Yu. B. Suris, Generalized Toda chains in discrete time,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 2, 141–157

https://www.mathnet.ru/eng/aa178

Ю. Б. Сурис

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

В статье найдены интегрируемые разностные аппроксимации для обобщенных цепочек Тоды, связанных со всеми классическими сериями простых алгебр Ли и аффинных алгебр Ли. Для них получены разностные аналоги представления Лакса, из которых выведены производящие функции для полных наборов интегралов. Для цепочек A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$ доказана инволютивность интегралов.

§ 1. Введение

В огромном потоке литературы по интегрируемым динамическим системам сравнительно мало внимания уделяется системам с дискретным временем (разностным уравнениям) [1-11]. Между тем проблема построения интегрируемых разностных аппроксимаций для данной интегрируемой системы дифференциальных уравнений весьма актуальна. Такие интегрируемые разностные уравнения представляют интерес не только как приближения к дифференциальным уравнениям (и, следовательно, как аппарат для их адекватного численного исследования), но и как их обобщения, ибо дифференциальные уравнения можно рассматривать в некотором смысле как частный (предельный) случай разностных. Тем самым получает обобщение и весь богатый набор математических объектов, связанных с интегрируемыми динамическими системами (см., например, [12,13]).

В настоящей работе предлагается обширный класс новых конечномерных интегрируемых систем вида

$$q(t+h)-2q(t)+q(t-h) = -h^2 \frac{\partial V(q,h)}{\partial q} ; \quad q = (q_1,\dots,q_N)\in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Здесь правая часть берется при $q=q(t)$; $h>0$ - шаг дискретизации по времени; функция $q(t)$ определена при $t=kh$, $k\in\mathbb{Z}$ (запись разностного уравнения в виде (1.1) может навести на мысль о том, что $q(t)$ определена для всех $t\in\mathbb{R}$, однако ничего подобного не подразумевается, такая запись принята лишь во избежание двойных индексов). На h не накладывается никаких условий малости, хотя когда говорят, что система (1.1) есть разностная аппроксимация системы дифференциальных уравнений

Ключевые слова: обобщенные цепочки Тоды, разностые уравнения, интегрируемые системы.

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U(q)}{\partial q}; \qquad q \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

то подразумевается предельный переход $h \longrightarrow 0$, при котором выполняется соотношение $V(q,h) \longrightarrow U(q)$.

Система (1.2) в координатах q, $p=\dot{q}$ принимает вид гамильтоновой системы $\dot{q}=p=\partial H/\partial p$, $\dot{p}=-\partial U/\partial q=-\partial H/\partial q$ с гамильтонианом $H(q,p)=(p,p)/2+U(q)$. Подобно этому система (1.1) в координатах

$$q(t), \; p(t) = (q(t)-q(t-h))/h \tag{1.3}$$

порождает отображение $(q(t),p(t)) \longmapsto (q(t+h),p(t+h))$ фазового пространства: $\mathbb{R}^{2N}\{q,p\}$:

$$\left.\begin{aligned} &q(t+h)=q(t)+hp(t)-h^2\partial V(q,h)/\partial q,\\ &p(t+h)=p(t)-h\partial V(q,h)/\partial q, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

которое является каноническим относительно стандартной симплектической структуры в фазовом пространстве. В самом деле, Легко проверить, что матрица Якоби этого отображения

$$D = \frac{\partial(q(t+h),p(t+h))}{\partial(q(t),p(t))} = \begin{pmatrix} E-h^2\partial^2V/\partial q^2 & hE \\ -h\partial^2V/\partial q^2 & E \end{pmatrix}$$

является симплектической: $D^TJD=J$, где $J=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, 0 и E - нулевая и единичная матрицы $N\times N$.

Как известно, интегралом отображения (1.4) (или порожденной им динамической системы) называется функция $I(q,p)$, удовлетворяющая тождеству $I(q(t+h),p(t+h))=I(q(t),p(t))$. Вообще говоря, динамическая система, порожденная отображением (1.4), не имеет нетривиальных непрерывных интегралов и в этом ее основное отличие от фазового потока автономной гамильтоновой системы, который всегда обладает по крайней мере одним интегралом - гамильтонианом. Однако понятие полной интегрируемости для отображения (1.4) может быть определено совершенно аналогично случаю гамильтоновой системы - как существование N функционально независимых интегралов $I_1,\dots,I_N$, находящихся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, т.е. удовлетворяющих условию

$$\left\{I_m, I_n\right\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial I_m}{\partial p_k}\frac{\partial I_n}{\partial q_k} - \frac{\partial I_m}{\partial q_k}\frac{\partial I_n}{\partial p_k}\right) = 0; \; 1 \le m,\; n \le N. \tag{1.5}$$

Для вполне интегрируемого отображения (1.4), также в полной аналогии со случаем вполне интегрируемой гамильтоновой системы, справедлива теорема Лиувилля-Арнольда: если совместное множество уровней интегралов $I_1,\dots,I_N$ связно и компактно, и интегралы на нем независимы, то оно диффеоморфно тору $\mathbb{T}^N$, а отображение (1.4) индуцирует на нем групповой сдвиг [14].

В настоящей работе построены вполне интегрируемые системы вида (1.1), которые аппроксимируют обобщенные цепочки Тоды (связанные с аффинными алгебрами Ли классических серий, см. [12]). Приведем „разностные потенциалы" $V(q,h)$, определяющие эти системы. Обозначим

$$V_N(q,h) = \sum_{i=1}^{N-1} F(h^2 e^{q_{i+1}-q_i}) \;/\; h^2, \tag{1.6}$$

где введена функция $F(x)=\int_0^x y^{-1}\ln(1+y)dy$ (очевидно, что $F(x)\sim x$ при $x \longrightarrow 0$). Тогда

$$V_{A_{N-1}}(q,h)=V_N(q,h),\ N\geq 2, \qquad V_{B_N}(q,h)=V_N(q,h)+F(h^2e^{-q_N})/h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{C_N}(q,h) = V_N(q,h) + F(2h^2e^{-2q_N})/2h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{D_N}(q,h) = V_N(q,h) + F(h^2e^{-q_{N-1}-q_N})/h^2,\ N\geq 3,$$

