В. С. Владимиров, О спектре некоторых псевдодифференциальных, операторов над полем p-адических чисел, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 6, 107–124

https://www.mathnet.ru/aa223

В.С.Владимиров

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НАД ПОЛЕМ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Для разнообразных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве функций от p-адических аргументов, изучаются их спектры.

§ 1. Введение

В этой работе будет рассмотрен ряд задач о спектре конкретных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{L}_2(G)$ – комплексно-значных функций p-адических аргументов $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in Q_p\times Q_p\times\dots\times Q_p=Q_p^n$ (см. [1-7]); $|x|_p=\max|x_k|_p$.

p-адическим псевдодифференциальным оператором A называется оператор вида

$$A\psi = \int_{Q_p^n} a(\xi,x)\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-(\xi,x))d\xi, \qquad (1.1)$$

Здесь функция $a(\xi,x)$ называется *символом* оператора A, $(\xi,x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\dots\xi_nx_n$.

Примерами таких операторов являются следующие операторы.

1. Оператор типа Шредингера (см. [3,8])

$$\Delta\psi + V(x)\psi = \int_{Q_p^n} [|\xi_1|_p^2 + |\xi_2|_p^2 +\dots+ |\xi_n|_p^2 + V(x)]\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-(\xi,x))d\xi; \qquad (1.2)$$

с символом

$$|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 + V(x). \qquad (1.3)$$

2. Оператор эволюции квантового p-адического гармонического осциллятора [1,2]

$$U(t)\psi = \int_{Q_p} K_t^{(p)}(x,y)\psi(y)dy, \quad t\in G_p, \qquad (1.4)$$

где ядро $K^{(p)}(x,y)$ имеет вид

$$K_t^{(p)}(x,y) = \lambda_p(t)\left|\frac{2}{t}\right|^{1/2}\chi_p\left(\frac{2xy}{\sin t} - \frac{x^2+y^2}{\operatorname{tg} t}\right). \qquad (1.5)$$

Этот оператор задает унитарное представление группы G_p:

$$U(t)U(t') = U(t+t'), \quad t,t'\in G_p.$$

Его символ есть

$$a_t(\xi,x) = \int_{Q_p} K_t^{(p)}(x,y)\chi_p(\xi y)dy = \chi_p\left(\operatorname{tg} tx^2 + \frac{\operatorname{tg} t}{4}\xi^2 + \frac{\xi x}{\cos t}\right). \qquad (1.6)$$

Ключевые слова: p-адическая квантовая механика, псевдодифференциальный оператор, дискретность спектра, символ оператора, компактность оператора, оператор типа Шредингера.

3. Оператор эволюции свободной квантовой p-адической частицы

$$U(t)\psi = \lambda_p(t)\left|\frac{2}{t}\right|^{1/2} \int_{Q_p} \chi_p\left(-\frac{(x-y)^2}{t}\right) \psi(y)dy, \quad t\in Q_p. \tag{1.7}$$

Он задает унитарное представление аддитивной группы поля Q_p; его символ равен

$$a_t(\xi,x) = \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4}\, t\right).$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\tilde{\psi}(\xi)$ - преобразование Фурье функции $\psi(x)$;

$$\tilde{\psi}(\xi) = \int_{Q_p^n} \psi(x)\chi_p((\xi,x))dx, \quad (\xi,x) = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \ldots \xi_nx_n.$$

Группа $G_p=[t\in Q_p: |t|_p\le 1/p]$ при $p\ne 2$ и $G_2=[t\in Q_2: |t|_2\le 1/4]$; $\chi_p(x)$ - аддитивный (нормированный) характер поля Q_p; $\lambda_p(x)$ - теоретико-числовая функция, определяемая равенствами: если $x\in Q_p$ имеет канонический вид $x=p^\gamma(x_0+x_1p+x_2p^2+\ldots)$, $\gamma\in\mathbb{Z}$, $x_0\ne 0$, $0\le x_j\le p-1$ (x_j - целые), то

$$\lambda_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ четное,} \\ \left(\frac{x_0}{p}\right), & \text{если } \gamma \text{ нечетное, } p\equiv 1 \pmod 4, \\ i\left(\frac{x_0}{p}\right), & \text{если } \gamma \text{ нечетное, } p\equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

$$\lambda_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\,[1+(-1)^{x_1}\, i], & \text{если } \gamma \text{ четное,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1)^{x_1}\,[(-1)^{x_2}+i], & \text{если } \gamma \text{ нечетное,} \end{cases}$$

где $\left(\frac{x_0}{p}\right)$ - символ Лежандра; dx - мера Хаара на аддитивной группе поля Q_p, нормированная условием

$$\int_{Q_p} \Omega(|x|_p)dx = \int_{|x|_p\le 1} dx = 1, \quad \text{где } \Omega(\alpha) = 1, \quad 0\le\alpha\le 1, \quad \Omega(\alpha) = 0, \quad \alpha > 1.$$

По поводу принятых обозначений, терминологии и используемых результатов см. работы [1-9].

§ 2. О дискретности спектра ограниченного снизу самосопряженного оператора

Пусть A - ограниченный снизу самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$:

$$(A\varphi,\varphi) \ge c\|\varphi\|^2, \quad \varphi\in D(A) \tag{2.1}$$

при некотором вещественном c. Обозначим $\rho(A)$ - резольвентное множество, $\sigma(A)$ - спектр оператора A. Замкнутую билинейную форму, порожденную оператором A, обозначим $A(\varphi,\psi)$; ее область определения обозначим через $Q(A)\supset D(A)$, так что на элементах φ и ψ из $D(A)$ справедливо равенство

$$A(\varphi,\psi) = (A\varphi,\psi). \tag{2.2}$$

Обозначим через $\lambda_k(A)$, $k=1,2,\ldots$ величины, определяемые принципом минимакса

$$\lambda_k(A) = \sup_{\varphi_1,\varphi_{k-1}\in H} \inf_{\substack{(\psi,\varphi_i)=0,\ i=1,2,\ldots,k-1 \\ \psi\in Q(A)}} \frac{A(\psi,\psi)}{\|\psi\|^2}. \tag{2.3}$$

Имеет место следующая теорема (см., например, [9], Т.4).

Теорема. *Пусть A - ограниченный снизу самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$; пусть $A(\varphi,\psi)$ - соответствующая билинейная форма с областью определения $Q(A)$.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *оператор $(A-\lambda)^{-1}$ компактен при некотором $\lambda\in\rho(A)$;*

(2) *оператор $(A-\lambda)^{-1}$ компактен при всех $\lambda\in\rho(A)$;*

(3) *множество функций $\{\psi\in D(A): \|\varphi\|\le a,\ \|A\varphi\|\le b\}$ компактно при всех a и b;*

(4) *существует ортонормированный базис $\{\varphi_k,\ k=1,2,\ldots\}$ в $D(A)$ такой, что*

$$A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k,\ k=1,2,\ldots \tag{2.4}$$

при некоторых λ_k таких, что

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots,\quad \lambda_k \longrightarrow \infty,\quad k \longrightarrow \infty; \tag{2.5}$$

(5) $\lambda_k(A) \longrightarrow \infty,\quad k \longrightarrow \infty,$

где числа $\lambda_k(A)$ определяются формулой (2.3).

