Д. Пыляк, Р. Смажевский, М. А. Шешко, Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши по вещественной полуоси,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 12, 1696–1708

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1696–1708

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642.7

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ КОШИ ПО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПОЛУОСИ

© 2005 г. Д. Пыляк, Р. Смажевский, М. А. Шешко

Будем рассматривать уравнение вида

$$a(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{m(x,\sigma)}{\sigma-x}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma=f(x),\quad x>0, \tag{0.1}$$

где $a(x)$, $m(x,\sigma)$, $f(x)$ – заданные на $[0,+\infty)$ комплекснозначные функции, непрерывные по Гёльдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Если линией интегрирования является гладкая замкнутая или разомкнутая кривая конечной длины, то теория уравнения вида (0.1) достаточно хорошо разработана и изложена в работах [1, 2].

Теория уравнения вида (0.1) на бесконечном контуре может отличаться от подобной теории на конечном контуре, о чем свидетельствуют изложенные в [2, с. 190–193] результаты, относящиеся к сингулярному уравнению, линией интегрирования которого является вся вещественная ось R. Полученные в настоящей работе результаты подтверждают, что теория уравнения (0.1) отличается как от теории рассматриваемого уравнения по кривой конечной длины, так и от теории этого уравнения по R.

Отметим еще, что частный случай уравнения (0.1), а именно уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma-x}\,d\sigma=f(x),\quad x>0, \tag{0.2}$$

изучалось в [3, 4]. Согласно [3, с. 194], решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,\frac{f(\sigma)}{\sigma-x}\,d\sigma,\quad x>0, \tag{0.3}$$

а согласно [4, с. 104], решение определяется формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\sigma}\,\frac{f(\sigma)}{\sigma-x}\,d\sigma,\quad x>0. \tag{0.4}$$

Строгого обоснования формул (0.3), (0.4) в указанных работах нет.

В настоящей работе найдены в явном виде формулы, дающие решение более общего уравнения, чем (0.2), а именно уравнения

$$\begin{gathered}a(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)}{\sigma-x}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma=f(x),\quad x>0,\\ b(x)\stackrel{\text{def}}{=}m(x,x),\quad a^2(x)-b^2(x)\neq 0\quad \forall x\in[0,+\infty).\end{gathered} \tag{0.5}$$

На основании этих формул сингулярное уравнение (0.1) приведено к уравнению Фредгольма. Кроме того, полученные формулы позволяют указать условия, при выполнении которых справедливы равенства (0.3), (0.4). Найдены также условия единственности решения как уравнения (0.5), так и уравнения (0.1) в случае, когда решение содержит произвольные постоянные. Приведены две вычислительные схемы для уравнения (0.5) с указанием порядковой оценки погрешности приближенного решения, первая из которых основана на алгебраических многочленах, а вторая – на многочленах Чебышева.

1. Выполнив над ядром уравнения (0.1) преобразование

$$\frac{m(x,\sigma)}{\sigma-x}=\frac{x+1}{\sigma+1}\,\frac{b(\sigma)}{\sigma-x}+\frac{b(\sigma)}{\sigma+1}+k(x,\sigma),\quad k(x,\sigma)=\frac{m(x,\sigma)-b(\sigma)}{\sigma-x},\quad b(\sigma)=m(\sigma,\sigma),$$

запишем это уравнение в форме

$$a(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{x+1}{\sigma+1}\,\frac{b(\sigma)}{\sigma-x}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{b(\sigma)}{\sigma+1}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} k(x,\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma=f(x),\quad x>0. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что $a^2(x)-b^2(x)\neq 0\ \ \forall x\in[0,+\infty)$, а поведение функций $m(x,\sigma)$, $f(x)$ при $\sigma\to+\infty$, $x\to+\infty$ определяется соответственно соотношениями $m(x,\sigma)=$ $=m_0(x,\sigma)(1+\sigma)^{-\alpha}$, $\alpha\geq 1$, $f(x)=f_0(x)(1+x)^{-\beta}$, $\beta\geq 1$, где $m_0(x,\sigma)$, $f_0(x)$ – функции из класса Гёльдера.

Будем говорить, что функция $f_0(x)$, $x\in[0,+\infty)$, принадлежит классу Гёльдера, если на любом промежутке $[0,b]$, $b>0$, она удовлетворяет неравенству $|f_0(x')-f_0(x'')|\leq A_1|x'-x''|^\lambda$, $0<\lambda\leq 1$, $\forall x',x''\in[0,b]$, $A_1=\mathrm{const}$, а при $x\to+\infty$ выполняется условие

$$|f_0(x')-f_0(x'')|\leq A_2|1/x'-1/x''|^\lambda\quad \forall x',x''\in[b,+\infty),\quad A_2=\mathrm{const}.$$

Аналогично определяется класс Гёльдера функций двух переменных. Полагая $x=t/(1-t)$, $\sigma=\tau/(1-\tau)$, а затем вводя обозначения $a^*(t)=a(t/(1-t))$, $b^*(t)=b(t/(1-t))$, $k^*(t,\tau)=$ $=k(t/(1-t),\tau/(1-\tau))(1-\tau)^{-2}$, $f^*(t)=f(t/(1-t))$, $\varphi^*(t)=\varphi(t/(1-t))$, уравнение (1.1) приведем к виду

$$a^*(t)\varphi^*(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 b^*(\tau)\,\frac{\varphi^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 b^*(\tau)\,\frac{\varphi^*(\tau)}{\tau-1}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 k^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau=f^*(t),\quad t\in(0,1). \tag{1.2}$$