$$V_{A^{(1)}_{N-1}}(q,h) = V_N(q,h) + F(h^2e^{q_1-q_N}) \;/\; h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{B^{(1)}_N}(q,h) = V_N(q,h) + F(h^2e^{-q_N})/h^2 + F(h^2e^{q_1+q_2}) \;/h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{C^{(1)}_N}(q,h) = V_N(q,h) + F(2h^2e^{-2q_N})/2h^2 + F(2h^2e^{2q_1}) \;/2h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{D^{(1)}_N}(q,h) = V_N(q,h) + F(h^2e^{-q_{N-1}-q_N})/h^2 + F(h^2e^{q_1+q_2})/h^2,\ N\geq 4,$$

$$V_{A^{(2)}_{2N-1}}(q,h) = V_N(q,h) + F(2h^2e^{-2q_N})/2h^2 + F(h^2e^{q_1+q_2})/h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{A^{(2)}_{2N}}(q,h) = V_N(q,h) + F(h^2e^{-q_N})/h^2 + F(2h^2e^{2q_1})/2h^2,\ N\geq 2,$$

$$V_{D^{(2)}_{N+1}}(q,h) = V_N(q,h) + F(h^2e^{-q_N})/h^2 + F(h^2e^{q_1})/h^2,\ N\geq 2.$$

В дальнейшем под „цепочкой G", где $G\in\left\{A_{N-1},\ldots,D^{(2)}_{N+1}\right\}$, подразумевается система уравнений (1.1) с потенциалом $V_G(q,h)$.

Как видно из (1.1),(1.6), во всех введенных системах уравнения для всех q_i, $2<k<N-1$ (а в некоторых системах и для $k=2,N-1$), имеют вид

$$q_k(t+h)-2q_k(t)+q_k(t-h)=\ln\frac{1+h^2e^{q_{k+1}-q_k}}{1+h^2e^{q_k-q_{k-1}}},\tag{1.7}$$

или, эквивалентно,

$$e^{q_k(t+h)-q_k(t)}-e^{q_k(t)-q_k(t-h)}=$$
$$=h^2e^{q_{k+1}(t)-q_k(t-h)}-h^2e^{q_k(t+h)-q_{k-1}(t)}\tag{1.8}$$

Отличаются системы друг от друга уравнениями для q_k, $k=1,2,N-1,N$.

Для каждой из перечисленных систем построено коммутационное представление - разностный аналог представления Лакса. Из него выводится производящая функция для полного набора функционально независимых интегралов. Доказана инволютивность интегралов для цепочек A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$ на основе другого коммутационного представления - разностного аналога представления нулевой кривизны. Интегралы для других цепочек также находятся в инволюции, но общее доказательство этого факта автор оставляет для отдельной публикации, равно как и исследование алгебраических объектов, связанных с предложенной конструкцией. Следует отметить, что, хотя система уравнений (1.7) до сих пор в литературе, кажется, не появлялась, но в случае бесконечной цепочки ($-\infty<\imath<\infty$) она тесно связана с введенной в работах Хироты [2,4] системой

$$\frac{(1+v_k(t+h))(1+v_k(t-h))}{(1+v_k(t))^2}=\frac{(1+h^2v_{k+1}(t))(1+h^2v_{k-1}(t))}{(1+h^2v_k(t))^2},$$

названной им „уравнением Тоды в дискретном времени". Для нее в [2] найдены многосолитонные решения, а в [4] - преобразования Бэклунда; вопросы существования интегралов не рассматривались. Система, которую Хирота называет „уравнением цепочки Тоды в дискретном времени", имеет вид

$$e^{q_k(t+h)-q_k(t)}-e^{q_k(t)-q_k(t-h)}=h^2e^{q_{k+1}(t)-q_k(t)}-h^2e^{q_k(t)-q_{k-1}(t)}$$

(ср. (5.15) в [4] и существенно отличается от (1.8).

§ 2. Представление типа Лакса и интегралы для цепочек A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$

В следующих трех параграфах приведено 11 предложений, нумеруемых не числами, а обозначениями простых алгебр Ли и аффинных алгебр Ли. В предложении (G), где $G\in\left\{A_{N-1},\ldots,D_{N+1}^{(2)}\right\}$, даны коммутационное представление и производящая функция интегралов для разностной аппроксимации соответствующей обобщенной цепочки Тоды, т.е. для системы (1.1) с потенциалом $V_G(q,h)$. Коммутационные представления определены на матрицах, зависящих от спектрального параметра λ; используется обозначение $E_{i,j}$ для матрицы (любой размерности), у которой отличен от нуля (и равен единице) лишь элемент, стоящий в пересечении i-й строки и j-го столбца. Мы приводим эти представления в координатном (неинвариантном) виде, поскольку, как уже было сказано, исследование возникающих здесь алгебраических объектов не входит в задачи настоящей статьи. Всюду в дальнейшем без дополнительных пояснений переходим от координат $q(t)$, $q(t-h)$ к координатам $q(t)$, $p(t)$ и обратно (см. (1.3)).

Характерная черта рассматриваемых в этом и в следующем параграфах цепочек - отсутствие в графах Кокстера для соответствующих алгебр Ли узлов, т.е. вершин, соединенных ребрами более чем с двумя другими вершинами. Отражением этого обстоятельства является форма разностного аналога представления Лакса для этих цепочек:

$$L^+(t+h,\lambda)\ L^-(t,\lambda) = L^-(t+h,\lambda)\ L^+(t,\lambda), \tag{2.1}$$

где

$$L^+(t,\lambda) = \lambda\ e^{Q(t)-Q(t-h)} - hX, \tag{2.2}$$

$$L^-(t,\lambda) = \lambda^{-1}E + he^{Q(t)}Y\ e^{-Q(t-h)}. \tag{2.3}$$

Поясним используемые обозначения. E - единичная матрица; $Q(t)$ - элемент подалгебры Картана - диагональная матрица, параметризованная координатами $q(t)$, вид этой матрицы будет указан в каждом конкретном случае;

$$X = \sum_{\alpha\in P} X_\alpha\ , \qquad Y = \sum_{\alpha\in P} Y_\alpha\ , \tag{2.4}$$

где P - некоторое множество корней соответствующей алгебры Ли [15]. Корнем α, как известно, называется линейная форма на подалгебре Картана, для которой существуют нетривиальные элементы X_α и Y_α, удовлетворяющие для всех элементов Q подалгебры Картана тождествам

$$\mathrm{ad}\ Q\cdot X_\alpha = [Q,\ X_\alpha] = \alpha(Q)\ X_\alpha,$$
$$\mathrm{ad}\ Q\cdot Y_\alpha = [Q,\ X_\alpha] = -\alpha(Q)\ Y_\alpha.$$

