathbf{P}_{n,m}=\left\{p_{n,m}:p_{n,m}(z_1,\ z_2)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}c_{jk}z_1^jz_2^k,\ \ c_{jk}\in C\right\}.$$

Через $E_{n,m}(f)_p(p\geqslant 1)$ обозначим наилучшее приближение функции $f\in H^p(U^2)$ элементами множества $\mathbf{P}_{n,m}$, т. е. $E_{n,m}(f)_p=\inf\{\|f-p_{n,m}\|_p:p_{n,m}\in\mathbf{P}_{n,m}\}$. Под $\omega_1(f,\delta)_p(p\geqslant 1,\ \delta>0)$ понимаем интегральный модуль непрерывности функции $f(z)\in H^p(U^1):\omega_1(f,\ \delta)_p=\sup\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i(\theta+h)})-f(e^{i\theta})|^pd\theta\right]^{1/p}:|h|\leqslant\delta\right\}$.

Предложение 3. *Для произвольной функции* $g_{n,m}\in G(\mathbf{P}_n,\ \mathbf{P}_m)\subset H^p(U^2)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ $E_{\nu,\mu}(g_{n,m})_p\to 0$ *при* $\nu,\ \mu\to\infty$.

Действительно, построим для функции $g_{n,m}(z_1,\ z_2)=\sum_{j=0}^{n}\varphi_j(z_2)z_1^j+\sum_{k=0}^{m}\psi_k(z_1)z_2^k$ последовательность полиномов

$$P_r^*(z_1,\ z_2;\ g_{n,m})=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n}z_1^j\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_j(z_2e^{it})J_{(2m)^r+1}(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}z_2^k\int_{-\pi}^{\pi}\psi_k(z_1e^{it})J_{(2n)^r+1}(t)\,dt\quad(r=1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, $P_r^*\in\mathbf{P}_{2(2n)^r,\,2(2m)^r}$. Используя обобщенное неравенство Минковского и свойства ядер Джексона [18], получаем оценку сверху:

$$\|g_{n,m}-P_r^*(g_{n,m})\|_p\leqslant 6\left\{\sum_{j=0}^{n}\omega_1\left(\varphi_j;\ \frac{1}{(2m)^r+1}\right)_p+\sum_{k=0}^{m}\omega_1\left(\psi_k;\ \frac{1}{(2n)^r+1}\right)_p\right\}.$$

Следовательно, при $r\to\infty$ $\|g_{n,m}-P_r^*(g_{n,m})\|_p\to 0$. Поскольку $E_{2(2n)^r,\,2(2m)^r}(g_{n,m})_p\leqslant$ $\leqslant\|g_{n,m}-P_r^*(g_{n,m})\|_p$, то отсюда получаем, что $E_{\nu,\mu}(g_{n,m})\to 0$ при $\nu,\ \mu\to\infty$. Предложение 3 доказано.

Обозначим

$$\mathbf{E}_{n,m}(r_n,\ r_m;\ f)_p=\inf\{M_p(r_n,\ r_m;\ f^{u'}-g_{n,m}):g_m\in G(\mathbf{P}_n,\ \mathbf{P}_m)\subset H^p(U^2)\}.$$

Лемма 2. *Пусть функция* $f(z_1,z_2)\in H^q(U^2)(1<q\leqslant\infty)$ *и число* $p\in[1,\ q)$. *Тогда*

$$\mathbf{E}_{n,m}(r_n,\ r_m;\ f)_q\leqslant C\,\{(nm)^{1/p-1/q}\,\mathbf{E}_{n,m}(f)_p+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}(\nu\mu)^{1/p-1/q-1}\,\mathbf{E}_{\nu,\mu}(f)_p+$$
$$+m^{1/p-1/q}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{1/p-1/q-1}\,\mathbf{E}_{\nu,m}(f)_p+n^{1/p-1/q}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\mu^{1/p-1/q-1}\,\mathbf{E}_{n,\mu}(f)_p\},\qquad(13)$$

где константа C *не зависит от* n *и* m.