Пример 1. Псевдодифференциальный оператор

$$D^\alpha\varphi = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha\, \tilde\varphi(\xi)\chi_p(-x,\xi)d\xi;\ \alpha>-1 \tag{2.6}$$

ограничен снизу и самосопряжен в гильбертовом пространстве $H=\mathcal{L}_2(Q_p)$:

$$(D^\alpha\varphi,\psi) = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha\, \tilde\varphi(\xi)\overline{\tilde\psi(\xi)}d\xi;\ \varphi,\psi\in D(A), \tag{2.7}$$

$$\|D^\alpha\varphi\|^2 = \int_{Q_p} |\xi|_p^{2\alpha}|\tilde\varphi(\xi)|^2 d\xi,\ \varphi\in D(A) \tag{2.8}$$

с областью определения

$$D(D^\alpha) = [\varphi\in\mathcal{L}_2(Q_p):\ |\xi|_p^\alpha\, \tilde\varphi \in\mathcal{L}_2(Q_p)].$$

Соответствующая (2.7) билинейная форма

$$(D^\alpha\varphi,\psi) = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha\, \tilde\varphi(\xi)\overline{\tilde\psi(\xi)}d\xi;\ \psi,\psi\in Q(D^\alpha)$$

замкнута и ее область определения есть

$$Q(D^\alpha) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p),\quad |\xi|_p^{\alpha/2}\tilde\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p)].$$

Отметим, что на основных функциях $\varphi\in D(Q_p)$ оператор (2.6) принимает вид

$$D^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int_{Q_p}\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\,dy,\quad \alpha>-1,$$

где $\Gamma_p(\alpha)$ - p-адическая Γ-функция

$$\Gamma_p(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}},\quad \alpha\neq 0. \tag{2.9}$$

Пример 2. Псевдодифференциальный оператор

$$A^{\alpha,\beta}\varphi = D^{\alpha}\varphi + |x|_p^{\beta}\varphi,\quad \varphi\in D(A^{\alpha,\beta}),\quad \alpha,\beta>-1 \tag{2.10}$$

с символом $|\xi|_p^{\alpha} + |x|_p^{\beta}$ и областью определения

$$D(A^{\alpha,\beta}) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p) \;:\; |\xi|_p^{\alpha}\,\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p),\;\; |x|_p^{\beta}\,\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p)]$$

допускает (единственное) самосопряженное по Фридрихсу расширение $\tilde{A}^{\alpha,\beta}$ с помощью замкнутой ограниченной снизу билинейной формы

$$A^{\alpha,\beta}(\varphi,\psi) = \int_{Q_p}|\xi|_p^{\alpha}\,\tilde{\varphi}\,(\xi)\overline{\tilde{\psi}(\xi)}d\xi + \int_{Q_p}|x|_p^{\beta}\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx, \tag{2.11}$$

с областью определения

$$Q(A^{\alpha,\beta}) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p) \;:\; |\xi|_p^{\alpha/2}\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p),\;\; |x|_p^{\beta/2}\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p)]. \tag{2.12}$$

Для области определения $D(\tilde{A}^{\alpha,\beta})$ оператора $\tilde{A}^{\alpha,\beta}$ справедливы включения

$$D(A^{\alpha,\beta}) \subset D(\tilde{A}^{\alpha,\beta}) \subset Q(A^{\alpha,\beta})$$

и равенство

$$A^{\alpha,\beta}(\varphi,\psi) = (\tilde{A}^{\alpha,\beta}\varphi,\psi),\quad \varphi,\psi \in D(\tilde{A}^{\alpha,\beta}). \tag{2.13}$$

§ 3. Критерии компактности функций p-адического аргумента

Так как пространство Q_p^n локально-компактно, то некоторые критерии компактности функций вещественного аргумента (см., например, [9], т. 4) непосредственно переносятся и на функции p-адического аргумента.

Пусть G - открыто-замкнутое множество в Q_p^n (не обязательно ограничено, например, $G=Q_p^n$). Пространство $\mathcal{L}_2(G)$ мы будем рассматривать как множество всех функций из $\mathcal{L}_2(Q_p^n)$, для которых носитель содержится в G.

Определения. 1) *Множество функций $M\subset\mathcal{L}_2(G)$ состоит из равностепенно непрерывных в целом в $\mathcal{L}_2(G)$ функций f, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n=n_{\varepsilon}\in\mathbb{Z}$, что*

$$\int_G |f(x+h) - f(x)|^2dx < \varepsilon,\quad |h|_p \le p^n,\quad f \in M.$$

2) *Множество $M\subset\mathcal{L}_2(G)$ состоит из функций f с равностепенно непрерывными $\mathcal{L}_2(G)$*

интегралами на бесконечности, если для любого $\varepsilon>0$ *существует такое* $N=N_\varepsilon\in\mathbb{Z}$, *что*

$$\int_{G\cap[|x|_p\ge p^N]} |f(x)|^2dx < \varepsilon,\ f\in M.$$

3) *Измеримая вещественная функция* $F(x)$, *заданная на* G, *стремится к* $+\infty$ *на бесконечности (т.е. при* $|x|_p \longrightarrow \infty$, $x\in G$), *если для любого* $M>0$ *существует такое* $N=N_M$, $N\in\mathbb{Z}$, *что* $F(x)>M$ *при* $|x|\ge p^N$, $x\in G$.

Критерий компактности Рисса-Колмогорова. *Для того чтобы множество* $M\subset\mathcal{L}_2(G)$ *было компактным в* $\mathcal{L}_2(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям:*

(1) *ограничено в* $\mathcal{L}_2(G)$;

(2) *состоит из равностепенно непрерывных в целом в* $\mathcal{L}_2(G)$ *функций;*

(3) *состоит из функций с равностепенно непрерывными* $\mathcal{L}_2(G)$-*интегралами на бесконечности.*

Переходя к преобразованию Фурье, из критерия Рисса-Колмогорова получаем такой критерий:

Для того чтобы множество $M\subset\mathcal{L}_2(G)$ *было компактным в* $\mathcal{L}_2(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия* (1), (3) *и*

(2′) *множество* $[g=\tilde{f}, f\in M]$ *состоит из функций с равностепенно непрерывными* $\mathcal{L}_2(Q_p^n)$-*интегралами на бесконечности.*

Здесь $\tilde{f}$ - преобразование Фурье функции f (точнее функции $f\in\mathcal{L}_2(G)$, продолженной нулем на $Q_p^n\setminus G$).