Заметим, что ядро $k^*(t,\tau)$ имеет вид

$$k^*(t,\tau)=[m_0(t/(1-t),\tau/(1-\tau))-m_0(\tau/(1-\tau),\tau/(1-\tau))](1-t)(1-\tau)^{\alpha-1}(\tau-t)^{-1}. \tag{1.3}$$

Пусть $X(z)$ – каноническая функция класса $h(1)$ (класса функций, ограниченных в окрестности точки $z=1$ и допускающих интегрируемую особенность в точке $z=0$, см. [1]) задачи линейного сопряжения

$$X^+(t)=\frac{a^*(t)-b^*(t)}{a^*(t)+b^*(t)}\,X^-(t),\quad t\in(0,1), \tag{1.4}$$

$$Z^*(t) = [a^*(t) + b^*(t)]\, X^+(t) = [a^*(t) - b^*(t)]\, X^-(t), \quad t \in (0,1). \tag{1.5}$$

Переходя в уравнении (1.2) к новой неизвестной функции $u(t)$ по правилу

$$\varphi^*(t) = Z^*(t) r(t) u(t), \quad r(t) = [(a^*(t))^2 - (b^*(t))^2]^{-1}, \tag{1.6}$$

и вводя обозначения $A(t) = a^*(t) r(t)$, $B(t) = b^*(t) r(t)$, уравнение (1.2) приведем к виду

$$A(t) Z^*(t) u(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t}\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - 1}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 k^*(t,\tau) Z^*(\tau) r(\tau) u(\tau)\, d\tau = f^*(t), \quad t \in (0,1). \tag{1.7}$$

Поскольку в рассматриваемом классе функций $h(1)$

$$Z^*(t) = t^{\alpha_1} (1-t)^{\beta_1} Z_0(t), \quad Z_0(t) \neq 0, \quad \forall t \in (0,1), \quad -1 < \operatorname{Re} \alpha_1 \leq 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \beta_1 < 1, \tag{1.8}$$

то второй и третий интегралы, стоящие в левой части уравнения (1.7), существуют как несобственные. Полагая в (1.7) $k^*(t,\tau) \equiv 0$, исследуем сначала уравнение

$$\begin{gathered} A(t) Z^*(t) u(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t}\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - 1}\, d\tau = f^*(t), \\ t \in (0,1), \quad \lim_{t \to 1} f^*(t) = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Пусть решение $u(t)$ разыскивается в классе ограниченных на $(0,1)$ функций и индекс $\varkappa$ задачи (1.4) неотрицателен ($\varkappa \geq 0$). Непосредственной подстановкой убедимся в том, что решением уравнения (1.9) является функция

$$u(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \frac{f^*(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + P_\varkappa(t-1), \tag{1.10}$$

где функция $Z^*(t)$ определяется (1.5), а $P_\varkappa(t-1) = \gamma_0 + \gamma_1(t-1) + \ldots + \gamma_\varkappa (t-1)^\varkappa$, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\varkappa$ – произвольные комплексные числа.

В силу предположения $f(x) = f_0(x)(1+x)^{-\beta}$, $\beta \geq 1$, правая часть уравнения (1.10) является функцией, ограниченной на $(0,1)$. Принимая во внимание равенство [5]

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{\tau^j}{\tau - t}\, d\tau = -A(t) Z^*(t) t^j + \Omega_\infty(t), \quad t \in (0,1), \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{1.11}$$

где $\Omega_\infty(z)$ – главная часть разложения функции $X(z) z^j$ в ряд Лорана в точке $z = \infty$, и учитывая формулу Пуанкаре–Бертрана, после подстановки в (1.9) вместо $u(t)$ функции (1.10) будем иметь

$$A(t) Z^*(t) \{a^*(t)\, (Z^*(t))^{-1} f^*(t) - F(t) + P_\varkappa(t-1)\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \left\{ \frac{a^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) - F(\tau) + P_\varkappa(\tau - 1) \right\} \frac{d\tau}{\tau - t} -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\left\{\frac{a^*(\tau)}{Z^*(\tau)}f^*(\tau)-F(\tau)+P_{\varkappa-1}(\tau-1)\right\}\frac{d\tau}{\tau-1}=$$

$$=A(t)a^*(t)f^*(t)-A(t)Z^*(t)F(t)+A(t)Z^*(t)P_\varkappa(t-1)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)a^*(\tau)f^*(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-t}-$$

$$-B(t)b^*(t)f^*(t)+A(t)Z^*(t)F(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 A(\tau_1)b^*(\tau_1)\,\frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{P_\varkappa(\tau-1)}{\tau-t}\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)a^*(\tau)\,\frac{f^*(\tau)}{\tau-1}\,d\tau+B(1)\,b^*(1)f^*(1)-A(1)Z^*(1)F(1)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 A(\tau_1)b^*(\tau_1)\,\frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-1}\,d\tau_1-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{P_\varkappa(\tau-1)}{\tau-1}\,d\tau\equiv f^*(t),\quad t\in(0,1),$$

где

$$F(t)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)}\,\frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1.$$

Если решение $u(t)$ ищется в классе ограниченных на $(0,1)$ функций, при этом $\lim\limits_{t\to1}u(t)=0$, то при $\varkappa\geq0$ решение уравнения (1.9) определяется формулой

$$u(t)=a^*(t)(Z^*(t))^{-1}f^*(t)-F(t)+F(1)+\sum_{j=1}^{\varkappa}\gamma_j(t-1)^j,\quad t\in(0,1),\tag{1.12}$$

в чем можно убедиться также непосредственной подстановкой.