Доказательство. По аналогии с [1], [2] нетрудно показать, что $G(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_m)$ является замкнутым множеством. Как следует из общих положений, приведенных в [19] (с. 54), ограниченное множество $W \subset H^p(U^2)$ будет компактным тогда и только тогда, когда $\sup \{E_{n,m}(f)_p : f \in W\} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Используя предложение 3, заключаем, что $G(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_m)$ — локально-компактное множество. Но поскольку любое замкнутое локально-компактное множество в линейном нормированном пространстве является множеством существования элемента наилучшего приближения (см., напр., [20]), то для каждого $f \in H^p(U^2)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ существует по крайней мере один элемент $g^*_{n,m} \in G(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_m)$ такой, что $\| f - g^*_{n,m} \|_p = \mathrm{E}_{n,m}(f)_p$.

Используя предложение 2, получаем, что $\mathrm{E}_{n,m}(f)_p \to 0$ при $n + m \to \infty$. Поэтому в смысле сходимости в $H^p(U^2)$ функцию $f(z_1, z_2)$ можно представить в виде

$$f(z_1, z_2) = g^*_{n,m}(z_1, z_2) + \sum_{j,k=0}^{\infty} Q^{n,m}_{j,k}(z_1, z_2) + \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{Q}^{n,m}_j(z_1, z_2) + \sum_{k=0}^{\infty} Q^{*n,m}_k(z_1, z_2), \tag{14}$$

где

$$Q^{n,m}_{j,k}(z_1, z_2) = g^*_{2^{j+1}n,\, 2^{k+1}m}(z_1, z_2) - g^*_{2^{j+1}n,\, 2^k m}(z_1, z_2) - g^*_{2^j n,\, 2^{k+1}m}(z_1, z_2) +$$

$$+ g^*_{2^j n,\, 2^k m}(z_1, z_2), \quad \widetilde{Q}^{n,m}_j(z_1, z_2) = g^*_{2^{j+1}n,\, m}(z_1, z_2) - g^*_{2^j n,\, m}(z_1, z_2), \quad Q^{*n,m}_k(z_1, z_2) =$$

$$= g^*_{n,\, 2^{k+1}m}(z_1, z_2) - g^*_{n,\, 2^k m}(z_1, z_2).$$

Очевидно, что $\| Q^{n,m}_{j,k} \|_p \leqslant 4\mathrm{E}_{2^j n,\, 2^k m}(f)_p$, $\| \widetilde{Q}^{n,m}_j \|_p \leqslant 2\mathrm{E}_{2^j n,\, m}(f)_p$, $\| Q^{*n,m}_k \|_p \leqslant 2\mathrm{E}_{n,\, 2^k m}(f)_p$. Используя эти неравенства и предложение 1, для $q \geqslant p$ имеем

$$M_q(r_n, r_m;\, Q^{n,m}_{j,k}) \leqslant M_q(r_{2^j n}, r_{2^k m};\, Q^{n,m}_{j,k}) \leqslant 4(2^{j+k}nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{2^j n,\, 2^k m}(f)_p,$$

$$M_q(r_n, r_m;\, \widetilde{Q}^{n,m}_j) \leqslant M_q(r_{2^j n}, r_m;\, \widetilde{Q}^{n,m}_j) \leqslant 2(2^j nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{2^j n,\, m}(f)_p,$$

$$M_q(r_n, r_m;\, Q^{*n,m}_k) \leqslant M_q(r_n, r_{2^k m};\, Q^{*n,m}_k) \leqslant 2(2^k nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{n,\, 2^k m}(f)_p.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} M_q(r_{2^j n}, r_{2^k m};\, Q^{n,m}_{j,k}) + \sum_{j=0}^{\infty} M_q(r_{2^j n}, r_m;\, \widetilde{Q}^{n,m}_j) + \sum_{k=0}^{\infty} M_q(r_n, r_{2^k m};\, Q^{*n,m}_k) \leqslant$$

$$\leqslant 24(nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{n,m}(f)_p + \sum_{j=1}^{\infty} (2^j nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{2^j n,\, m}(f)_p + \sum_{k=1}^{\infty} (2^k nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{n,\, 2^k m}(f)_p +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{\infty} (2^{j+k}nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{2^j n,\, 2^k m}(f)_p. \tag{15}$$

Для последнего слагаемого в правой части данного неравенства запишем оценку сверху:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} (\nu\mu)^{1/p-1/q-1}\, \mathrm{E}_{\nu,\mu}(f)_p = \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^j n+1}^{2^{j+1}n} \sum_{\mu=2^k m+1}^{2^{k+1}m} (\nu\mu)^{1/p-1/q-1}\, \mathrm{E}_{\nu,\mu}(f)_p \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j,k=0}^{\infty} (2^{j+k+2}nm)^{1/p-1/q-1} (2^{j+k}nm)\, \mathrm{E}_{2^{j+1}n,\, 2^{k+1}m}(f)_p =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^{\infty} (2^{j+k}nm)^{1/p-1/q}\, \mathrm{E}_{2^j n,\, 2^k m}(f)_p.$$

Записывая аналогичные оценки для второго и третьего слагаемых в правой части неравенства (15) и учитывая соотношение (14), получаем оценку (13). Лемма 2 доказана.