Отсюда следует также

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}\ Q}\cdot X_\alpha &= e^Q\ X_\alpha\ e^{-Q} = e^{\alpha(Q)}X_\alpha\ ,\\ e^{\mathrm{ad}\ Q}\cdot Y_\alpha &= e^Q\ Y_\alpha\ e^{-Q} = e^{-\alpha(Q)}Y_\alpha\ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Коммутационное соотношение (2.1) с матрицами (2.2), (2.3) эквивалентно:

$$e^{Q(t+h)-Q(t)}(E+h^2e^{Q(t)}Ye^{-Q(t)}X)=(E+h^2Xe^{Q(t)}Ye^{-Q(t)})\ e^{Q(t)-Q(t-h)}.$$

Конкретизируем это соотношение, используя определение (2.4). Используем при этом также (2.5) и то обстоятельство, что отсутствие узлов в графах Кокстера, о котором говорилось выше, проявляется в равенствах

$$X_\beta Y_\alpha = Y_\alpha X_\beta = 0 \text{ для } \alpha,\beta\in P,\ \alpha\neq\beta. \tag{2.6}$$

Окончательно получим, что (2.1) при условиях (2.2),(2.3),(2.4),(2.6) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} &e^{Q(t+h)-Q(t)}(E+h^2\sum_{\alpha\in P} e^{-\alpha(Q)}Y_\alpha X_\alpha) = \\ &= (E+h^2\sum_{\alpha\in P} e^{-\alpha(Q)}X_\alpha Y_\alpha)\, e^{Q(t)-Q(t-h)}\ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

В настоящем параграфе рассмотрим представления типа Лакса на матрицах $N\times N$. При этом используем обозначение

$$Q(t) = \operatorname{diag}\,(q_1(t),\dots,q_N(t)).$$

Положим

$$\alpha_k(Q) = q_k - q_{k+1};\quad X_{\alpha_k} = E_{k,k+1}\ Y_{\alpha_k} = E_{k+1,1}\ (1\le k\le N-1),$$

$$\alpha_N(Q) = q_N - q_1;\quad X_{\alpha_N} = E_{N,1},\ Y_{\alpha_N} = E_{1,N}\ .$$

П р е д л о ж е н и е (A_{N-1}). *Представление типа Лакса имеет вид* (2.1)-(2.4) *с* $P=\{\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1}\}$. *Производящая функция интегралов:*

$$\det(L^+(t,\lambda)-L^-(t,\lambda)) = (-1)^N+\lambda^{-N}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^{N-m}\lambda^{-N+2m}\ I_m \tag{2.8}$$

П р е д л о ж е н и е ($A^{(1)}_{N-1}$). *Представление типа Лакса имеет вид* (2.1)-(2.4) *с* $P=\{\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1},\alpha_N\}$. *Производящая функция интегралов имеет вид* (2.8).

Д о к а з а т е л ь с т в а. Системы уравнений цепочек A_{N-1}, $A^{(1)}_{N-1}$ состоят из уравнений (1.7) для $2\le k\le N-1$ и уравнений для $k=1,N$:

$$\begin{aligned} &q_1(t+h)-2q_1(t)+q_1(t-h) = \ln\,(1+h^2\ e^{q_2-q_1}), \\ &q_N(t+h)\ -2q_N(t)+q_N(t-h) = \ln\,1/(1+h^2\ e^{q_N-q_{N-1}}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

для цепочки A_{N-1},

$$q_1(t+h)-2q_1(t)+q_1(t-h) = \ln\frac{1+h^2\ e^{q_2-q_1}}{1+h^2\ e^{q_1-q_N}}\ ,$$

$$q_N(t+h)-2q_N(t)+q_N(t-h) = \ln\frac{1+h^2\ e^{q_1-q_N}}{1+h^2\ e^{q_N-q_{N-1}}}$$

для цепочки $A^{(1)}_{N-1}$. Легко видеть, что эти системы эквивалентны (2.7) с соответствующими наборами корней P и что эти наборы P удовлетворяют условию (2.6). Отсюда следуют утверждения о представлении типа Лакса. Докажем утверждения о производящих функциях интегралов. Уравнение (2.1) эквивалентно:

$$(L^+(t+h,\lambda)-L^-(t+h,\lambda))L^-(t,\lambda)=L^-(t+h,\lambda)(L^+(t,\lambda)-L^-(t,\lambda)). \tag{2.10}$$

Для цепочки A_{N-1} имеем $\det L^-(t+h,\lambda)=\det L^-(t,\lambda)=\lambda^{-N}$, поэтому из (2.10) выводим

$$\det(L^+(t+h,\lambda)-L^-(t+h,\lambda)) = \det(L^+(t,\lambda)-L^-(t,\lambda)), \tag{2.11}$$

и утверждение доказано. Функциональная независимость получаемых интегралов I_m следует из того, что, как нетрудно убедиться, I_m представляет собой многочлен от e^{hp_k}, $e^{q_{k+1}-q_k}$, причем сумма одночленов, не зависящих от q_1, есть m-я элементарная симметрическая функция от $e^{hp_1},\dots,e^{hp_N}$. Например,

$$I_1 = \sum_{k=1}^{N} e^{hp_k} + h^2 \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_{k+1}-q_k+hp_k},$$

$$I_{N-1} = \prod_{k=1}^{N} e^{hp_j} \left\{ \sum_{k=1}^{N} e^{-hp_k} + h^2 \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_{k+1}-q_k-hp_{k+1}} \right\},$$

$$I_N = \prod_{k=1}^{N} e^{hp_k}.$$

(Отсюда следует, кстати, что интегралом является полный импульс системы $\sum_{k=1}^{N} p_k$ и что выражение, заключенное в фигурные скобки в I_{N-1}, - также интеграл).