Из последнего критерия сразу следует *аналог критерия Реллиха: если множество* M *ограничено в* $\mathcal{L}_2(G)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\int_{Q_p} \sigma(\xi)|\tilde{f}(\xi)|^2d\xi \le C,\ f\in M, \tag{3.1}$$

$$\int_G \rho(x)|f(x)|^2dx \le C,\ f\in M, \tag{3.2}$$

где $\sigma(\xi)$ *и* $\rho(x)$ *положительные функции, стремящиеся к* $+\infty$ *на бесконечности, то* M *компактно в* $\mathcal{L}_2(G)$.

Замечание. В случае ограниченной области G условия (3) и (3.2), естественно, отсутствуют.

§ 4. О спектре псевдодифференциального оператора $a^* + V$

Пусть G - открыто-замкнутое множество пространства Q_p^n, например, шар $B_r=[x\in Q_p^n, |x|_p\le p^r]$, сфера $S_r=[x\in Q_p^n, |x|_p=p^r]$, все пространство Q_p^n, внешность шара B_r, внешность сферы S_r: $Q_p^n\setminus S_r$ $(r\in\mathbb{Z})$ и т.д.

Псевдодифференциальный оператор $a^*+V=A$,

$$A\varphi = \int_{Q_p^n} \tilde{a}(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-(\xi,x))d\xi + V(x)\varphi(x), \tag{4.1}$$

будем рассматривать на множестве G. Его символом является функция

$$\tilde{a}(\xi) + V(x), \quad \xi\in Q_p^n, \quad x\in G$$

(ср. пример 2, § 2). Предполагаем, что функции $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ ограничены снизу, локально интегрируемы и стремятся к $+\infty$ на бесконечности. При изучении задач о спектре оператора $a*+V$ без ограничения общности можно считать, что функции $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ неотрицательны.

Областью определения оператора A являются функции

$$D(A) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(G) : \tilde{a}\cdot\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p^n), \ V\cdot\varphi \in \mathcal{L}_2(G)].$$

Оператор A симметричен и ограничен снизу в $\mathcal{L}_2(G)$. С помощью соответствующей (замкнутой и ограниченной снизу) билинейной формы

$$A(\varphi,\psi) = \int_{Q_p^n} \tilde{a}(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\overline{\tilde{\psi}}(\xi)d\xi + \int_G V(x)\varphi(x)\overline{\psi}(x)dx, \tag{4.2}$$

с областью определения

$$Q(A) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(G) : \sqrt{\tilde{a}}\cdot\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p^n), \ \sqrt{V}\cdot\varphi\in\mathcal{L}_2(G)]$$

оператор A допускает (единственное) самосопряженное по Фридрихсу расширение $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A})\subset Q(A)$, причем

$$A(\varphi,\psi) = (\tilde{A}\varphi,\psi), \quad \varphi,\psi \in D(\tilde{A}) \tag{4.3}$$

(ср. пример 2, § 2, см. [9], Т. 1).

„Краевая" задача для оператора A на множестве G ставится так: пусть $f\in\mathcal{L}_2(G)$, найти функцию φ из $D(\tilde{A})$, удовлетворяющую в G уравнению

$$\tilde{A}\varphi(x) = \lambda\varphi(x) + f(x), \quad x\in G. \tag{4.4}$$

При $f=0$ получим задачу на собственные значения.

В силу критерия Реллиха (§ 3), любое ограниченное в $\mathcal{L}_2(G)$ множество M, удовлетворяющее условию

$$\tilde{A}(\varphi,\varphi)\le B, \quad \varphi \in M, \tag{4.5}$$

компактно в $\mathcal{L}_2(G)$. Поэтому, пользуясь теоремой § 2, получаем следующую теорему.

Основная теорема. При указанных выше предположениях спектр оператора A дискретный и состоит из вещественных собственных значений $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots,\lambda_k \longrightarrow \infty$, $k \longrightarrow \infty$, каждое собственное значение конечной кратности. Соответствующие собственные функции $\varphi_k\in D(\tilde{A})$ образуют ортонормальный базис $\mathcal{L}_2(G)$, так что

$$\tilde{A}\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \quad (\tilde{A}\varphi_k,\varphi_i) = \delta_{ki}, \quad k, \ i=1,2,\ldots \tag{4.6}$$

Справедлив принцип минимакса.

При $\lambda\ne\lambda_k$, $k=1,2,\ldots$ оператор $(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}$ вполне непрерывен, так что уравнение

(4.5) однозначно разрешимо в $D(\tilde{A})$ при любой $f\in\mathcal{L}_2(G)$ и решение его выражается формулой

$$\varphi = (\tilde{A}-\lambda I)^{-1} f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_k)}{\lambda_k-\lambda}\, \varphi_k. \tag{4.7}$$

При $\lambda=\lambda_k$ решение уравнения (4.5) существует тогда и только тогда, когда f ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующим собственному значению λ_k,

$$(f,\varphi_{k+i})=0, \quad i=0,\ldots,n_k-1, \tag{4.8}$$

где n_k - кратность собственного значения λ_k; это решение выражается формулой

$$\varphi = \sum_{\substack{i=0\\ \lambda_i\neq\lambda_k}}^{\infty} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i-\lambda_k}\, \varphi_i + \sum_{i=0}^{n_k-1} c_i\varphi_{k+i}, \tag{4.9}$$

где c_i - произвольные постоянные.

Замечание. Для ограниченного множества G условие $V(x) \longrightarrow +\infty$ при $|x|_p \longrightarrow \infty, x\in G$, естественно, отсутствует.

§ 5. Спектр оператора $D^\alpha, \alpha>0$ на Q_p.

Спектр оператора D^α, $\alpha>0$ $(n=1, p\neq2)$, в $\mathcal{L}_2(Q_p)$ и соответствующие собственные функции построены в работе [4] (см. также [5-7]).

Теорема. *Спектр оператора $D^\alpha, \alpha>0$ $(n=1, p\neq2)$, в $\mathcal{L}_2(Q_p)$ состоит из счетного числа собственных значений $\lambda_N=p^{\alpha N}$, $n\in\mathbb{Z}$, каждое из которых бесконечной кратности, и точки $\lambda=0$ (предельной точки собственных значений). Существует ортонормальный базис в $\mathcal{L}_2(Q_p)$, состоящий из собственных функций I рода:*

$$\psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon}(x) = p^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\frac{p}{p-1}}\ \delta(|x|_p-p^{\ell-N})\chi_p(\varepsilon p^{\ell-2N}x^2+jp^{\ell-N-1}x),$$

$$\ell=2,3,\ldots;\ j=1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots+\varepsilon_{\ell-2}p^{\ell-2},$$

$$\varepsilon_0\neq0,\ \varepsilon_s=0,1,\ldots,p-1,\ s=0,1,\ldots,\ell-2, \tag{5.1'}$$

и собственных функций II рода:

$$\psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon}(x) = p^{\frac{N-1}{2}}\ \Omega(p^{N-1}|x|_p)\chi_p(jp^{-N}x),$$

$$\ell=1,\ j=1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon=0, \tag{5.1''}$$

соответствующих собственному значению $\lambda_N, N\in\mathbb{Z}$.