§ 3. Основные утверждения

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z_1, z_2) \in H^2(U^2)$. *Условия*:

$$\text{a)} \lim_{n+m\to\infty} \{\mathbf{E}_{n,m}(f)_2\}^{1/(n+m)} = 0; \quad \text{b)} \varlimsup_{n+m\to\infty} \frac{(n+m)\ln(n+m)}{-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_2} = \rho;$$

$$\text{c)} \varlimsup_{n+m\to\infty} (n+m)^{1/\rho} \{\mathbf{E}_{n,m}(f)_2\}^{1/(n+m)} = (\sigma\rho e)^{1/\rho},$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция была соответственно: a) *целой*; b) *целой конечного порядка* $\rho \in (0, \infty)$; c) *целой конечного порядка* $\rho \in (0, \infty)$ *и нормального типа* $\sigma \in (0, \infty)$.

Доказательство теоремы проведем отдельно для каждого из условий, приведенных в формулировке.

a) Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция. Тогда на основании (4) $\forall \delta > 0 \; \exists$ натуральное число $N(\delta)$ такое, что при $j + k > N(\delta)$ выполняется неравенство

$$|c_{jk}(f)| < \delta^{j+k}. \tag{16}$$

Используя (16) и приведенное в § 2 следствие, запишем $\mathbf{E}_{n,m}(f)_2 \leqslant \leqslant \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |c_{jk}(f)| < \delta^{n+m+2}/(1-\delta)^2$. Ввиду произвольности $\delta > 0$ отсюда сразу следует соотношение a).

Для доказательства достаточности в силу указанного следствия имеем

$$|c_{n+1, m+1}(f)| \leqslant \mathbf{E}_{n,m}(f)_2. \tag{17}$$

На основании условия a) и (17) получаем предельное равенство (4), а это означает, что функция f целая.

b) Пусть данное условие имеет место. Тогда $\lim\limits_{n+m\to\infty} \{\ln[1/\mathbf{E}_{n,m}(f)_2]\}^{1/(n+m)} = \infty$. Отсюда следует справедливость условия a), а это значит, что функция f является целой. Как и в [10], полагаем ее порядок равным ν и показываем совпадение ν с ρ.

На основании (2) $\forall \delta > 0 \; \exists N(\delta)$ такое, что при $n+m > N(\delta)$ выполняется неравенство

$$|c_{n,m}(f)| \leqslant (n+m)^{-(n+m)/(\nu+\delta)}. \tag{18}$$

Используя (9) и следствие, получим

$$\mathbf{E}_{n,m}(f)_2 \leqslant \{ \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} (n+m+2)^{-2(j+k)/(\nu+\delta)} \}^{1/2} \leqslant (n+m+2)^{-(n+m+2)/(\nu+\delta)} \times$$

$$\times \{ \sum_{j,k=0}^{\infty} (n+m+2)^{-2(j+k)/(\nu+\delta)} \}^{1/2} = (n+m+2)^{-(n+m+2)/(\nu+\delta)} (1-(n+m+2)^{-2/(\nu+\delta)})^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$(n+m+2)^{(n+m+2)/(\nu+\delta)} (1-(n+m+2)^{-2/(\nu+\delta)}) \leqslant \mathbf{E}_{n,m}^{-1}(f)_2. \tag{19}$$

Из (19) следует, что $\nu + \delta \geqslant [(n+m)\ln(n+m) + (\nu+\delta)\ln(1-(n+m+2)^{-2/(\nu+\delta)})] \times \times [-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_2]^{-1}$. Раскрыв скобки в правой части последнего неравенства, заключаем, что второе слагаемое в силу условия a) обращается в нуль при $n+m\to\infty$. Ввиду произвольности $\delta > 0$ имеем $\nu \geqslant \rho$.