Рассмотрим случай отрицательного индекса ($\varkappa<0$). Согласно [1, 2], уравнение (1.9) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,[f^*(\tau)+A_0^*]\tau^{j-1}\,d\tau=0,\quad j=\overline{1,|\varkappa|},\tag{1.13}$$

где

$$A_0^*=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-1}\,d\tau.$$

Поскольку [5]

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,\tau^{j-1}\,d\tau=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\frac{z^{j-1}}{X(z)}\right]=\begin{cases}0, & j=\overline{1,|\varkappa|-1},\\ -1, & j=|\varkappa|,\end{cases}\tag{1.14}$$

то равенства (1.13) равносильны соотношениям

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,f^*(\tau)\tau^{j-1}\,d\tau=0,\quad j=\overline{1,|\varkappa|-1},\tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\, f^*(\tau)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-1}\,d\tau = A_0^*. \tag{1.16}$$

С учетом (1.16) уравнение (1.9) может быть записано в виде

$$A(t)Z^*(t)u(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = f^*(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\, f^*(\tau)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau, \quad t\in(0,1). \tag{1.17}$$

Согласно [1, 2], при соблюдении необходимых и достаточных условий (1.15) решением такого уравнения является функция

$$u(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)}[f^*(t)+A_0^*] - \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,\frac{f^*(\tau)+A_0^*}{\tau-t}\,d\tau =$$

$$= \frac{a^*(t)}{Z^*(t)}\, f^*(t) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,\frac{f^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \quad t\in(0,1). \tag{1.18}$$

Рассмотрим частный случай уравнения (1.9), полагая $a^*(t)\equiv 0$, $b^*(t)=1$, а именно уравнение

$$(-1)\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-1}\,d\tau = f^*(t), \quad t\in(0,1), \tag{1.19}$$

которое в первоначальных обозначениях имеет вид (0.2).

Пусть решение $\varphi(x)$, $x\in(0,+\infty)$, уравнения (0.2) разыскивается в классе $h(\infty)$, т.е. в классе функций, непрерывных по Гёльдеру на $[\varepsilon,+\infty)$, $\varepsilon>0$, исчезающих на бесконечности ($\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$), а в окрестности $x=0$ допускающих интегрируемую особенность. Тогда каноническая функция $X(z)$ задачи (1.4) имеет вид $X(z)=(1-1/z)^{1/2}$, $z\notin(0,1)$, следовательно, $Z^*(t)=i(1/t-1)^{1/2}$, $t\in(0,1)$, $\varkappa=0$. Согласно (1.10), решением уравнения (1.19) является функция

$$u(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1/2}\frac{f^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \gamma_0 \overset{\text{def}}{\equiv} F_1(t)+\gamma_0$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\sigma}\,\frac{x+1}{\sigma+1}\,\frac{f(\sigma)}{\sigma-x}\,d\sigma + \frac{\gamma_0^*}{\sqrt{x}}, \quad x>0.$$

Если решение $\varphi(x)$ уравнения (0.2) ищется в классе $h(\infty)$, причем не только $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, но и $\lim\limits_{t\to1}u(t)=0$, где $u(t)$ определяется в (1.6), то решение уравнения (1.19), согласно (1.12), представимо формулой

$$u(t)=F_1(t)-F_1(1),$$

которая в первоначальных переменных имеет вид (0.4).

Если же решение $\varphi(x)$, $x\in(0,+\infty)$, уравнения (0.2) разыскивается в классе $h(0,+\infty)$, т.е. в классе гёльдеровых ограниченных на $(0,+\infty)$ функций, при этом $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, то каноническая функция $X(z)$ задачи (1.4) имеет вид $X(z) = (z(z-1))^{1/2}$, $z \notin (0,1)$, следовательно, $Z^*(t) = i(t(1-t))^{1/2}$, $t \in (0,1)$, $\varkappa = -1$. Согласно (1.18), в классе функций, для которых

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma+1}\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\sigma)}{\sqrt{\sigma}(\sigma+1)}\, d\sigma,$$

решение уравнения (0.2) имеет вид (0.3).

Приведем условия, при выполнении которых произвольные константы $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\varkappa$ ($\varkappa \geq 0$), входящие в формулы (1.10), (1.12), определяются единственным образом. Присоединим к уравнению (1.9) равенства

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) u(\tau) (\tau-1)^{j-1}\, d\tau = A_j, \quad j = \overline{0, \varkappa}, \tag{1.20}$$

где A_j – наперед заданные числа. Подставляя вместо $u(t)$ в (1.20) функцию (1.10) с учетом (1.11), получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \left\{ \frac{a^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} \frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1 + P_\varkappa(\tau-1) \right\} (\tau-1)^{j-1}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) a^*(\tau) f^*(\tau) (\tau-1)^{j-1}\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} f^*(\tau_1)\, d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{(\tau-1)^{j-1}}{\tau_1 - \tau}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) P_\varkappa(\tau-1)(\tau-1)^{j-1}\, d\tau = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) a^*(\tau) f^*(\tau)(\tau-1)^{j-1}\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 A(\tau_1) b^*(\tau_1) f^*(\tau_1)(\tau_1-1)^{j-1}\, d\tau_1 + \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) P_\varkappa(\tau-1)(\tau-1)^{j-1}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) P_\varkappa(\tau-1)(\tau-1)^{j-1}\, d\tau = A_j, \quad j = \overline{0, \varkappa}. \tag{1.21}$$

Полагая в (1.21) $j = 0$, найдем $\gamma_\varkappa = A_0$. При $j = 1$ будем иметь $\gamma_{\varkappa-1} + (p_1 - \varkappa)\gamma_\varkappa = A_1$. Наконец, при $j = \varkappa$ получаем

$$\gamma_0 + (p_1 - \varkappa)\gamma_1 + \ldots + \Big[p_\varkappa - (2\varkappa - 1) p_{\varkappa-1} + \frac{(2\varkappa-1)(2\varkappa-2)}{2!} p_{\varkappa-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{2\varkappa-1} \frac{(2\varkappa-1)(2\varkappa-2)\cdots\varkappa}{\varkappa!} p_0 \Big] \gamma_\varkappa = A_\varkappa, \quad p_0 = 1.$$