Точке спектра $\lambda=0$ соответствует единственная обобщенная собственная функция $\psi(x)=1$, собственному значению λ_N соответствуют обобщенные функции

$$\psi(x) = \chi_p(\xi x),\quad |\xi|_p=p^N. \tag{5.2}$$

Собственные функции $\psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon}$ обладают свойствами:

$$\psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon} \in \mathcal{D}(Q_p), \qquad \int\limits_{Q_p} \psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon}(x)\,dx = 0, \; N\in\mathbb{Z}, \; \ell=1,2,\ldots; \tag{5.3}$$

$$\tilde{\psi}^{\ell}_{N,j,\varepsilon}(\xi) = p^{-N/2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}\,\delta(|\xi|_p-p^N)\lambda_p(\varepsilon p^{\ell})\chi_p\left(-p^{2N-\ell}\frac{\xi^2}{4\varepsilon}-p^{N-1}\frac{j\xi}{2\varepsilon}\right),$$

$$N\in Z, \; \ell=2,3\ldots, \; j=1,2,\ldots,p-1, \; \varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots+\varepsilon_{\ell-2}p^{\ell-2}; \tag{5.4'}$$

$$\tilde{\psi}^{\ell}_{N,j,0}(\xi) = p^{\frac{-N-1}{2}}\,\delta(|\xi|_p-p^N)\delta(\xi_0-j),$$

$$N\in\mathbb{Z}, \; \ell=1, \; j=1,2,\ldots,p-1,\ldots, \; \varepsilon=0. \tag{5.4''}$$

Обозначим через $\mathcal{L}^{\mathrm{I}}_2(Q_p)$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{II}}_2(Q_p)$ инвариантные подпространства, натянутые на собственные функции I и II рода соответственно; обозначим через $\mathfrak{h}^{\ell}_N$, $N\in\mathbb{Z}$, $\ell=1,2\ldots$ подпространства, натянутые на собственные функции I рода размерности $(p-1)^2p^{\ell-2}$ при $\ell=2,3,\ldots$ и на собственные функции II рода размерности $p-1$ при $\ell=1$. Тогда

$$\mathcal{L}_2(Q_p) = \mathcal{L}^{\mathrm{I}}_2(Q_p) \oplus \mathcal{L}^{\mathrm{II}}_2(Q_p) = \sum_{N=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \oplus\, \mathfrak{h}^{\ell}_N. \tag{5.5}$$

Обозначим через $\mathcal{L}'_2(B_r)$ гильбертово пространство функций f из $\mathcal{L}_2(B_r)$, для которых

$$\int\limits_{|x|_p\le p^r} f(x)dx = 0; \tag{5.6}$$

через $\mathcal{L}'_2(S_r)$ гильбертово пространство функций f из $\mathcal{L}_2(S_r)$, для которых

$$\int\limits_{|x|_p=p^r} f(x)\chi_p(-jp^{-r}x)dx = 0; \quad j=1,2,\ldots,p-1. \tag{5.7}$$

Тогда при всех $r\in\mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}'_2(B_r) = \sum_{\gamma=-\infty}^{r}\sum_{\ell=1}^{\infty} \oplus\, \mathfrak{h}^{\ell}_{\ell-\gamma}, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{L}'_2(S_r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \oplus\, \mathfrak{h}^{\ell}_{\ell-r}. \tag{5.9}$$

§ 6. Спектр оператора D^{α}, $\alpha>0$ на B_r.

По определению § 4 собственные функции оператора D^{α}, $\alpha>0$ ($n=1$, $p\ne2$) в $\mathcal{L}_2(B_r)$ – это те собственные функции для Q_p, у которых носители содержатся в B_r (см. (5.8)). Среди собственных функций I рода (см. (5.1′)) таковыми являются те, для которых $\ell-N\le r$; среди собственных функций II рода (см. (5.1″)) – те, для которых $1-N\le r$, а при $1-N<r$ они превращаются в 1 в B_r. Но и 1 является собственной функцией оператора D^{α} на B_r, соответствующей собственному значению

$$\lambda_0 = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}\, p^{\alpha(1-r)}. \tag{6.1}$$

Проверим это. По определению (см. (2.9)) при $|x|_p \le p^r$ имеем

$$D^\alpha \Omega(p^{-r}|x|_p) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{Q_p} \frac{\Omega(p^{-r}|y|_p)-1}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{|y|\ge p^{r+1}} |y|_p^{-\alpha-1}\, dy = -\frac{-1}{\Gamma_p(-\alpha)} \sum_{\gamma=r+1}^{\infty} \int_{|y|_p=p^\gamma} |y|_p^{-\alpha-1}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=r+1}^{\infty} p^{-\alpha\gamma} = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left(1-\frac{1}{p}\right) p^{-\alpha(r+1)} \frac{1}{1-p^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}\, p^{\alpha(1-r)}.$$

Итак, в соответствии с разложением (5.8) собственному значению λ_0 соответствует собственная функция $\psi_0(x)=p^{-r/2}$ (кратность 1, см. (5.6)); собственному значению

$$\lambda_1 = p^{(1-r)\alpha} \quad (N=1-r) \tag{6.2}$$

соответствуют собственные функции II рода

$$\psi^1_{1-r,j,0}(x), \quad j=1,2,\dots,p-1 \text{ (кратность } p-1); \tag{6.3}$$

собственному значению

$$\lambda_k = p^{(k-r)\alpha} \quad (N=k-r), \quad k=2,3,\dots, \tag{6.4}$$

соответствуют собственные функции I рода

$$\psi^\ell_{k-r,j,\varepsilon}(x), \quad \ell=2,3,\dots, \quad j=1,2,\dots,p-1, \tag{6.5$'$}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots \varepsilon_{\ell-2}\, p^{\ell-2}$$

и собственные функции II рода

$$\psi^1_{k-r,j,0}(x), \quad j = 1,2,\dots,p-1, \tag{6.5$''$}$$

суммарной кратности

$$(p-1)^2 + (p-1)^2 p + \dots + (p-1)^2 p^{k-2} + p-1 = p^{k-1}(p-1). \tag{6.6}$$

Построенные собственные функции образуют ортонормальный базис в $\mathcal{L}_2(B_r)$, $r\in\mathbb{Z}$.