Используя (17), запишем $\nu = \varlimsup\limits_{n+m\to\infty} [(n+m)\ln(n+m)][-\ln|c_{n,m}(f)|]^{-1} \leqslant \leqslant \varlimsup\limits_{n+m\to\infty} [(n+m)\ln(n+m)][-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_2]^{-1} = \rho$. Таким образом, $\nu = \rho$.

Полагая при доказательстве необходимости порядок целой функции $f(z_1, z_2)$ равным ν и проводя аналогичные рассуждения, получаем равенство $\nu=\rho$.

c) Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция, имеющая конечные порядок и тип. Как было только что показано, ее порядок можно определить соотношением b). Полагая тип f равным γ, покажем справедливость равенства $\sigma=\gamma$. Из (3) следует, что $\forall\delta>0\ \exists N(\delta)$ такое, что при $n+m>N(\delta)$

$$|c_{n,m}(f)| \leqslant [\rho e(\gamma+\delta)/(n+m)]^{(n+m)/\rho}. \tag{20}$$

Тогда

$$E_{n,m}(f)_2 \leqslant \{\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}[\rho e(\gamma+\delta)/(j+k)]^{2(j+k)/\rho}\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant [\rho e(\gamma+\delta)/(n+m+2)]^{(n+m+2)/\rho}\{\sum_{j,k=0}^{\infty}[\rho e(\gamma+\delta)/(n+m+2)]^{2(j+k)/\rho}\}^{1/2} =$$

$$= [\rho e(\gamma+\delta)/(n+m+2)]^{(n+m+2)/\rho}\{1-[\rho e(\gamma+\delta)/(n+m+2)]^{2/\rho}\}^{-1}.$$

Запишем оценку сверху:

$$\sigma = \overline{\lim_{n+m\to\infty}}\frac{n+m}{e\rho}\{E_{n,m}(f)_2\}^{\rho/(n+m)} \leqslant (\gamma+\delta)\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\frac{n+m}{n+m+2}\times$$

$$\times\{\rho e(\gamma+\delta)/(n+m+2)]^{2/(n+m)}\{1-[\rho e(\gamma+\delta)/(n+m+2)]^{2/\rho}\}^{-\rho/(n+m)} = \gamma+\delta.$$

Оценку снизу получаем из (3) и (17): $\sigma \geqslant \overline{\lim_{n+m\to\infty}}|c_{n,m}(f)|^{\rho/(n+m)}(n+m)/(\rho e)=\gamma$. Учитывая произвольность выбора $\delta>0$, из двух последних неравенств имеем $\sigma=\gamma$.

Пусть теперь условие c) выполнено. Тогда, очевидно, выполнено и условие a), а это означает, что функция $f(z_1, z_2)$ целая и ее порядок ρ можно вычислить, используя соотношение b). Полагая, что тип ν функции f определен формулой (3), по аналогии с приведенными выше рассуждениями можно показать совпадение ν с числом σ из выражения c). Теорема 1 доказана.

Замечание. Используя определения нормы в пространстве Харди и верхнего предела числовой последовательности, теорему 1 можно сформулировать и доказать в терминах величин $E_{n,m}(r_n, r_m; f)_2$, предварительно заменив в условиях a) — c) $E_{n,m}(f)_2$ на $E_{n,m}(r_n, r_m; f)_2$.

В следующем далее утверждении результаты теоремы 1 распространены на случай произвольных $p\in[1,\infty]$. Доказательство сформулированных в нем условий в конечном счете сводится к иллюстрации справедливости соотношений a) — c) в терминах величин $E_{n,m}(r_n, r_m; f)_2$. Данный технический прием в определенном смысле сходен с методом, примененным в одномерном случае для пространства $A_p(|z|<1)$ [12].

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z_1, z_2)\in H^p(U^2)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. *Тогда условия*:

$$a_1)\ \lim_{n+m\to\infty}\{E_{n,m}(f)_p\}^{1/(n+m)}=0;\quad b_1)\ \overline{\lim_{n+m\to\infty}}\frac{(n+m)\ln(n+m)}{-\ln E_{n,m}(f)_p}=\rho;$$

$$c_1)\ \overline{\lim_{n+m\to\infty}}(n+m)^{1/\rho}\{E_{n,m}(f)_p\}^{1/(n+m)}=(\sigma\rho e)^{1/\rho},$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция была соответственно: a_1) *целой*; b_1) *целой конечного порядка* $\rho\in(0,\infty)$; c_1) *целой конечного порядка* $\rho\in(0,\infty)$ *и нормального типа* $\sigma\in(0,\infty)$.