Здесь $p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa$ – коэффициенты, входящие в разложение функции $X(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, т.е. в разложение

$$X(z) = z^{-\varkappa}(1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots). \tag{1.22}$$

Чтобы определить константы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varkappa$, входящие в (1.12), достаточно к уравнению (1.9) присоединить условия (1.18), полагая $j = \overline{0, \varkappa - 1}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1.1. *Пусть функции* $a^*(t)$, $b^*(t)$, $f^*(t)$, *входящие в уравнение (1.9), принадлежат классу Гёльдера, причем* $(a^*(t))^2-(b^*(t))^2\neq 0$ $\forall t\in(0,1)$, *а функция* $f^*(t)$ *в окрестности* $t=1$ *представима в виде* $f^*(t)=(t-1)^\beta f_0^*(t)$, *где* $f_0^*(t)$ *– функция из класса Гёльдера,* $\operatorname{Re}\beta\geq 1$, *и индекс* $\varkappa$ *задачи (1.4) неотрицателен. Тогда общее решение уравнения (1.9), принадлежащее классу ограниченных гёльдеровых функций, представимо формулой (1.10).*

Если $\varkappa<0$, *то решение* $u(t)$, *принадлежащее классу ограниченных гёльдеровых на* $(0,1)$ *функций, для которых имеет место соотношение (1.16), при выполнении необходимых и достаточных условий (1.15) представимо формулой (1.18). Если решение* $u(t)$ *подчинить условиям (1.20), где* A_j, $j=\overline{0,\varkappa}$, *– наперед заданные числа, то задача (1.9), (1.20) имеет единственное решение. Если же разыскиваемое решение* $u(t)$ *принадлежит классу ограниченных функций, при этом* $\lim\limits_{t\to1}u(t)=0$, *то при* $\varkappa\geq 0$ *общее решение имеет вид (1.12).*

Следствие. *Пусть функции* $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$, *входящие в уравнение (0.5), непрерывны по Гёльдеру на* $[0,+\infty)$, *при этом* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0$ $\forall x\in[0,+\infty)$, *а поведение функции* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$ *определяется соотношением* $f(x)=f_0(x)(1+x)^{-\beta}$, $\beta\geq 1$. *Если искомое решение* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* $h(\infty)$ *и индекс* $\varkappa$ *задачи*

$$\chi^+(x)=\frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}\chi^-(x),\quad x\in(0,+\infty),\quad \chi^\pm(x)\stackrel{\text{def}}{=}X^\pm\left(\frac{x}{x+1}\right),$$

где $X(z)$ *– каноническая функция задачи (1.4), неотрицателен, то общее решение уравнения (0.5) имеет вид*

$$\varphi(x)=\frac{a(x)f(x)}{a^2(x)-b^2(x)}-\frac{Z(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x+1}{\sigma+1}\frac{b(\sigma)}{Z(\sigma)}\frac{f(\sigma)}{\sigma-x}\,d\sigma+$$

$$+\frac{Z(x)}{a^2(x)-b^2(x)}P_\varkappa\left(\frac{1}{x+1}\right),\quad x\in(0,+\infty),\tag{1.23}$$

где

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]\chi^+(x)=[a(x)-b(x)]\chi^-(x),\quad P_\varkappa\left(\frac{1}{x+1}\right)=\sum_{j=0}^{\varkappa}\frac{\gamma_j}{(x+1)^j},$$

$\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_\varkappa$ *– произвольные постоянные.*

Если $\varkappa<0$, *то при выполнении необходимых и достаточных условий*

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)f(\sigma)}{Z(\sigma)}\frac{\sigma^{j-1}}{(\sigma+1)^{j+1}}\,d\sigma=0,\quad j=\overline{1,|\varkappa|-1},\tag{1.24}$$

любое решение $\varphi(x)$ *класса* $h(\infty)$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)}{\sigma+1}\varphi(\sigma)\,d\sigma=\int\limits_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)f(\sigma)}{Z(\sigma)}\frac{\sigma^{|\varkappa|-1}}{(\sigma+1)^{|\varkappa|+1}}\,d\sigma,\tag{1.25}$$

представимо формулой (1.23), в которой $P_\varkappa(1/(x+1))\equiv 0$.

Пример 1.1. Найдем решение уравнения (0.5) в классе $h(\infty)$, полагая

$$a(x)=b(x)(1+E_1(x))/(1-E_1(x)),\quad b(x)=(2x+1)/(3x+2),\quad f(x)=X(2)/(x+2),$$

$$E_1(x)=\exp\{2\pi i(\alpha_2x/(x+1)+\beta_2)\},\quad \alpha_2=7/2-i/2,\quad \beta_2=-5/4+i.$$

Тогда $X(z)=z^{-2}(z-1)^{-2}\exp\{\Gamma_1(z)\}$, $\Gamma_1(z)=(\alpha_2z+\beta_2)\ln(1-1/z)+\alpha_2$, $z\notin(0,1)$, следовательно, $\varkappa=4$.