Для цепочки $A_{N-1}^{(1)}$ полный импульс $\sum_{k=1}^{N} p_k$ также является интегралом, что можно увидеть непосредственно из уравнений движения. Это позволяет снова вывести (2.11) из (2.10), ибо в данном случае $\det L^-(t+h,\lambda)=\det L^-(t,\lambda)=\lambda^{-N}+\prod_{k=1}^{N} e^{hp_k}$. Доказательство функциональной независимости получаемых интегралов - точно такое же, как в предыдущем случае. Отметим, что интеграл I_1 отличается от одноименного интеграла для цепочки A_{N-1} дополнительным слагаемым $h^2e^{q_1-q_N+hp_N}$, а интеграл I_{N-1} отличается от одноименного интеграла для цепочки A_{N-1} дополнительным слагаемым $h^2e^{q_1-q_N-hp_1}$ в фигурных скобках. Предложения доказаны.

Доказательство инволютивности полученных интегралов для цепочек A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$ будет приведено в § 5.

§ 3. Представление типа Лакса и интегралы $r_{(2)}$ для цепочек B_N, C_N, $C_N^{(1)}$, $A_{2N}^{(2)}$ и $D_{N+1}^{(2)}$

В этом и в следующем параграфах представления типа Лакса (2.1) рассматриваются на матрицах $(2N+a)\times(2N+a)$, где $a=0,1$ или 2. Призводящая функция интегралов во всех случаях имеет вид

$$\det(L^+(t,\lambda) - L^-(t,\lambda)) = (\lambda-\lambda^{-1})^a((\lambda^2+\lambda^{-2})^N + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m(\lambda^2+\lambda^{-2})^{N-m}I_m). \tag{3.1}$$

Строки и столбцы матриц $L^{\pm}$ нумеруются соответственно наборами индексов $(1,\dots,N,-N,\dots,-1)$, $(1,\dots,N,0,-N,\dots,-1)$ или $(\infty,1,\dots,N,0,-N,\dots,-1)$. Матрицы Q имеют вид соответственно $\mathrm{diag}(q_1,\dots q_N,-q_N,\dots,-q_1)$, $\mathrm{diag}(q_1,\dots q_N,0,-q_N,\dots,-q_1)$ или $\mathrm{diag}(0,q_1,\dots,q_N,0,-q_N,\dots,-q_1)$, что можно представить, независимо от того, какой из трех случаев рассматривается, как

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{N} q_k(t)(E_{k,k} - E_{-k,-k}).$$

Также независимо от значения a=0,1,2 положим для $1\le i\le N-1$

$$\alpha_k(Q) = q_k - q_{k+1}; \tag{3.2}$$

$$X_{\alpha_k} = E_{k,k+1} - E_{-k-1,-i}; \; Y_{\alpha_k} = E_{k+1,k} - E_{-k,-k-1}.$$

В случае a=0 положим для алгебр C_N, $C_N^{(1)}$

$$\alpha_N(Q)=2q_N; \; X_{\alpha_N} = E_{N,-N}; \; Y_{\alpha_N} = 2E_{-N,N}$$

и (только для второй из них)

$$\alpha_0(Q)=-2q_1; \; X_{\alpha_0} = E_{-1,1}; \; Y_{\alpha_0} = 2E_{1,-1}.$$

Предложение (C_N). *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N)\times(2N)$ *имеет вид* (2.1)-(2.4) *с* $P=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$. *Производящая функция интегралов равна* (3.1) *с* a=0.

Предложение ($C_N^{(1)}$). *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N)\times(2N)$ *имеет вид* (2.1)-(2.4) с $P=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$. *Производящая функция интегралов равна* (3.1) *с* a=0.

В случае a=1 положим для алгебр B_N, $A_{2N}^{(2)}$

$$\alpha_N(Q) = q_N; \; X_{\alpha_N} = E_{N,0} - E_{0,-N}; \; Y_{\alpha_N} = E_{0,N} - E_{-N,0}$$

и (только для второй из них)

$$\alpha_0(Q) = -2q_1; \; X_{\alpha_0} = E_{-1,1}; \; Y_{\alpha_0} = 2E_{1,-1}.$$

Предложение (B_N). *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N+1)\times(2N+1)$ *имеет вид* (2.1)-(2.4) с $P=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$. *Призводящая функция интегралов равна* (3.1) *с* a=1.

Предложение ($A_{2N}^{(2)}$). *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N+1)\times(2N+1)$ *имеет вид* (2.1)-(2.4) *с* $P=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$. *Производящая функция интегралов равна* (3.1) *с* a=1.

Наконец, в случае a=2 положим для алгебры $D_{N+1}^{(2)}$

$$\alpha_N(Q) = q_N; \; X_{\alpha_N} = E_{N,0} - E_{0,-N}; \; Y_{\alpha_N} = E_{0,N} - E_{-N,0};$$

$$\alpha_0(Q) = -q_1; \; X_{\alpha_0} = E_{-1,\infty} - E_{\infty,1}; \; Y_{\alpha_0} = E_{\infty,-1} - E_{1,\infty}.$$

П р е д л о ж е н и е ($D^{(2)}_{N+1}$) *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N+2)\times(2N+2)$ *имеет вид* (2.1)-(2.4) *с* $P=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$. *Производящая функция интегралов равна* (3.1) *с* $a=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Системы уравнений пяти рассматриваемых цепочек состоят из уравнений (1.7) для $2\le k\le N-1$; для $k=1$ уравнения (2.9) - для цепочек B_N, C_N,

$$q_1(t+h) - 2q_1(t) + q_1(t-h) = \ln\frac{1+h^2e^{q_2-q_1}}{1+2h^2e^{2q_1}}$$

- для цепочек $C^{(1)}_N$, $A^{(2)}_{2N}$,

$$q_1(t+h) - 2q_1(t) + q_1(t-h) = \ln\frac{1+h^2e^{q_2-q_1}}{1+h^2e^{q_1}}$$

- для цепочки $D^{(2)}_{N+1}$; и уравнения для $i=N$

$$q_N(t+h) - 2q_N(t) + q_N(t-h) = \ln\frac{1+2h^2e^{-2q_N}}{1+h^2e^{q_N-q_{N-1}}}$$

- для цепочек C_N, $C^{(1)}_N$,

$$q_N(t+h) - 2q_N(t) + q_N(t-h) = \ln\frac{1+h^2e^{-q_N}}{1+h^2e^{q_N-q_{N-1}}}$$

- для цепочек B_N, $A^{(2)}_{2N}$, $D^{(2)}_{N+1}$.