Доказательство, как и ранее, проведем отдельно для каждого условия. Предварительно отметим, что воспроизводя для произвольной функции $f(z_1, z_2)\in H^1(U^2)$ ход рассуждений леммы 1, получим следующие (в некоторых случаях чисто формальные) соотношения:

$$\mathbf{E}_{n,m}(r_n, r_m; f)_2 = M_2(r_n, r_m; f - T_{n,m}(f)) =$$

$$= \{ \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} r_n^{2j} r_m^{2k} |c_{jk}(f)|^2 \}^{1/2} \ (n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поскольку любая целая функция в силу (4) всегда принадлежит пространству $H^2(U^2)$, то, используя записанные равенства, а также рассуждения из п. а) и приведенное выше замечание, получим расширенную формулировку первой части теоремы 1: для того чтобы функция $f \in H^1(U^2)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n+m\to\infty} \{\mathbf{E}_{n,m}(r_n, r_m; f)_2\}^{1/(n+m)} = 0. \tag{21}$$

a_1) Пусть обозначенное этим символом условие имеет место. Тогда $\forall \delta (0 < \delta < 1) \exists N(\delta)$ такое, что при $n + m > N(\delta)$ справедливо неравенство $\mathbf{E}_{n,m}(f)_p < \delta^{n+m}$.

Пусть $1 \leqslant p < 2$. Тогда при $n + m > N(\delta)$ из (13) имеем $\mathbf{E}_{n,m}(r_n, r_m; f)_2 \leqslant C\delta^{n+m} \{(nm)^{1/p-1/2} + (\delta m^{1/p-1/2} + \delta n^{1/p-1/2})/(1-\delta) + \delta^2/(1-\delta)^2\}$. Отсюда в силу произвольности $\delta > 0$ получаем (21), а это означает, что функция $f(z_1, z_2)$ целая.

Если же $p \geqslant 2$, то для обобщенного полинома $g^*_{n,m}(z_1, z_2)$, осуществляющего наилучшее приближение функции $f \in H^p(U^2)$ в пространстве $H^p(U^2)$, имеем

$$\mathbf{E}_{n,m}(f)_2 \leqslant \| f - g^*_{n,m} \|_2 \leqslant \mathbf{E}_{n,m}(f)_p. \tag{22}$$

Очевидно, из (22) и условия a_1) следует условие а) теоремы 1, а это означает, что функция $f(z_1, z_2)$ целая.

Доказательство необходимости условия a_1) проводится аналогично соответствующим рассуждениям теоремы 1.

b_1) Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция конечного порядка ν. Покажем, что $\nu = \rho$. С учетом (18) для $n + m > \Lambda(\delta)$ запишем

$$\mathbf{E}_{n,m}(f)_p \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |c_{j,k}(f)| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} (j+k)^{-(j+k)/(\nu+\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant (n+m+2)^{-(n+m+2)/(\nu+\delta)} (1 - (n+m+2)^{-1/(\nu+\delta)})^{-2}.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\nu + \delta \geqslant [(n+m)\ln(n+m) + 2(\nu+\delta)\ln(1-(n+m+2)^{-1/(\nu+\delta)})] \times$$
$$\times [-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_p]^{-1}. \tag{23}$$

Раскрыв скобки в правой части неравенства (23), заключаем, что второе слагаемое в силу условия a_1) стремится к нулю при $n + m \to \infty$. Поэтому в силу произвольности $\delta > 0$ получаем $\nu \geqslant \rho$.

При доказательстве обратного неравенства снова рассмотрим два случая: $p \geqslant 2$ и $1 \leqslant p < 2$. Если $p \geqslant 2$, то из (22) и соотношения b_1) имеем

$$\rho \geqslant \varlimsup_{n+m\to\infty} \frac{(n+m)\ln(n+m)}{-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_2} = \nu.$$