Поскольку $\Gamma_1^{\pm}(t) = (\alpha_2 t + \beta_2)(\ln(1/t - 1) \pm \pi i) + \alpha_2 = (\alpha_2 + \beta_2)\ln(1-t) - \beta_2 \ln t + \Omega_1^{\pm}(t)$, $\Omega_1^{\pm}(t) = \pm\pi i(\alpha_2 t + \beta_2) + \alpha_2 - \alpha_2 t \ln t - \alpha_2(1-t)\ln(1-t)$, $t \in (0,1)$, то $X^{\pm}(t) = t^{-2}(t-1)^{-2}\exp\{\Gamma_1^{\pm}(z)\} = t^{-3/4-i}(1-t)^{1/4+i/2}\exp\{\Omega_1^{\pm}(t)\}$. Поэтому

$$\chi^{\pm}(x) = X^{\pm}(x/(x+1)) = (x/(x+1))^{-3/4-i}(x+1)^{-1/4-i/2}\exp\{\Omega_1^{\pm}(x/(x+1))\}, \quad x > 0,$$

$$Z_1(x) = \frac{2(2x+1)}{3x+2}\,\frac{1}{1-E_1(x)}(x+1)^{1/2+i/2}x^{-3/4-i}\exp\left\{\Omega_1^{+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right\}, \quad x > 0.$$

Согласно (1.23),

$$\varphi(x) = -\frac{x+1}{x+2}\,\frac{Z_1(x)}{a^2(x)-b^2(x)} + \frac{Z_1(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\sum_{j=0}^{4}\frac{\gamma_j}{(x+1)^j}, \quad x > 0.$$

Произвольные константы γ_j, $j = \overline{0,4}$, будут однозначно определены, если зададим A_j, $j = \overline{0,4}$. Положим, например, $A_j = -X(2)$, $j = \overline{0,4}$. Тогда $\gamma_j = 0$, $j = \overline{0,4}$.

Пример 1.2. Найдем еще решение уравнения (0.5) в том же классе $h(\infty)$, полагая $a(x)$, $b(x)$ и $E_2(x)$ такими же, как в примере 1.1, но с $\alpha_2 = -3 + i/2$, $\beta_2 = -3/2 + i$:

$$f(x) = \frac{X(2)}{x+2} - \frac{1}{x+1}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{5}{2} - \frac{3}{4}\,i\right).$$

Тогда $X(z) = z(z-1)^2\exp\{\Gamma_2(z)\}$, $\Gamma_2(z) = (\alpha_2 z - \beta_2)\ln(1-1/z) + \alpha_2$, $\varkappa = -3$.

Поскольку $\Gamma_2^{\pm}(t) = (\alpha_2 t - \beta_2)(\ln(1/t-1) \pm \pi i) + \alpha_2 = (\alpha_2 - \beta_2)\ln(1-t) + \beta_2\ln t + \Omega_2^{\pm}(t)$, $\Omega_2^{\pm}(t) = \pm\pi i(\alpha_2 t - \beta_2) + \alpha_2 - \alpha_2 t\ln t - \alpha_2(1-t)\ln(1-t)$, $t \in (0,1)$, то $X^{\pm}(t) = t(t-1)^2\exp\{\Gamma_2^{\pm}(z)\} = t^{-1/2+i}(1-t)^{1/2-i/2}\exp\{\Omega_2^{\pm}(t)\}$. Отсюда следует, что

$$\chi^{\pm}(x) = X^{\pm}(x/(x+1)) = (1+1/x)^{1/2-i}(x+1)^{-1/2+i/2}\exp\{\Omega_2^{\pm}(x/(x+1))\}, \quad x > 0,$$

$$Z_2(x) = \frac{2(2x+1)}{3x+2}\,\frac{1}{1-E_2(x)}\,\frac{(x+1)^{-i/2}}{x^{1/2-i}}\exp\left\{\Omega_2^{+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right\}, \quad x > 0.$$

Можно проверить, что условия (1.24) для функции $f(x)$ выполнены. Искомое решение имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{x+1}{x+2}\,\frac{Z_2(x)}{a^2(x)-b^2(x)}, \quad x > 0.$$

2. В настоящем пункте сведем сингулярное уравнение (1.7) к уравнению Фредгольма, для этого рассматриваемое уравнение запишем в форме

$$A(t)Z^*(t)u(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\frac{u(\tau)}{\tau-1}\,d\tau =$$

$$= f^*(t) - \frac{1}{\pi i}\int_0^1 k^*(t,\tau)Z^*(\tau)r(\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad t \in (0,1),$$

а затем к правой части применим формулу (1.10). В результате получим уравнение

$$u(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)}\left[f^*(t) - \frac{1}{\pi i}\int_0^1 k^*(t,\tau)Z^*(\tau)r(\tau)u(\tau)\,d\tau\right] - \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,\frac{f^*(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{k^*(\tau,\tau_1)}{Z^*(\tau_1)}\,r(\tau_1)u(\tau_1)\,d\tau_1\right\}\frac{d\tau}{\tau-t}+P_\varkappa(t-1),\quad t\in(0,1), \tag{2.1}$$

которое элементарными преобразованиями приведем к виду

$$u(t)+\int\limits_0^1 N(t,\tau)u(\tau)\,d\tau=F(t),\quad t\in(0,1), \tag{2.2}$$

где

$$N(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\,\frac{Z(\tau)}{Z^*(t)}\,r(\tau)\left[a^*(t)k^*(t,\tau)-\frac{Z^*(t)}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)}\,\frac{k^*(\tau_1,\tau)}{\tau_1-t}\,d\tau\right],$$

$$F(t)=\frac{a^*(t)}{Z^*(t)}\,f^*(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)}\,\frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-t_1}\,d\tau_1+P_\varkappa(t-1).$$

Для уравнения (2.2) справедлива теория уравнений Фредгольма. Поэтому если соответствующее уравнение ($F(t)\equiv 0$) неразрешимо (имеет только нулевое решение), то решение неоднородного уравнения (2.2) задается формулой

$$u(t)=F(t)-\int\limits_0^1 \Gamma(t,\tau)F(\tau)\,d\tau,\quad t\in(0,1),$$

где $\Gamma(t,\tau)$ – резольвента ядра $N(t,\tau)$.