Непосредственная проверка показывает, что эти системы уравнений эквивалентны (2.7) с указанными в предложениях наборами корней P и что эти наборы корней P удовлетворяют условию (2.6). Это доказывает утверждения о представлении типа Лакса. Утверждения о производящей функции интегралов следуют из (2.10), ибо, как нетрудно вычислить, во всех пяти случаях $\det L^-(t+h,\lambda)=\det L^-(t,\lambda)$ (этот определитель равен λ^{-2N-a} для цепочек B_N, C_N и $\lambda^{-2N-a} + (-1)^{N-1+a}\cdot 2^{2-a}h^{2N+a}$ для цепочек $C^{(1)}$, $A^{(2)}_{2N}$, $D^{(2)}_{N+1}$. Функциональная независимость получаемых интегралов следует из того, что I_m представляет собой многочлен от e^{hp_k}, e^{-hp_k}, $e^{q_{k+1}-q_k}$, e^{q_1}, e^{2q_1}, e^{-q_N}, e^{-2q_N} , причем сумма одночленов, не зависящих от координат q, с точностью до постоянного множителя равна m-й элементарной симметрической функции от $\operatorname{ch} hp_1,\ldots,\operatorname{ch} hp_N$. Для примера приведем значения интеграла I_1 для цепочки C_N

$$I_1=\sum_{k=1}^{N} 2\operatorname{ch} hp_k + h^2\sum_{k=1}^{N-1} e^{q_{k+1}-q_k}(e^{hp_k}+ e^{-hp_{k+1}})+2h^2e^{-2q_N+hp_N},$$

для цепочки $C^{(1)}_N$ к этому добавляется слагаемое $2h^2e^{2q_1-hp_1}$, для цепочки B_N

$$I_1=\sum_{k=1}^{N} 2\mathrm{ch}\ hp_k + h^2\sum_{k=1}^{N-1} e^{q_{k+1}-q_k}(e^{hp_k}+e^{-hp_{k+1}})+h^2e^{-q_N}(1+e^{hp_N}),$$

для цепочек $A^{(2)}_{2N}$ и $D^{(2)}_{N+1}$ к этому добавляются соответственно слагаемые $2h^2e^{2q_1-hp_1}$ и $h^2e^{q_1}(1+e^{-hp_1})$. Предложения доказаны.

§ 4. Представление типа Лакса и интегралы для цепочек D_N, $B^{(1)}_N$, $D^{(1)}_N$, $A^{(2)}_{2N-1}$

Рассматриваемые в настоящем параграфе цепочки соответствуют алгебрам Ли, графы Кокстера которых разветвлены, т. е. имеют узлы. Это проявляется в том, что разностный аналог представления Лакса для этих цепочек принимает следующую, более сложную, форму

$$L^+(t+h,\lambda)\ L^-(t,\lambda) - L^-(t+h,\lambda)\ L^+(t,\lambda) =$$

$$= h^2(\lambda L^+_1(t+h) - L^-_0(t+h))\ \Omega\ (t)(\lambda^{-1}L^-_{-1}(t)-L^+_0(t)) - \tag{4.1}$$

$$-h^2(\lambda^{-1}L^-_{-1}(t+h) - L^+_0(t+h))\ \Omega\ (t)(\lambda\ L^+_1(t)-L^-_0(t)).$$

Здесь введены следующие обозначения для однородных по λ компонент матриц $L^{\pm}$:

$$L^+(t,\lambda) = \lambda L^+_1(t) + L^+_0(t),\quad L^-(t,\lambda) = \lambda^{-1}L^-_{-1}(t) + L^-_0(t). \tag{4.2}$$

Примечательным новым явлением оказывается самостоятельная роль, которую начинают играть эти однородные компоненты: в (4.1) компоненты матриц L^+ и L^- перемешиваются; этот эффект, однако, проявляется только в членах порядка h^2 и исчезает при $h \longrightarrow 0$, т. е. для цепочек Тоды с непрерывным временем.

Как и в (2.2)-(2.4), в этом параграфе всегда

$$L^+_0(t) = -hX,\quad L^-_0(t) = he^{Q(t)}Ye^{-Q(t+h)}, \tag{4.3}$$

где

$$X = \sum_{\alpha\in P} X_\alpha,\quad Y = \sum_{\alpha\in P} Y_\alpha. \tag{4.4}$$

Цепочки, соответствующие алгебрам D_N, $D^{(1)}_N$, реализуются на матрицах $(2N)\times(2N)$, причем вдобавок к (3.2) следует положить

$$\alpha_N(Q) = q_{N-1} + q_N;$$

$$X_{\alpha_N} = E_{N-1,-N} - E_{N,-N+1};\ Y_{\alpha_N} = E_{-N,N-1} - E_{-N+1,N}$$

и (только для второй из этих алгебр)

$$\alpha_0(Q) = -q_1 - q_2;$$

$$X_{\alpha_0} = E_{-1,2} - E_{-2,1};\ Y_{\alpha_0} = E_{2,-1} - E_{1,-2}.$$

П р е д л о ж е н и е (D_N). *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N)\times(2N)$ *имеет вид* (4.1), *где компоненты матриц* (4.2) *равны* (4.3), (4.4) *с* $P=\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$,

$$\lambda L_1^+(t) = \lambda e^{Q(t)-Q(t-h)} + h^2\lambda E_{N-1,-N+1},$$

$$\lambda^{-1}L_{-1}^-(t) = \lambda^{-1}E + h^2\lambda^{-1}e^{Q(t)}E_{-N+1,N-1}e^{-Q(t-h)},$$

а

$$\Omega(t) = e^{-\alpha_{N-1}(Q(t))}E_{N,-N} + e^{-\alpha_N(Q(t))}E_{-N,N}.$$

Производящая функция интегралов равна (3.1) *с* $a=0$.

П р е д л о ж е н и е ($D_N^{(1)}$). *Представление типа Лакса на матрицах* $(2N)\times(2N)$ *имеет вид* (4.1), *где компоненты матриц* (4.2) *равны* (4.3), (4.4) *с* $P=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$,

$$\lambda L_1^+(t) = \lambda e^{Q(t)-Q(t-h)} + h^2\lambda(E_{N-1,-N+1} + E_{-2,2}),$$

$$\lambda^{-1}L_{-1}^-(t) = \lambda^{-1}E + h^2\lambda^{-1}e^{Q(t)}(E_{-N+1,N-1} + E_{2,-2})e^{-Q(t-h)},$$

а

$$\Omega(t) = e^{-\alpha_{N-1}(Q(t))}E_{N,-N} + e^{-\alpha_N(Q(t))}E_{-N,N} +$$

$$+ e^{-\alpha_1(Q(t))}E_{-1,1} + e^{-\alpha_N(Q(t))}E_{1,-1}.$$

Производящая функция интегралов равна (3.1) с $a=0$.