Используя лемму 2, в случае $1 \leqslant p < 2$ запишем

$$\frac{(n+m)\ln(n+m)}{-\ln \mathbf{E}_{n,m}(r_n, r_m; f)_2} E_{n,m} \leqslant \left\{\frac{(n+m)\ln(n+m)}{-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_p}\right\} \Big\{ 1 + [-\ln \mathbf{E}_{n,m}(f)_p]^{-1} \times$$

$$\times \ln \Big[\mathbf{E}_{n,m}(f)_p / ((nm)^{1/p-1/2} \mathbf{E}_{n,m}(f)_p + m^{1/p-1/2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{1/p-3/2} \mathbf{E}_{\nu,m}(f)_p +$$

$$+ n^{1/p-1/2} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \mu^{1/p-3/2} \mathbf{E}_{n,\mu}(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} (\nu\mu)^{1/p-3/2} \mathbf{E}_{\nu,\mu}(f)_p) \Big] \Big\}^{-1}.$$

Переходя в обеих частях данного неравенства к верхнему пределу при $n+m\to\infty$ и учитывая приведенное выше замечание и выражение b$_1$), получаем $\rho\geqslant\nu$. Таким образом, $\rho=\nu$.

При доказательстве достаточности, очевидно, из выполнения условия b$_1$) следует выполнение условия a$_1$), т. е. функция $f(z_1, z_2)$ целая и имеет некоторый порядок $\rho\in(0,\infty)$. Справедливость равенства $\nu=\rho$ показывается так же, как и при доказательстве необходимости условия b$_1$).

c$_1$) Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция, имеющая порядок ν и тип γ. Из только что доказанного условия b$_1$) следует, что $\nu=\rho$. Покажем, что $\gamma=\sigma$.

Как уже отмечалось, $\forall\delta>0\ \exists N(\delta)$ такое, что при $n+m>N(\delta)$ справедливо неравенство (20). Тогда при $n+m>N(\delta)$

$$\mathrm{E}_{n\,m}(f)_p\leqslant\|f-T_{n,m}(f)\|_p\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}\ \sum_{k=m+1}^{\infty}\left[\frac{\rho e(\gamma+\delta)}{j+k}\right]^{(j+k)/\rho}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{\rho e(\gamma+\delta)}{n+m+2}\right]^{(n+m+2)/\rho}\left(1-\frac{\rho e(\gamma+\delta)}{n+m+2}\right)^{-2}.$$

Отсюда получаем $\sigma=\overline{\lim\limits_{n+m\to\infty}}(\rho e)^{-1}(n+m)\{\mathrm{E}_{n,m}(f)_p)\}^{\rho/(n+m)}\leqslant\gamma+\delta$. В силу произвольности $\delta>0$ имеем $\sigma\leqslant\gamma$.

При доказательстве обратного неравенства снова рассмотрим два случая. Пусть $p\geqslant2$. Учитывая, что γ удовлетворяет условию c), неравенство $\sigma\geqslant\gamma$ получаем из соотношений c$_1$) и (22).

Пусть $1\leqslant p<2$. Полагая в (13) $q=2$, разрешаем его относительно величины $\mathrm{E}_{n,m}(f)_p$, а затем полученное неравенство используем в условии b$_1$) при замене $\mathrm{E}_{n,m}(f)_p$ на $\mathrm{E}_{n,m}(r_n, r_m;\ f)_2$. На основании условия b) и приведенного выше замечания имеем $\sigma\geqslant\gamma$. Таким образом, $\sigma=\gamma$.

При доказательстве достаточности имеет место условие a$_1$), т. е. функция $f(z_1, z_2)$ целая. Из условия b$_1$) следует, что ее порядок равен ρ. Как и в случае необходимости, показываем, что тип функции $f(z_1, z_2)$ определяется формулой c$_1$). Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что полученные в этом пункте результаты соответствующим образом могут быть распространены и на аналитические функции n $(n>2)$ независимых комплексных переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Respess J. R., Cheney E. W. Best approximation problems in tensor-product spaces / Pacif. J. Math.—1982.— V. 102.— № 2.— P. 437—446.

2. Cheney E. W. Best approximation in tensor product spaces // Lect. Notes Math.— 1980.— V. 773.— P. 25—32.

3. Cheney E. W. The best approximation of multivariate functions by combinations of univariate ones. „Approximation Theory IV. Procedings of International Symp., College Station, Tex., Janury 10—14, 1983".— New York, 1983.— P. 1—26.

4. Haufmann W., Zeller K. Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation. „Approximation Theory IV. Procedings of International Symp., College Station, Tex., Janury 10—14, 1983".— New York, 1983.— P. 509—514.

5. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. матем. ин-та АН СССР.— 1986.— Т. 178.— 112 с.

6. Haufman W., Jetter K., Steinhaus B. Degree of Best Approximation by Trigonometric Blending Functions // Math. Z.— 1985.— V. 189.— № 1.— P. 143—150.

7. Вакарчук С. Б. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных // Теория приближ. и смеж. вопр. анал. и топол.— Киев, 1987.— С. 15—20.

8. Gonska H., Jetter K. Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials // J. Approxim. Theory.— 1986.— V. 48.— № 4.— P. 396—406.

9. Вабаев М.-Б. А. О приближении функции многих переменных суммами функций меньшего числа переменных в комплексной области // ДАН АзербССР.— 1967.— Т. 23.— № 2.— С. 3—7.

10. Вакарчук С. Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Тезисы докл. Всесоюзн. школы по теории приближ. функций.— Киев, 1989.— 38 с.

11. Reddy A. R. A contribution to best approximation in the L^2 norm // J. Approxim. Theory.— 1974.— V. 11.— № 2.— P. 110—117.
12. Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И. О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // ДАН СССР.— 1976.— Т. 227.— № 2.— С. 280—283.
13. Zygmund A. On the boundary values of functions of several complex variables // Fundam. Math.— 1949.— V. 36.— P. 207—235.
14. Еремин С. А. Некоторые вопросы приближения функций многих комплексных переменных.— Киев, 1958.— 144 с.
15. Темляков А. А. Целые функции двух комплексных переменных // М., Учен. зап. Обл. пед. ин-та.— 1954.— Т. 20.— С. 7—16.
16. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного 3переменного.— М.— Л.: Наука, 1964.— 438 с.
17. Yamashita S. Hardy norm Bergman norm and univalency // Ann. Pol. math.— 1983.— V. 43.— № 1.— P. 23—33.
18. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 511 с.
19. Тиман М. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.
20. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 20 с.

г Днепропетровск

Поступила 29.03.1990

Е. В. Воскресенский

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

Рассмотрим множество Ξ уравнений вида

$$dy/dt = \varphi(t, y, \varepsilon), \tag{1}$$

где $T_0 \leqslant t < +\infty$, $y \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varphi \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $y(t: t_0, y_0, \varepsilon)$, $y(t_0: t_0, y_0, \varepsilon) = y_0$ — решение уравнения (1), определенное при любом $t_0 \geqslant T_0$ и любых $y_0 \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Это множество содержит сингулярно возмущенные уравнения. Приближенное интегрирование здесь происходит следующим образом: решения $y(t: t_0, y_0, \varepsilon)$ заменяются решениями уравнения сравнения [1], также принадлежащего множеству Ξ. Чаще всего в качестве такого уравнения берется усредненное уравнение [1]. Однако в некоторых случаях оно наследует от первоначальной задачи те же трудности, и тогда необходимо перейти к новому уравнению сравнения. В общем случае здесь ситуация такая: на множестве Ξ рассматривается полугруппа преобразований (PG, Ξ) с единицей, которая индуцирует отношение эквивалентности ρ; в классе эквивалентности, где находится уравнение (1), ищется простейшее, которое берется в качестве уравнения сравнения. Подбор подходящей полугруппы (PG, Ξ) и уравнения сравнения — основная задача интегрирования.

Эту задачу будем решать следующим образом. Предположим, что уравнение (1) допускает представление

$$dy/dt = f(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon), \tag{2}$$

где $f, g \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times S_c \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $\psi \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], S_c)$, $S_c = \{z : \|z\| \leqslant c,\ 0 \leqslant c \leqslant +\infty,\ z \in R^m\}$, $m \leqslant n$, для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \to T_1$ при $k \to +\infty$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \psi(t_k, \gamma, \varepsilon) = \lambda^*(\gamma, \varepsilon)$ для всех $\gamma \in R^n$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $T_0 < T_1 \leqslant +\infty$.

При $c = +\infty$ и $\lambda^*(\gamma, \varepsilon) = \infty$ будем считать, что

$$\lim_{k \to +\infty} f(t, x, \psi(t_k, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, x, \varepsilon),$$

$$f_1 \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], R^n), \quad f(t, x, \lambda^*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(t, x, \varepsilon)$$

при всех $T_0 \leqslant t < +\infty$, $x \in R^n$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\gamma \in R^n$.