Если $\varkappa<0$, то уравнение (1.7) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau_1)}\left[f^*(\tau)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 k^*(\tau,\tau_1)Z^*(\tau_1)r(\tau_1)u(\tau_1)\,d\tau_1+A_0^*\right]\tau^{j-1}\,d\tau=0,$$

$j=\overline{1,|\varkappa|}$, A_0^* определено формулой (1.16), равносильные следующим уравнениям:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,f^*(\tau)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau=\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,k^*(\tau,\tau_1)Z^*(\tau_1)r(\tau_1)u(\tau_1)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau_1\,d\tau+$$

$$+[1+\operatorname{sgn}(j-|\varkappa|)]\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-1}\,d\tau. \tag{2.3}$$

С учетом (2.3) при $j=|\varkappa|$ уравнение (1.7) может быть записано в виде

$$A(t)Z^*(t)u(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f^*(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 k^*(t,\tau)Z^*(\tau)r(\tau)u(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}f^*(\tau)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau-\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,k^*(\tau,\tau_1)Z^*(\tau_1)r(\tau_1)u(\tau_1)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau_1\,d\tau. \tag{2.4}$$

При выполнении равенств (2.3) при $j = \overline{1, |\varkappa| - 1}$ тем же путем, что и в предыдущем случае, от (2.4) приходим к уравнению (2.2), в правой части которого необходимо положить $P_{\varkappa-1}(t-1) \equiv 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть функции $a^*(t)$, $b^*(t)$, $f^*(t)$, входящие в уравнение (1.7), принадлежат классу Гёльдера, причем $(a^*(t))^2 - (b^*(t))^2 \neq 0$ $\forall t \in (0,1)$, где функция $m_0(t,\tau)$ из выражения (1.3) также принадлежит классу H (по обеим переменным), а функция $f^*(t)$ в окрестности $t = 1$ представима в виде $f^*(t) = (t-1)^\beta f_0^*(t)$, $\beta \geq 1$, где $f_0^*(t)$ из класса H. Если индекс $\varkappa$ задачи (1.4) неотрицателен и однородное уравнение (2.2) неразрешимо, задача (1.7), (1.20) имеет единственное решение.*

Если $\varkappa < 0$, то уравнение (1.7) эквивалентно (в смысле разрешимости) уравнению Фредгольма (2.2) с $P_\varkappa(t-1) \equiv 0$ с присоединенными к нему $|\varkappa| - 1$ уравнениями (2.3).

3. Построим две вычислительные схемы для уравнения (1.9). Следуя [5], приближенное решение задачи (1.9), (1.20) $(\varkappa \geq 0)$ будем искать как решение задачи

$$A(t)Z^*(t)u_{n+\varkappa}(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\frac{u_{n+\varkappa}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f_n^*(t) + A_0^*, \quad t \in (0,1), \tag{3.1}$$

A_0^* определено формулой (1.16) и

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)u_{n+\varkappa}(\tau)(\tau-1)^{j-1}\,d\tau = A_j, \quad j = \overline{0,\varkappa}, \tag{3.2}$$

в которой $f_n^*(t)$ – многочлен степени n, интерполирующий функцию $f^*(t)$ по узлам Чебышева первого рода $t_k = (1/2)\cos[(2k-1)/(2(n+1))]\pi + 1/2$, $k = \overline{1, n+1}$, который запишем в виде ряда

$$f_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k t^k, \quad t \in [0,1], \tag{3.3}$$

$$u_{n+\varkappa}(t) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k t^k, \tag{3.4}$$

c_k – коэффициенты, подлежащие нахождению.

Подставим (3.4) в (3.1), а затем для вычисления сингулярного интеграла применим формулу (1.11). В результате получим тождество, из которого путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t находим $c_{n+\varkappa} = f_n$, $p_1 c_{n+\varkappa} + c_{n+\varkappa-1} = f_{n-1}$, $\ldots$, $p_n c_{n+\varkappa} + p_{n-1}c_{n+\varkappa-1} + \ldots + c_\varkappa = f_0 + A_0^*$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – коэффициенты, входящие в разложение (1.22).

Недостающие коэффициенты $c_{\varkappa-1}, c_{\varkappa-2}, \ldots, c_0$ определим из (3.2), используя при этом формулу [5] $(\pi i)^{-1}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\tau^j\,d\tau = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{X(z)z^j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ В результате придем к системе

$$c_{\varkappa-1} + p_1 c_\varkappa + \ldots + p_{n+1}c_{n+\varkappa} = A_1, \quad c_{\varkappa-2} + (p_1 - 1)c_{\varkappa-1} + \ldots + (p_{n+2} - p_{n+1})c_{n+\varkappa} = A_2, \quad \ldots,$$

$$c_0 + (p_1 - \varkappa + 1)c_1 + \left[p_2 - (\varkappa-1)p_1 + \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{2}p_0\right]c_2 + \ldots$$

$$\ldots + \left[p_{n+\varkappa} - (\varkappa-1)p_{n+\varkappa-1} + \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{2}p_{n+\varkappa-2} + \ldots + (-1)^{\varkappa-1}p_{n+1}\right]c_{n+\varkappa} = A_\varkappa, \quad p_0 = 1.$$

Если требуется получить решение с высокой степенью точности, то целесообразно искать решение в виде

$$u_{n+\varkappa}(t) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k T_k^*(t), \quad t \in [0,1], \tag{3.5}$$