Цепочки, отвечающие алгебрам $B_N^{(1)}$ и $A_{2N-1}^{(2)}$, реализуются на матрицах порядка $(2N+1)\times(2N+1)$ и $(2N)\times(2N)$ соответственно, причем к наборам корней $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, отвечающим алгебрам B_N и C_N, в обоих случаях добавляется

$$\alpha_0(Q) = -q_1 - q_2;$$

$$X_{\alpha_0} = E_{-1,2} - E_{-2,1};\ Y_{\alpha_0} = E_{2,-1} - E_{1,-2}.$$

Следующие два предложения совершенно идентичны по форме, поэтому мы объединяем их формулировки, но следует помнить о различии в их содержании, связанном с различными порядками матриц и различными выражениями для корня α_N и корневых элементов X_{α_N}, Y_{α_N}.

П р е д л о ж е н и я ($A_{2N-1}^{(2)}$), ($B_N^{(1)}$). *Представления типа Лакса на матрицах* $(2N+a)\times(2N+a)$ *имеют вид* (4.1), *где компоненты матриц* (4.2) *равны* (4.3), (4.4) *с* $P =$

$= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$,

$$\lambda L_1^+(t) = \lambda e^{Q(t)-Q(t-h)} + h^2\lambda\, E_{-2,2},$$

$$\lambda^{-1}L_{-1}^-(t) = \lambda^{-1}E + h^2\lambda^{-1}e^{Q(t)}E_{2,-2}\, e^{-Q(t-h)},$$

а

$$\Omega(t) = e^{-\alpha_1(Q(t))}E_{-1,1} + e^{-\alpha_0(Q(t))}E_{1,-1}.$$

Производящая функция интегралов равна (3.1) с $a=0,1$ *соответственно.*

Доказательство предложения (D_N). В данном случае свойство (2.6) набора корней P нарушается соотношениями

$$X_{\alpha_{N-1}}Y_{\alpha_N} = Y_{\alpha_N}X_{\alpha_{N-1}} = E_{-N,N},$$

$$X_{\alpha_N}Y_{\alpha_{N-1}} = Y_{\alpha_{N-1}}X_{\alpha_N} = E_{N,-N}.$$

(Отметим также, что $X_{\alpha_{N-1}}X_{\alpha_N} = X_{\alpha_N}X_{\alpha_{N-1}} = E_{N-1,-N+1}$ и $Y_{\alpha_{N-1}}Y_{\alpha_N} = Y_{\alpha_N}Y_{\alpha_{N-1}} = E_{-N+1,N-1}$). Эти соотношения позволяют преобразовать коммутационное представление (4.1) к виду

$$e^{Q(t+h)-Q(t)}\Big(E + h^2\sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha_k(Q)}\, Y_{\alpha_k}X_{\alpha_k} + h^4 e^{-\alpha_{N-1}(Q)-\alpha_N(Q)}E_{-N+1,-N+1}\Big) = \Big(E + h^2\sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha_k(Q)}\, X_{\alpha_k}Y_{\alpha_k} + h^4 e^{-\alpha_{N-1}(Q)-\alpha_N(Q)}E_{N-1,N-1}\Big)\, e^{Q(t)-Q(t-h)}$$

(ср. с (2.7)). Это уравнение в свою очередь эквивалентно системе уравнений цепочки D_N, которая состоит из уравнений (1.7) для $2\le k\le N-2$, (2.9) для $k=1$, и

$$q_{N-1}(t+h)-2q_{N-1}(t)+q_{N-1}(t-h) = \ln\frac{(1+h^2e^{q_N-q_{N-1}})(1+h^2e^{-q_N-q_{N-1}})}{(1+h^2e^{q_{N-1}-q_{N-2}})}, \tag{4.5}$$

$$q_N(t+h)-2q_N(t)+q_N(t-h) = \ln\frac{1+h^2e^{-q_N-q_{N-1}}}{1+h^2e^{q_N-q_{N-1}}}. \tag{4.6}$$

Тем самым доказано утверждение о представлении типа Лакса. Для доказательства утверждения о производящей функции интегралов заметим, что (4.1) можно записать в виде

$$(L^+(t+h,\lambda)-L^-(t+h,\lambda))\Phi_1(t,\lambda) = \Phi_2(t+h,\lambda)(L^+(t,\lambda)-L^-(t,\lambda)), \tag{4.7}$$

где

$$\Phi_1(t,\lambda)=L^-(t,\lambda) + h^2\Omega(t)(L_0^+(t) - \lambda^{-1}L_{-1}^-(t)), \tag{4.8}$$

$$\Phi_2(t+h,\lambda)=L^-(t+h,\lambda) + h^2(L_0^+(t+h) - \lambda^{-1}L_{-1}^-(t+h))\ \Omega(t). \tag{4.9}$$

Несложные вычисления дают

$$\det\Phi_1(t,\lambda)=\lambda^{-2N}\Big\{1+h^4\lambda^2 e^{-2q_{N-1}(t)}(e^{q_N(t)-q_N(t-h)} +$$

$$+ e^{q_N(t-h)-q_N(t)} + h^2 e^{-q_N(t-h)-q_{N-1}(t)} + h^2 e^{q_N(t-h)-q_{N-1}(t)} - \lambda^{-2})\Big\},$$

$$\det\Phi_2(t+h,\lambda)=\lambda^{-2N}\Big\{1+h^4\lambda^2 e^{-2q_{N-1}(t)}(e^{q_N(t+h)-q_N(t)} +$$

$$+ e^{q_N(t)-q_N(t+h)} + h^2 e^{q_N(t+h)-q_{N-1}(t)} + h^2 e^{-q_N(t+h)-q_{N-1}(t)} - \lambda^{-2})\Big\}.$$

Из уравнения (4.6) следует, что эти два определителя равны, откуда, как и ранее, вытекает тождество (2.11). Функциональная независимость получаемых таким образом интегралов доказывается в точности так же, как и раньше. Для примера приведем значение

$$I_1 = \sum_{k=1}^{N} 2\operatorname{ch} hp_k + h^2 \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_{k+1}-q_k}(e^{hp_k} + e^{-hp_{k+1}}) +$$

$$+ h^2 e^{-q_N-q_{N-1}}(e^{hp_N} + e^{hp_{N-1}}) + h^4 e^{-2q_{N-1}+hp_{N-1}}.$$

Предложение доказано.