§ 7. Спектр оператора D^α, $\alpha>0$ на S_r

Среди собственных функций I рода (5.1′) собственными функциями оператора D^α, $\alpha>0$ на сфере S_r ($n=1$, $p\ne2$) являются те, для которых $\ell-N=r$, а среди собственных функций II рода (5.1″) таковых не имеется (см. (5.9)). Как видно из предложения (5.9), коразмерность подпространства $\mathcal{L}_2'(S_r)$, натянутого на собственные функции

I рода при $r=\ell-N$, равна $p-1$ и функции

$$\varphi_j(x) = \chi_p(jp^{r-1}x), \quad x\in S_r, \quad j = 1,2,\ldots,p-1, \tag{7.1}$$

представляют базис соответствующего дефектного подпространства (см. (5.7)). Так как

$$\sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{p-1} \chi_p(jp^{r-1}x) = \sum_{j=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{jx_0}{p}} = -1, \quad x\in S_r,$$

то вместо базиса (7.1) можно выбрать базис

$$1, \ \varphi_1-\varphi_2, \ \varphi_2-\varphi_3, \ldots, \varphi_{p-2}-\varphi_{p-1}. \tag{7.2}$$

Проверим, что 1 есть собственная функция, соответствующая собственному значению

$$\lambda_0 = \frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}\, p^{(1-r)\alpha}. \tag{7.3}$$

Действительно, по определению при $|x|_p=p^r$ имеем

$$D^\alpha\delta(|x|_p-p^r) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{Q_p} \frac{\delta(|y|_p-p^r)-1}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[\int_{|y|_p<p^r} \frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}} + \int_{|y|_p>p^r} \frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[\int_{|y|_p\le p^{r-1}} |x|^{-\alpha-1}dy + \int_{|y|_p\ge p^{r+1}} |y|^{-\alpha-1}dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[p^{-(\alpha+1)r}\, p^{r-1} + \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=r+1}^{\infty} p^{-\gamma(\alpha+1)+\gamma}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\, p^{(1-r)\alpha}\left[p^{-(1+\alpha)} + \left(1-\frac{1}{p}\right)p^{-2\alpha}\,\frac{1}{1-p^{-\alpha}}\right] =$$

$$= p^{(1-r)\alpha}\,\frac{p^\alpha-1}{1-p^{-\alpha-1}}\left[p^{-(1+\alpha)} + \left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p^{-\alpha}}{p^{-\alpha}-1}\right] = p^{(1-r)\alpha}\,\frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}. \tag{7.4}$$

Докажем, что функции $\varphi_j-\varphi_{j+1}$, $j=1,2,\ldots,p-2$, являются собственными функциями, соответствующими собственному значению

$$\lambda_1 = p^{(1-r)\alpha}. \tag{7.5}$$

Действительно, пользуясь (7.4) при $|x|_p=p^r$, получим

$$D^\alpha\left[\delta(|x|_p-p^r)\varphi_j(x)\right] = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{Q_p} \frac{\delta(|y|_p-p^r)\varphi_j(y)-\varphi_j(x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\varphi_j(x)\left[\int_{|y|_p<p^r}\frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}}+\int_{|y|_p>p^r}\frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int_{\substack{|y|_p=p^r\\ y\neq x}}\frac{\chi_p(jp^{r-1}y)-\chi_p(jp^{r-1}x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}dy = p^{(1-r)\alpha}\frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}\varphi_j(x)+\mathcal{T},$$

где

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int_{\substack{|y|_p=p^r\\ y_0\neq x_0}}\frac{\exp(2\pi i\frac{j}{p}y_0)-\exp(2\pi i\frac{j}{p}x_0)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}dy =$$

$$= \frac{p^{-r(\alpha+1)}}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[\int_{\substack{|y|_p=p^r\\ y_0\neq x_0}}\exp(2\pi i\frac{j}{p}y_0)dy - \exp(2\pi i\frac{jx_0}{p})\int_{\substack{|y|_p=p^r\\ y_0\neq x_0}}dy\right] =$$

$$= \frac{p^{-r(\alpha+1)}}{\Gamma_p(-\alpha)}\left[\sum_{\substack{y_0=1\\ y_0\neq x_0}}^{p-1}\exp\left(2\pi i\frac{jy_0}{p}\right)p^r\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p-1} - \varphi_j(x)p^r\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p-2}{p-1}\right] =$$

$$= -p^{(1-r)\alpha}\frac{p^{-\alpha-1}(p-1)}{\Gamma_p(-\alpha)}\varphi_j(x)+L,$$

где

$$L = \frac{p^{-r\alpha-1}}{\Gamma_p(-\alpha)}\sum_{y_0=1}^{p-1}\exp\left(2\pi i\frac{jy_0}{p}\right) = \frac{p^{-r\alpha-1}}{\Gamma_p(-\alpha)}.$$

Поэтому

$$D^\alpha\{\delta(|x|_p-p^r)[\varphi_j(x)-\varphi_{j+1}(x)]\} = p^{(1-r)\alpha}\left[\frac{p^{\alpha}+p-2}{p^{\alpha+1}-1}-\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{\Gamma_p(-\alpha)}\right]\times$$

$$\times[\varphi_j(x)-\varphi_{j+1}(x)]+L-L = p^{(1-r)\alpha}[\varphi_j(x)-\varphi_{j+1}(x)],$$

это и требовалось установить. Так как

$$\int_{|x|_p=p^r}\varphi_k(x)\overline{\varphi_j(x)}dx =$$

$$= \int_{|x|_p=p^r}\chi_p((k-j)p^{r-1}x)dx = \begin{cases}-p^{r-1}, k\neq j,\\ p^r(1-\frac{1}{p}), k=1,\end{cases} \tag{7.6}$$

то собственные функции

$$\psi_j(x) = \frac{p^{-r/2}}{\sqrt{2}} [\chi_p(jp^{r-1}x)-\chi_p((j+1)p^{r-1}x)], \; j = 1,2,\ldots,p-2, \tag{7.7}$$

удовлетворяют условиям

$$(\psi_k,\psi_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } j=k, \\ 1/2, \text{ если } j=k+1, \\ 0, \text{ если } j\neq k \text{ и } j\neq k+1. \end{cases} \tag{7.8}$$

Суммируя результаты с учетом формул (5.7) и (5.8) получим: собственному значению λ_0(см. (7.3)) кратности 1 соответствует собственная функция $\psi_0(x)= =p^{-r/2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}$; собственному значению λ_1(см. (7.5)) кратности $p-2$ соответствуют собственные функции (7.7); собственному значению

$$\lambda_k = p^{(k-r)\alpha}, \; k = 2,3,\ldots, \tag{7.9}$$

кратности $(p-1)^2p^{k-2}$ соответствуют собственные функции I рода

$$\psi^k_{k-r,j,\varepsilon}(x), \; j=1,2,\ldots,p-1, \; \varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1p+\ldots+\epsilon_{k-2}p^{k-2}. \tag{7.10}$$

Перечисленные собственные функции образуют нормированный базис в $\mathcal{L}_2(S_r)$; они взаимно-ортогональны, кроме функций (7.7), для которых имеют место соотношения (7.8).