где $T_k^*(t)$ – смещенный многочлен Чебышева первого рода, определяемый соотношением:

$$T_k^*(t) = T_k(2\,t-1), \quad t \in [0,1], \quad T_k(t) = \cos(k \arccos t), \quad |t| \le 1.$$

Подставляя (3.5) в (3.1), предварительно записав интерполяционный многочлен (3.3) в виде

$$f_n^*(t) = \sum_{j=0}^{n} f_j^* U_j^*(t), \quad t \in [0,1],$$

где $U_j^*(t) = U_j(2t-1)$, $t \in [0,1]$, $U_j(t) = \sin[(j+1)\arccos t](1-t^2)^{-1/2}$, $|t| \le 1$, приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[A(t)Z^*(t)T_k^*(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{T_k^*(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa} \left[A(t)Z^*(t)T_{k+\varkappa}^*(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{T_{k+\varkappa}^*(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \right] = \sum_{j=0}^{n} f_j^* U_j^*(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Поскольку (см. [6, формула (2.1)] выражение в последних квадратных скобках представимо в виде $\alpha_0^{(k)}U_0^*(t) + \alpha_1^{(k)}U_1^*(t) + \ldots + \alpha_k^{(k)}U_k^*(t)$, $t \in [0,1]$, где коэффициенты $\alpha_j^{(k)}$, $j = \overline{0,k}$, определяются по правилу (2.9) из [6], то на основании (3.6) получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\varkappa}[\alpha_0^{(k)}U_0^*(t) + \alpha_1^{(k)}U_1^*(t) + \ldots + \alpha_k^{(k)}U_k^*(t)] = \sum_{j=0}^{n} f_j^* U_j^*(t), \quad t \in [0,1],$$

из которого для определения $c_{n+\varkappa}, c_{n+\varkappa-1}, \ldots, c_\varkappa$ находим систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей. Недостающие коэффициенты $c_{\varkappa-1}, \ldots, c_1, c_0$, как и в предыдущем случае, определим из (3.2). Для их нахождения снова будем иметь систему с треугольной матрицей.

Пусть $\varkappa < 0$. Приближенное решение уравнения (1.9) в этом случае найдем из уравнения

$$A(t)Z^*(t)u_{n-|\varkappa|}(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{u_{n-|\varkappa|}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f_n^*(t) + A^* + Q_{|\varkappa|-1}(t), \quad t \in (0,1),$$

$$A^* = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 b^*(\tau)(Z^*(\tau))^{-1} f_n^*(\tau)\tau^{|\varkappa|-1}\,d\tau, \tag{3.7}$$

где интерполяционный многочлен $f_n^*(t)$ определяется по правилу (3.3), $Q_{|\varkappa|-1}(t) = q_0^* + q_1^* t + \ldots + q_{|\varkappa|-1}^* t^{|\varkappa|-1}$,

$$u_{n-|\varkappa|}(t) = \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} c_k t^k. \tag{3.8}$$

Коэффициенты $q_0^*, q_1^*, \ldots, q_{|\varkappa|-1}^*$ вспомогательного многочлена $Q_{|\varkappa|-1}(t)$ определим из равенств (см. (1.13))

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}[f_n^*(\tau) + A^* + Q_{|\varkappa|-1}(\tau)]\tau^{j-1}\,d\tau = 0, \quad j = \overline{1, |\varkappa|}. \tag{3.9}$$

Применяя формулу (1.14), от (3.9) приходим к системе

$$q^*_{|\varkappa|-1}+f_{|\varkappa|-1}+q_1f_{|\varkappa|}+\ldots+q_{n-|\varkappa|+1}f_n=0,$$

$$q_1q^*_{|\varkappa|-1}+q^*_{|\varkappa|-2}+f_{|\varkappa|-2}+q_1f_{|\varkappa|-1}+\ldots+q_{n-|\varkappa|}f_n=0,\ \ldots,$$

$$q_{|\varkappa|-1}q^*_{|\varkappa|-1}+\ldots+q_1q^*_1+q^*_0+f_0+q_1f_1+\ldots+q_nf_n=0,$$

где числа $q_1,q_2,\ldots$ находятся из разложения $(X(z))^{-1}=z^{-|\varkappa|}(1+q_1/z+q_2/z^2+\ldots)$, $|z|>1$.

Подставляя (3.8) в (3.7), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n-|\varkappa|}c_k(t^{k+|\varkappa|}+p_1t^{k+|\varkappa|-1}+\ldots+p_{k+|\varkappa|})=\sum_{k=0}^{n}f_kt^k+A^*+q^*_0+q^*_1t+\ldots+q^*_{|\varkappa|-1}t^{|\varkappa|-1},$$

от которого переходим к системе

$$c_{n-|\varkappa|}=f_n,\quad p_1c_{n-|\varkappa|}+c_{n-|\varkappa|-1}=f_{n-1},\quad\ldots,\quad p_{n-|\varkappa|}c_{n-|\varkappa|}+p_{n-|\varkappa|-1}c_{n-|\varkappa|-1}+\ldots+c_0=f_{|\varkappa|},$$

$$p_{n-|\varkappa|-1}c_{n-|\varkappa|}+p_{n-|\varkappa|-2}c_{n-|\varkappa|-1}+\ldots+p_1c_0=f_{|\varkappa|-1}+q^*_{|\varkappa|-1},\quad\ldots,$$

$$p_nc_{n-|\varkappa|}+p_{n-1}c_{n-|\varkappa|-1}+\ldots+p_{|\varkappa|}c_0=f_0+A^*+q^*_0.$$

Из первых $n-|\varkappa|-1$ уравнений последовательно находим $c_{n-|\varkappa|},c_{n-|\varkappa|-1},\ldots,c_0$.