Доказательство предложений ($A_{2N-1}^{(2)}$), ($B_N^{(1)}$). Системы уравнений цепочек $A_{2N-1}^{(2)}$, $B_N^{(1)}$ отличаются от систем уравнений цепочек C_N, B_N соответственно лишь уравнениями для q_1, q_2, которые в этих двух случаях одинаковы и имеют вид

$$q_1(t+h)-2q_1(t)+q_1(t-h)=\ln\frac{1+h^2e^{q_2-q_1}}{1+h^2e^{q_2+q_1}}, \tag{4.10}$$

$$q_2(t+h)-2q_2(t)+q_2(t-h)=\ln\frac{(1+h^2e^{q_3-q_2})}{(1+h^2e^{q_2-q_1})(1+h^2e^{q_2+q_1})}. \tag{4.11}$$

Эквивалентная запись этих систем

$$e^{Q(t+h)-Q(t)}(E+h^2\sum_{k=0}^{N} e^{-\alpha_k(Q)}Y_{\alpha_k}X_{\alpha_k}+h^4e^{-\alpha_0(Q)-\alpha_1(Q)}E_{2,2}) =$$

$$=(E + h^2\sum_{k=0}^{N} e^{-\alpha_1(Q)}X_{\alpha_k}Y_{\alpha_k} + h^4e^{-\alpha_0(Q)-\alpha_1(Q)}E_{-2,-2})e^{Q(t)-Q(t-h)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что последнее равенство равносильно коммутационному представлению (4.1) с указанными в предложениях матрицами $L^{\pm}$, Ω. При проведении вычислений следует учесть соотношения $X_{\alpha_0}Y_{\alpha_1}=Y_{\alpha_1}X_{\alpha_0}=E_{-1,1}$ и $X_{\alpha_1}Y_{\alpha_0}=Y_{\alpha_0}X_{\alpha_1}=E_{1,-1}$, нарушающие в данном случае свойство (2.6), а также $X_{\alpha_0}X_{\alpha_1}=X_{\alpha_1}X_{\alpha_0}=-E_{-2,2}$ и $Y_{\alpha_0}Y_{\alpha_1}=Y_{\alpha_1}Y_{\alpha_0}=-E_{2,-2}$. Доказательство утверждения о производящих функциях интегралов снова вытекает из (4.7)-(4.9), ибо, как и в предыдущем предложении, равенство определителей $\det\Phi_1(t,\lambda)$ и $\det\Phi_2(t+h,\lambda)$ проверяется прямыми вычислениями, в заключительной части которых следует использовать (4.10). Отметим, что интегралы I_1 для цепочек $A^{(2)}_{2N-1}$, $B^{(1)}_N$ отличаются соответственно от интегралов I_1 для цепочек C_N, B_N на слагаемые

$$h^2e^{q_2+q_1}(e^{-hp_1}+e^{-hp_2})+h^4e^{2q_2-hp_2}.$$

Предложения доказаны.

Доказательство предложения $(D^{(1)}_N)$ полностью аналогично доказательству предыдущих трех, поэтому подробности мы опускаем. Отметим лишь, что система уравнений цепочки $D^{(1)}_N$ состоит из уравнений (1.7) для $3\le k\le N-2$, (4.5), (4.6), (4.10), (4.11).

§ 5. Инволютивность интегралов для цепочек A_{N-1} и $A^{(1)}_{N-1}$

Цепочки A_{N-1} и $A^{(1)}_{N-1}$ допускают коммутационное представление другого типа, а именно разностный аналог представления нулевой кривизны. Рассмотрим матрицы 2x2, зависящие от спектрального параметра λ,

$$\Lambda_k(t,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda e^{q_k(t)-q_k(t-h)}-\lambda^{-1} & he^{q_k(t)}\\ -he^{-q_k(t-h)} & 0\end{pmatrix},$$

$$V_k(t,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & -he^{q_k(t)}\\ he^{-q_{k-1}(t)} & \lambda\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что равенство

$$\Lambda_k(t+h,\lambda)V_k(t,\lambda)=V_{k+1}(t,\lambda)\Lambda_k(t,\lambda) \tag{5.1}$$

эквивалентно уравнению (1.8). Рассмотрим совокупность уравнений (5.1) для $1\le k\le N$. Если наложить граничные условия $q_0(t)=\infty$, $q_{N+1}(t)=-\infty$, то система (5.1) эквивалентна цепочке A_{N-1}, если же наложить граничные условия $q_{N+1}(t)\equiv q_1(t)$, $q_0(t)\equiv q_N(t)$, то система (5.1) эквивалентна цепочке $A^{(1)}_{N-1}$. Составим „матрицу монодромии"

$$T(t,\lambda)=\Lambda_N(t,\lambda)\Lambda_{N-1}(t,\lambda),\dots,\Lambda_1(t,\lambda). \tag{5.2}$$

Из (5.1) следует соотношение

$$T(t+h,\lambda)V_1(t,\lambda) = V_{N+1}(t,\lambda)T(t,\lambda). \tag{5.3}$$

Поскольку для цепочки A_{N-1} в матрицах $V_1(t,\lambda)$, $V_{N+1}(t,\lambda)$ исчезают соответственно поддиагональный и наддиагональный элементы, а для цепочки $A^{(1)}_{N-1}$ $V_1(t,\lambda)\equiv V_{N+1}(t,\lambda)$, то из (5.3) выводим:

$$T_{11}(t+h,\lambda) = T_{11}(t,\lambda) \text{ для цепочки } A_{N-1}, \tag{5.4}$$

$$\mathrm{tr}T(t+h,\lambda) = \mathrm{tr}T(t,\lambda) \text{ для цепочки } A^{(1)}_{N-1}, \tag{5.5}$$

т.е. $T_{11}(t,\lambda)$ и $\mathrm{tr}T(t,\lambda)$ - производящие функции интегралов для цепочки A_{N-1} и $A^{(1)}_{N-1}$ соответственно. Нетрудно убедиться, что они совпадают с производящими функциями, полученными в § 2. Теперь доказательство инволютивности интегралов, т.е. формулы (1.5), сводится к доказательству инволютивности их производящих функций.