§ 8. Оператор типа Шредингера $D^\alpha+V(|x|_p)$, $\alpha>0$ на Q_p

Рассмотрим оператор типа Шредингера

$$A = D^\alpha + V(|x|_p), \quad \alpha > 0 \quad (n=1, \quad p\neq 2), \tag{8.1}$$

где потенциал V - непрерывная ограниченная снизу функция, причем $V(\rho)\to+\infty$ при $\rho\to\infty$.

Все собственные функции I рода (5.1′) являются собственными функциями оператора A, соответствующими собственным значениям

$$\lambda^\ell_N = p^{\alpha N} + V(p^{\ell-N}), \quad N\in\mathbb{Z}, \quad \ell=2,3,\ldots \tag{8.2}$$

Кратность λ^ℓ_N в подпространстве $\mathcal{L}^I_2Q_p)$ равна $\omega(p-1)^2p^{\ell-2}$, где ω - число различных решений (x,y) диофантова уравнения

$$p^{\alpha x} + V(p^{y-x}) = p^{\alpha N} +V(p^{\ell-N}), \quad x\in\mathbb{Z}, \quad y = 2,3,\ldots; \tag{8.3}$$

это число конечно, $1\le\omega<\infty$ по теореме § 2.

При $\alpha=2$ и $V(|x|_p)=|x|^2_p$ существуют только два решения диофантова уравнения

$$p^{2x} + p^{2y-2x} = p^{2N} + p^{2\ell-2N}, \quad x\in\mathbb{Z}, \quad y = 2,3,\ldots, \tag{8.4}$$

если $\ell\neq 2N$: $(x,y)=(N,\ell)$ и $(\ell-N,\ell)$; если $\ell=2N$, то существует только одно решение: $(x,y)=(N,\ell)$. Поэтому кратность собственного значения λ^ℓ_N оператора $A=D^2+|x|^2_p$ в подпространстве $\mathcal{L}^I_2(Q_p)$ равна

$$2(p-1)^2p^{\ell-2}, \text{ если } \ell=2N; \quad (p-1)^2p^{\ell-2}, \text{ если } \ell=2N. \tag{8.5}$$

Ему соответствуют собственные функции

$$\psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon}(x), \ \psi^{\ell}_{\ell-N,j,\varepsilon}(x), \ j=1,2,\dots,p-1, \ \varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2}p^{\ell-2} \tag{8.6}$$

(при $\ell=2N$, $\psi^{\ell}_{N,j,\varepsilon} = \psi^{\ell}_{\ell-N,j,\varepsilon}$).

Минимальное собственное значение

$$\lambda^{\ell}_{N} = p^{2N} + p^{2\ell-2N}, \quad N\in\mathbb{Z}, \quad \ell=2,3,\dots, \tag{8.7}$$

достигается при $\ell=2$ и $N=1$ и равно $2p^2$; ему соответствуют $(p-1)^2$ собственных функций I рода

$$\psi^{\ell}_{1,j,\varepsilon_0}(x), \quad j=1,2,\dots,p-1, \quad \varepsilon_0=1,2,\dots,p-1.$$

Теперь выясним, какие собственные функции II рода (5.1″) являются собственными функциями оператора (8.1). Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция* $\eta(x_0)$ *такова, что*

$$\sum_{x_0=1}^{p-1} \eta(x_0) = 0 \tag{8.7}$$

Тогда при всех $N\in\mathbb{Z}$

$$[\eta(x_0)\delta(|x|_p - p^{1-N})] = p^{-N}\eta'(\xi_0)\delta(|\xi|_p-p^{N}), \tag{8.8}$$

$$D^{\alpha}[\eta(x_0)\delta(|x|_p - p^{1-N})] = p^{\alpha N}\eta(x_0)\delta(|x|_p - p^{1-N}), \tag{8.9}$$

где

$$\eta'(\xi_0) = \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k)\exp\left(2\pi i\frac{k\xi_0}{p}\right), \quad \sum_{\xi_0=1}^{p-1} \eta'(\xi_0) = 0. \tag{8.10}$$

Доказательство. Используя (8.7) и (8.10), имеем (см. [8])

$$\int_{Q_p} \eta(x_0)\delta(|x|_p - p^{1-N})\chi_p(\xi x)dx = \int_{|x|_p=p^{1-N}} \eta(x_0)\chi_p(\xi x)dx = 0,$$

если $|\xi|_p \ne p^N$. При $|\xi|_p = p^N$ $\{\xi x\}_p = \dfrac{\xi_0 x_0}{p}$ и, стало быть,

$$\int_{|x|_p=p^{1-N}} \eta(x_0)\chi_p(\xi x)dx = \int_{|x|_p=p^{1-N}} \eta(x_0)\exp\left(2\pi i\frac{\xi_0 x_0}{p}\right) dx =$$

$$= p^{1-N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p-1}\sum_{x_0=1}^{p-1} \eta(x_0)\exp\left(2\pi i\frac{\xi_0 x_0}{p}\right) = p^{-N}\eta'(\xi_0),$$

откуда и следует формула (8.8).

Для вывода формулы (8.9) воспользуемся определением (2.6) оператора $D^{\alpha}, \alpha>0$ и формулой (8.8) с заменой N на $1-N$ и $\eta(x_0)$ на $\eta'(-\xi_0)$

$$D^{\alpha}[\eta(x_0)\delta(|x|_p-p^{1-N})] = \int_{Q_p} |\xi|_p^{\alpha}\, p^{-N}\eta'(\xi_0)\delta(|\xi|_p-p^{N})\chi_p(-\xi x)d\xi =$$

$$= p^{N(\alpha-1)}F[\eta'(-\xi_0)\delta(|\xi|_p-p^{N})] = p^{N(\alpha-1)}\, p^{N-1}\, \eta''(-x_0)\delta(|x|_p-p^{1-N}), \qquad (8.11)$$

где в силу (8.10)

$$\eta''(-x_0) = \sum_{j=1}^{p-1} \eta'(j)\exp\left(-2\pi i\frac{jx_0}{p}\right) = \sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \eta(k)\exp\left(-2\pi i\frac{kj}{p}\right)\exp\left(-2\pi i\frac{jx_0}{p}\right)\right.$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) \sum_{j=1}^{p-1} \exp\left(-2\pi i\,\frac{j(k-x_0)}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k)\begin{cases} p-1, & k=x_0 \\ -1, & k\neq x_0 \end{cases} =$$

$$= (p-1) - \eta(x_0) - \sum_{\substack{k=1\\ k\neq x_0}}^{p-1} \eta(k) = p\eta(x_0),$$

откуда и из (8.11) следует формула (8.9). ●

Из леммы следует, что нормированные функции

$$p^{N/2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \eta^2(k)\right)^{-1/2} \eta(x_0)\delta(|x|_p-p^{1-N}), \qquad \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k)=0 \qquad (8.12)$$

являются собственными функциями оператора A, соответствующими собственным значениям

$$\lambda_N^1 = p^{\alpha N} + V(p^{1-N}), \quad N \in \mathbb{Z}. \qquad (8.13)$$