Приведем еще одну вычислительную схему для уравнения (1.9) с отрицательным индексом. Приближенное решение найдем из уравнения (3.7), полагая

$$f^*_n(t)=\sum_{j=0}^{n}f^*_jT^*_j(t),\quad f^*_j=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}T^*_j(t_k)f^*(t_k),\quad j=\overline{1,n},\quad f^*_0=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}f^*(t_k),$$

$$t_k=\frac12\cos\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi+\frac12,\quad k=\overline{1,n+1},$$

$$Q_{|\varkappa|-1}(t)=\sum_{m=0}^{|\varkappa|-1}h_mT^*_m(t),\quad u_{n-|\varkappa|}(t)=\sum_{k=|\varkappa|}^{n}c_{k-|\varkappa|}U^*_{k-|\varkappa|}(t).\tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.7) и учитывая формулу (2.2) из [6], а именно формулу

$$A(t)\,Z^*(t)U^*_{k-|\varkappa|}(t)+\frac{1}{\pi i}\int_0^1B(\tau)Z^*(\tau)\frac{U^*_{k-|\varkappa|}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\beta_j^{(k)}T^*_j(t),\quad t\in[0,1],\quad k=|\varkappa|,|\varkappa|+1,\ldots,$$

в которой коэффициенты $\beta_j^{(k)}$ вычисляются по правилу (2.13) из [6], будем иметь

$$\sum_{k=|\varkappa|}^{n}c_{k-|\varkappa|}\left[A(t)Z^*(t)U^*_{k-|\varkappa|}(t)+\frac{1}{\pi i}\int_0^1B(\tau)Z^*(\tau)\,\frac{U^*_{k-|\varkappa|}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right]=$$

$$=\sum_{k=|\varkappa|}^{n}c_{k-|\varkappa|}\left[\sum_{j=0}^{k}\beta_j^{(k)}T^*_j(t)\right]=\sum_{j=0}^{n}f^*_jT^*_j(t)+A^*+\sum_{m=0}^{|\varkappa|-1}h_mT^*_m(t)\quad\forall t\in[0,1].\tag{3.11}$$

От (3.11) приходим к системе $\sum_{k=j}^{n}\beta_j^{(k)}c_{k-|\varkappa|}=f_j^*$, $j=n,n-1,\dots,|\varkappa|$, из которой последовательно находим неизвестные $c_{n-|\varkappa|},c_{n-|\varkappa|-1},\dots,c_0$.

Замечание 3.1. Имея вычислительные схемы для уравнения (1.9), не представляет труда построить вычислительные схемы и для уравнения (1.7), как это сделано в работе [6].

4. Приведем порядковые оценки погрешностей построенных в п. 3 приближенных решений. Для этого введем класс функций W^rH^μ, $r\ge 0$, $0<\mu\le 1$. Будем говорить, что функция $f(t)\in W^rH^\mu$, $t\in[0,1]$, если она имеет производные до порядка r включительно и r-я производная принадлежит классу Гёльдера $H(\mu)$: $|f^{(r)}(t')-f^{(r)}(t'')|\le K|t'-t''|^\mu$ $\forall t',t''\in[0,1]$, где K и μ – константы, не зависящие от выбора точек t', t''.

Теорема 4.1. *Пусть функции $a^*(t)$, $b^*(t)$, $(a^*(t))^2-(b^*(t))^2\ne 0$ $\forall t\in[0,1)$, входящие в уравнение (1.9), принадлежат классу $H(\mu)$, $0<\mu\le 1$, функция $f^*(t)$, являющаяся правой частью этого уравнения, принадлежит классу W^rH^μ, $r\ge 0$, $0<\mu\le 1$. Пусть, далее, $f^*(t)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (3.3) по узлам Чебышева первого рода, $u(t)$, $u_{n+\varkappa}(t)$ означают соответственно точное и приближенное решение задач (1.9), (1.20), (3.1), (3.2). Тогда*

$$\|(1-t)^{-\operatorname{Re}\beta_1}(u(t)-u_{n+\varkappa}(t))\|_\infty\le M(\ln^2 n)/n^{r+\mu}, \tag{4.1}$$

где β_1 – число, входящее в представление (1.8), M – константа, не зависящая от n.

Доказательство. Поскольку

$$u_{n+\varkappa}(t)=\frac{a^*(t)}{Z^*(t)}f_n^*(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\frac{f_n^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+P_\varkappa(t-1),$$

то

$$u(t)-u_{n+\varkappa}(t)=\frac{a^*(t)}{Z^*(t)}[f^*(t)-f_n^*(t)]-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)}\,\frac{f^*(\tau)-f_n^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Далее, учитывая неравенство [7] $\|f^*(t)-f_n^*(t)\|_\infty\le M_1(\ln n)/n^{r+\mu}$, а также оценки, приведенные в [8] для сингулярного интеграла, приходим к оценке (4.1).

Замечание 4.1. Теорема 4.1 справедлива и для вычислительных схем (3.5), (3.8), (3.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
3. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* // Integrals and Series. 1992. V. 5. P. 472.
4. *Estrada R., Kanwal R.P.* Singular Integral Equations. Boston; Basel; Berlin, 2000.
5. *Шешко М.А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.
6. *Smarzewski R., Sheshko M.A., Rasolko G.A.* // J. Comput. Meth. in Appl. Math. 2003. V. 2. P. 331–358.
7. *Paszkowski S.* // Numerical Applications of Chebyshev Polynomials and Series. Warszaw, 1975.
8. *Шешко М.А.* // Изв. вузов. Математика. 1976. № 12. С. 108–118.

Католический университет,
г. Люблин, Польша

Поступила в редакцию
29.10.2003 г.