П р е д л о ж е н и е.

$$\{T_{11}(\lambda),\ T_{11}(\mu)\} = 0,$$

$$\{\mathrm{tr}T(\lambda),\ \mathrm{tr}T(\mu)\} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем операцию $\{\cdot \underset{,}{\otimes} \cdot\}$, определенную на парах матричных функций класса C^1 в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2N}\{q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N\}$, по формуле

$$\left\{A \underset{,}{\otimes} B\right\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial p_k} \otimes \frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k} \otimes \frac{\partial B}{\partial p_k} \right),$$

где $\otimes$ - символ тензорного произведения. Для матриц

$$\Lambda_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda e^{hp_k} - \lambda^{-1} & he^{q_k} \\ -he^{-q_k+hp_k} & 0 \end{pmatrix}$$

справедливо тождество

$$\{\Lambda_k(\lambda) \underset{,}{\otimes} \Lambda_j(\mu)\} = [r(\lambda,\mu),\ \Lambda_k(\lambda) \otimes \Lambda_k(\mu)]\delta_{kj}, \tag{5.6}$$

где $[\cdot,\cdot]$ - обычный коммутатор, а

$$r(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}\cdot\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2} & \frac{h\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2} & 0 \\ 0 & \frac{h\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2} & \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2}\cdot\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} \end{pmatrix}$$

Из (5.2) , (5.6) стандартным образом (см., например, [14]), выводится тождество

$$\{T(\lambda) \underset{,}{\otimes} T(\mu)\} = [r(\lambda,\mu),\ T(\lambda) \otimes T(\mu)]. \tag{5.7}$$

Поскольку

$$\{T_{11}(\lambda),\ T_{11}(\mu)\} = \{T(\lambda) \underset{,}{\otimes} T(\mu)\}_{11},$$

$$\{\mathrm{tr}T(\lambda),\ \mathrm{tr}T(\mu)\} = \mathrm{tr}\{T(\lambda) \underset{,}{\otimes} T(\mu)\},$$

то из (5.7) следуют оба утверждения предложения (первое выражение равно нулю в силу структуры матрицы r, а второе - для любой матрицы r).

Таким образом, доказана полная интегрируемость по Лиувиллю цепочек Тоды A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$ в дискретном времени.

§ 6. Заключение

Результаты данной работы заключаются в следующем: найдены интегрируемые разностные аппроксимации для обобщенных цепочек Тоды, связанных со всеми классическими сериями простых алгебр Ли и аффинных алгебр Ли. Для них получены разностные аналоги представления Лакса, из которых выведены производящие функции для полных наборов интегралов. Для цепочек A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$ получен также разностный аналог представления нулевой кривизны, и на его основе - доказательство инволютивности интегралов.

Некоторые проблемы, непосредственно связанные с предметом статьи, остались за ее рамками - построение интегрируемых разностных аппроксимаций для обобщенных цепочек Тоды, связанных с исключительными простыми алгебрами Ли и аффинными алгебрами Ли; доказательство инволютивности построенных наборов интегралов для цепочек, отличных от A_{N-1} и $A_{N-1}^{(1)}$; инвариантная теоретико-групповая формулировка механизма интегрируемости обобщенных цепочек Тоды в дискретном времени.

За этими частными проблемами стоит глобальная проблема, которая пока не имеет удовлетворительного общего решения - построение интегрируемых разностных аппроксимаций для интегрируемых систем дифференциальных уравнений. Автор надеется, что данная работа может послужить шагом к ее решению.

Список литературы

[1] Hirota R. Nonlinear partial difference equations. I. A difference analog of KdV equation // J. Phys. Soc. Japan. 1977. Vol.43, N 4. P.1423-1433.

[2] Hirota R. Nonlinear partial difference equations.II. Discrete-time Toda equation // J. Phys. Soc. Japan. 1977. Vol.43, N 6. P.2074-2078.

[3] Hirota R. Nonlinear partial difference equations. III. Discrete Sine-Gordon equation //J. Phys. Soc. Japan.1977. Vol.43, N 6. P.2079-2086.

[4] Hirota R. Nonlinear partial difference equations. IV. Bäcklund

transformations for the discrete-time Toda equation // J.Phys. Soc. Japan. 1 9 7 8. Vol.45, N 1. P.321-332.

[5] H i r o t a R. Nonlinear partial difference equations. V. Nonlinear equations reducible to linear equations // J. Phys. Soc. Japan. 1 9 7 9. Vol.46, N 1. P.312-319.

[6] A b l o w i t z M., L a d i c J. A non-linear difference scheme and inverse scattering // Stud. Appl. Math. 1 9 7 6. Vol.55, N 3. P.213-229.

[7] A b l o w i t z M., L a d i c J. On solution of a class of nonlinear partial difference equations // Stud. Appl. Math. 1 9 7 7. Vol.57, N 1. P.1-12.-12.

[8] Q u i s p e l G., N i j h o f f F., C a p e l H., V a n d e r L i n d e n J. Linear integral equations and nonlinear differential-difference equations // Physica A. 1 9 8 4. Vol.125, N 2-3. P.344-380.

[9] N i j h o f f F., C a p e l H.,W i e r s m a G. Integrable lattice systems in two and three dimensions // Lecture Notes Phys. 1 9 8 4. N 239. P.263-302.

[10] D a t e F., J i m b o M., M i w a T. Method for generating discrete soliton equations. I-V // J. Phys. Soc. Japan. 1 9 8 2. Vol.51, N 12. P.4116-4124, 4125-4131. 1983. Vol.52, N2. P.388-393. N 3. P.761-765, 766-771.

[11] В е с е л о в А.П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы // Функцион. анализ и его прил. 1 9 8 8. Т.22, N 2. С.1-13.

[12] О л ь ш а н е ц к и й М.А., П е р е л о м о в А.М., Р е й м а н А.Г., С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Интегрируемые динамические системы. II // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. итоги науки и техники. Т.16. М.: ВИНИТИ, 1 9 8 7. С.86-226.

[13] Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1 9 8 6. 528 с.

[14] А р н о л ь д В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1 9 7 9. 432 с.

[15] Б у р б а к и Н. Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1 9 7 8. 342 с.

Ленинградский политехнический институт им. М.И.Калинина
195021, Ленинград, Политехническая ул., 29

Поступило 1 февраля 1989 г.