Собственные функции вида (8.12) можно выбрать, например, в виде

$$p^{N/2}\, \frac{1}{\sqrt{p-1}}\, \left(\frac{x_0}{p}\right)\delta(|x|_p-p^{1-N}), \qquad (8.14)$$

$$\varphi_{N,j}(x) = p^{N/2}\sqrt{\frac{p-1}{p-2}}\cdot\left[\frac{1}{p-1} - \delta(x_0-j)\right]\delta(|x|_p-p^{1-N}),$$

$$j = 1,2,\dots,p-1, \qquad (8.15)$$

$$\varphi_{N,j}(x) = p^{N/2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\delta(x_0-j)-\delta(x_0-j-1)\right]\delta(|x|_p-p^{1-N}),$$

$$j = 1,2,\dots,p-2, \qquad (8.16)$$

Линейно-независимых собственных функций вида (8.15) фактически $p-2$, так как

$$\sum_{j=1}^{p-1} \varphi_{N,j}(x) = 0.$$

Поэтому кратность собственного значения λ_N^1 не меньше $p-2$.

При $\alpha=2$ и $V(|x|_p)=|x|_p^2$ кратность собственного значения

$$\lambda_N^1 = p^{2N} + p^{2-2N}=\lambda_{1-N}^1, \qquad N \in \mathbb{Z}, \qquad (8.17)$$

не меньше $2(p-2)$.

Из принципа минимакса (см. § 2) следует, что существует собственное значение

λ_N^0 оператора $A=D^2+|x|_p^2$, которое меньше, чем λ_N^1: если

$$\psi_o(x) = p^{N/2}\Omega(p^N|x|_p)+p^{-N/2}\Omega(p^{-N}|x|_p), \quad \tilde{\psi}_0(\xi) = \psi_0(\xi),$$

то в силу (8.17)

$$\lambda_N^0 < \frac{(A\psi_0,\psi_0)}{\|\psi_0\|^2} = \frac{2\int\limits_{Q_p} |x|_p^2 \, |\psi_0(x)|^2 dx}{2(1+p^{-|N|})} = \frac{p^{2N}+p^{-2N}+2p^{-3|N|}}{1+p^{-|N|}} \times$$

$$\times \frac{p^2}{p^2+p+1} < p^{2N}+p^{2-2N} = \lambda_N^1$$

Отсюда следует также, что минимальное собственное значение λ_0 оператора $A=D^2+|x|_p^2$ положительное, простое и не превосходит

$$0<\lambda_0 = \min_{N\in\mathbb{Z}} \lambda_N^0 < \min_{N\in\mathbb{Z}} \frac{p^{2N}+p^{-2N}+2p^{-3|N|}}{1+p^{-|N|}} \frac{p^2}{p^2+p+1} = \frac{2p^2}{p^2+p+1} < 2. \tag{8.18}$$

Вопрос. Как вычислить собственные значения λ_N^0, $N\in\mathbb{Z}$, и соответствующую собственную функцию оператора $D^2+|x|_p^2$?

§ 9. Оператор эволюции квантового p-адического гармонического осциллятора

Оператор эволюции $U(t)$ (см. (1.4)) задает унитарное представление в $\mathcal{L}_2(Q_p)$ коммутативной компактной группы G_p. Поэтому задача о разложении по собственным функциям оператора $U(t)$ эквивалентна задаче о разложении на неприводимые представления $U(t)$ группы G_p. Эта задача решена в работе [6] (см. также [2,7]), где вычислены собственные значения $\lambda_\alpha(t)$ и размерности соответствующих инвариантных подпространств H_α оператора $U(t)$:

$$\lambda_\alpha(t) = \chi_p(\alpha t), \tag{9.1}$$

где при $p\equiv1 \pmod 4$

$$\alpha=0 \text{ и } \alpha=p^{-\gamma}(\alpha_0+\alpha_1 p+\ldots+\alpha_{\gamma-2}p^{\gamma-2}), \quad \dim H_\alpha=\infty,$$

$$\gamma=2,3,\ldots,0\le\alpha_j\le p-1, \quad \alpha_0\ne0, \quad j=0,1,\ldots,\gamma-2;$$

при $p\equiv3 \pmod 4$

$$\alpha=0, \quad \dim H_0=1 \text{ и } \alpha=p^{-2\gamma}(\alpha_0+\alpha_1 p+\ldots+\alpha_{2\gamma-2}p^{2\gamma-2}),$$

$$\dim H_\alpha=p+1, \quad \gamma=1,2,\ldots,0\le\alpha_j\le p-1, \quad \alpha_0\ne0, \quad j=0, 1,\ldots,2\gamma-2;$$

при $p=2$

$$\alpha=0 \text{ и } \alpha=2^{-3}, \quad \dim H_\alpha=2 \text{ и } \alpha=2^{-\gamma}(1+2+\alpha_2 2^2+\ldots+\alpha_{\gamma-3}2^{\gamma-3}),$$

$$\dim H_\alpha=4, \quad \gamma=4,5,\ldots,0\le\alpha_j\le1, \quad j=2,3,\ldots,\gamma-3.$$

Пространство $\mathcal{L}_2(Q_p)$ разлагается в ортогональную прямую сумму собственных подпространств H_α:

$$\mathcal{L}_2(Q_p) = \sum_\alpha \oplus H_\alpha. \tag{9.2}$$

Даны некоторые интегральные представления для собственных функций. В частности, получены явные выражения для основных состояний $\psi_0 \in H_0$ („вакуумов") - собственных функций, соответствующих собственному значению $\lambda_0(t)=1$ (при $\alpha=0$),

$$U(t)\psi_0(t) = \psi_0(t). \tag{9.3}$$

При $p\equiv 1 \pmod 4$

$$\psi_0(t) = \Omega(|x|_p),\ \chi_p(\tau x^2)\delta(|x|_p - p^\gamma),\ \gamma = 1,2,\dots,(\tau^2 = -1); \tag{9.4}$$

при $p\equiv 3 \pmod 4$

$$\psi_0(t) = \Omega(|x|_p); \tag{9.5}$$

при $p=2$

$$\psi_0(t) = \Omega(|x|_p),\ \Omega(2|x|_p). \tag{9.6}$$

§ 10. Оператор эволюции свободной квантовой p-адической частицы

Оператор эволюции $U(t)$ (см. (1.7)) имеет вид

$$U(t)\psi = K_t * \psi,\quad \psi\in\mathcal{L}_2(Q_p),\quad t\in Q_p, \tag{10.1}$$

где в силу (1.8)

$$K_t(x) = \lambda_p(t)\left|\frac{2}{t}\right|_p^{1/2} \chi_p - \left(-\frac{x^2}{t}\right),\quad \tilde{K}_t(\xi) = \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4}t\right). \tag{10.2}$$

Задача на собственные значения для оператора $U(t)$ принимает вид

$$K_t * \psi = \lambda(t)\psi,\quad \psi\in\mathcal{L}_2(Q_p),\quad \psi \not\equiv 0. \tag{10.3}$$

Применяя к уравнению (10.3) преобразование Фурье [8] и пользуясь (10.2), получим эквивалентное (10.3) уравнение

$$\chi_p\left(\frac{\xi^2}{4}t\right)\tilde{\psi}(\xi) = \lambda(t)\tilde{\psi}(\xi),\quad \tilde{\psi}\in\mathcal{L}_2(Q_p),\quad \tilde{\psi}\not\equiv 0. \tag{10.4}$$

Из уравнения (10.4) следует, что возможными собственными значениями $\lambda_\alpha(t)$ являются числа вида

$$\lambda_\alpha(t) = \chi_p\left(\frac{\alpha^2}{4}t\right),\quad \alpha\in Q_p. \tag{10.5}$$

Но тогда уравнение (10.4)

$$\left[\chi_p\left(\frac{\xi^2}{4}t\right) - \chi_p\left(\frac{\alpha^2}{4}t\right)\right]\tilde{\psi}(\xi)=0,\quad t\in Q_p,$$

не имеет ненулевых решений в $\mathcal{L}_2(Q_p)$ и имеет единственное ненулевое решение в $\mathcal{D}'(Q\ )$ [8]:

$$\tilde{\psi}_\alpha(\xi) = C_\alpha\delta(\xi-\alpha), \tag{10.6}$$

где C_α - произвольные постоянные, $C_\alpha\neq 0$. Поэтому уравнение (10.3) при $\lambda(t)=\lambda_\alpha(t)$

имеет единственное ненулевое решение из $\mathcal{D}'(Q_p)$ вида

$$\psi_\alpha(x) = C_\alpha \chi_p(\alpha x), \quad \alpha \in Q_p. \tag{10.7}$$

Итак, *оператор эволюции* $U(t)$ *не имеет собственных значений; точкам* (10.5) *его спектра соответствуют обобщенные собственные функции* (10.7).

§ 11. Обращение основной теоремы

Укажем некоторое обращение основной теоремы § 4.

Если псевдодифференциальный оператор A *с символом вида*

$$\mathcal{P}(|\xi_1|_p,\ldots,|\xi_n|_p) + V(|x_1|_p,\ldots,|x_n|_p), \tag{11.1}$$

где $\mathcal{P}$ *и* V *– непрерывные ограниченные снизу функции и* $\mathcal{P} \longrightarrow +\infty$ *при* $|\xi|_p \longrightarrow \infty$ *таков, что числа* $\lambda_k(A)$, $k=1,2,\ldots$, *определяемые принципом минимакса* (2.3), *стремятся к* $+\infty$ *при* $k \longrightarrow \infty$, *то* $V \longrightarrow +\infty$ *при* $|x|_p \longrightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n=1$. Предположим, что $V(|x|_p)$ не стремится к $+\infty$ при $|x|_p \longrightarrow \infty$. Тогда найдутся такое число $K>0$ и последовательность целых чисел $\{\rho_k>0,\ k=1,2,\ldots,\}$, $\rho_k \longrightarrow +\infty$, $k \longrightarrow \infty$, что

$$V(p^{\rho_k}) \le K, \quad k=1,2,\ldots \tag{11.2}$$

Рассмотрим функции I рода (5.1′) при $\ell=2$ и $N=2-\rho_k$

$$\psi^2_{2-\rho_k,j,\varepsilon_0}(x) = p^{-\rho_k/2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}\,\delta(|x_p|-p^{\rho_k})\chi_p(\varepsilon_0 p^{2\rho_k-2}x^2 + jp^{\rho_k-1}x) \tag{11.3}$$

и их преобразование Фурье (5.4′)

$$\tilde{\psi}^2_{2-\rho_k,j,\varepsilon_0}(\xi) = p^{\frac{\rho_k-2}{2}}\sqrt{\frac{p}{p-1}}\,\delta(|\xi|_p-p^{2-\rho_k})\chi_p\Big(-p^{2-\rho_k}\frac{\xi^2}{4\varepsilon_0} - p^{1-\rho_k}\frac{j\xi}{2\varepsilon_0}\Big), \tag{11.3′}$$

$$k = 1,2,\ldots,\ j,\varepsilon_0 = 1,2,\ldots,p-1.$$

Квадратичная форма (4.2) (при $a(\xi)=\mathcal{P}(|\xi|_p)$ и $V(x)=V(|x|_p)$ на функциях (11.3) принимает в силу (11.2) и (11.3′) следующий вид:

$$A(\psi^2_{2-\rho_k,j,\varepsilon_0},\ \psi^2_{2-\rho_k,j,\varepsilon_0}) = \int_{Q_p} \mathcal{P}(|\xi|_p)|\tilde{\psi}^2_{2-\rho_k,j,\varepsilon_0}(\xi)|^2 d\xi\ +$$

$$+\int_{Q_p} V(|x|_p)|\psi^2_{2-\rho_k,j,\varepsilon_0}(x)|^2 dx = \mathcal{P}(p^{2-\rho_k}) + V(p^{\rho_k}),\quad k=1,2,\ldots,$$

и, следовательно, в силу (11.1) ограничена по k числом

$$\max_k \mathcal{P}(p^{2-\rho_k}) + K.$$

По теореме § 2 множество функций (11.3) должно быть компактным в $\mathcal{L}_2(Q_p)$, что несовместимо с ортонормальностью этой системы функций.

В случае $n>1$ доказательство проводится аналогично. В качестве ортонормальной системы функций нужно взять произведение функций (11.3) с различными аргументами.

Список литературы

[1] Vladimirov V.S., Volovich I.V. P-adic Quantum Mechanics // Comm.Math.Phys. 1989. Vol.123. P.659-676.

[2] Зеленов Е.И. p-адическая квантовая механика при p=2 // Теорет. и мат.физика. 1989. Т.80. С.253-264.

[3] Vladimirov V.S., Volovich I.V. p-adic Schrödinger Type Equation // Lett.Math.Phys. 1989. Vol.18. P.43-53.

[4] Vladimirov V.S. p-adic Analysis and p-adic Quantum Mechanics // Ann. of the New York Ac. of Sc.: Symposium in Frontiers of Math. 1988. New York.

[5] Владимиров В.С., Волович И.В. Применение p-адических чисел в математической физике // Тр.МИАН. Т.200. 1990.

[6] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1990. Т.54. С.275-302.

[7] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений //ДАН СССР. 1990. Т.310, N 2. С.272-276.

[8] Владимиров В.С. Обобщенные функции над полем p-адических чисел // Успехи мат.наук. 1989. Т.43, вып.5. С.17-53.

[9] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1 // Функциональный анализ. М.: Мир, 1977; Т.4. Анализ операторов. 1982.

Математический институт им.В.А.Стеклова АН СССР
117966, Москва, ул.Вавилова, д.42

Поступило 15 апреля 1990 г.