V. I. Mironenko, Reflection Function and the Small Parameter Method, *Differ. Uravn.*, 2004, Volume 40, Number 3, 334–337

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 334–337

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

© 2004 г. В. И. Мироненко

Объединяя свойства симметрий, выражаемые понятием отражающей функции [1, 2], с методом малого параметра [3, с. 130–149], формулируются достаточные условия наличия периодических решений у многомерных дифференциальных систем. Основным результатом работы является метод доказательства сформулированных утверждений, опирающийся на две леммы.

Напомним, что для вектор-столбца x и вектор-функции $V(t,x)$ размерностей n и m соответственно, $\partial V/\partial x$ есть матрица $\partial V/\partial x = (\partial V_i/\partial x_j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, i,j – номер строки и столбца соответственно.

Все рассматриваемые ниже дифференциальные системы считаются удовлетворяющими теореме существования и единственности решения задачи Коши [3, с. 56].

Лемма 1. *Пусть для дифференцируемой функции $F(t,x)$, $t\in I\subset\mathbb{R}$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ выполнено соотношение*

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0, \tag{1}$$

где $X(t,x)$ – правая часть дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x),\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in D\subset\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

удовлетворяющей теореме существования и единственности решения задачи Коши. Тогда если $F(0,x_0)=x_0$, то решение $x(t)$, $x(0)=x_0$, этой системы, существующее при всех $t\in[0;\alpha)\subset I$, может быть продолжено и на $(-\alpha;0]\cap I$ и для этого решения выполнено тождество $x(-t)\equiv F(t,x(t))$, $t\in(-\alpha;\alpha)\cap I$.

Доказательство. Пусть решение $x(t)$ существует на $[0;\alpha)\subset I$. Определим функцию $y(t):=F(-t,x(-t))$, $t\in(-\alpha;0]$. Для нее, согласно (1), выполнены тождества

$$\frac{dy}{dt}(t)\equiv-\frac{\partial F}{\partial t}(-t,x(-t))-\frac{\partial F}{\partial x}(-t,x(-t))X(-t,x(-t))\equiv X(t,F(-t,x(-t)))\equiv X(t,y(t)),$$

доказывающие, что $y(t)$ – решение системы (2).

Так как, кроме того, $y(0)=F(0,x(0))=x(0)$, то $y(t)$ является единственным продолжением $x(t)$ на $(-\alpha;0]$ и, значит, $y(t)\equiv x(-t)$, $t\in(-\alpha;0]$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. В том случае, когда для функции F, удовлетворяющей соотношению (1), справедливо тождество $F(0,x)\equiv x$, $x\in D$, эта функция названа отражающей [1, с. 11], а соотношение (1) – основным соотношением для отражающей функции. Геометрически уравнение $\bar{x}=F(t,x)$ задает интегральное многообразие [4, с. 12] расширенной системы $dx/dt=X(t,x)$, $d\bar{x}/dt=-X(-t,\bar{x})$, содержащее область D гиперплоскости $t=0$. (Уравнение инвариантности гладкого многообразия см. в [5, с. 92].) Если же $F(0,x)=x$ лишь для x из некоторого собственного подмножества в D, функция F названа отражающей функцией соответствующего семейства решений системы (2) (см. [2]).

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия леммы 1, а система (2) 2ω-периодична по t. Тогда если $F(0,x_0)=x_0$, то продолжимое на $[-\omega;\omega]$ решение $x(t)$, $x(0)=x_0$, будет 2ω-периодичным тогда и только тогда, когда $F(\omega,x(\omega))=x(\omega)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x(t)$ – 2ω-периодическое решение. Тогда $x(\omega)=x(-\omega)=F(\omega,x(\omega))$ и необходимость доказана.

Достаточность. Из утверждения леммы 1 вытекают равенства $x(-\omega) = F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$, из которых следует, что точка $x(\omega)$ является неподвижной точкой отображения за период $[-\omega;\omega]$ для системы (2). Поэтому в силу основного принципа в теории периодических решений [6, с. 12] решение $x(t)$ периодично, и лемма 2 доказана.

Замечание 2. Здесь, как и всюду в [1, 2] и других работах, связанных с отражающей функцией, под отображением за период понимается оператор сдвига [6, с. 11] вдоль решений системы (2) на симметричном промежутке $[-\omega;\omega]$, а не, как обычно, на промежутке $[0;2\omega]$.

Теорема 1. *Пусть для системы*

$$\frac{dx}{dt} = P(t,x,y,\varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = Q(t,x,y,\varepsilon), \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in D\subset\mathbb{R}^n, \quad y\in G\subset\mathbb{R}, \quad \varepsilon\in[-\varepsilon_0;\varepsilon_0], \tag{3}$$

с непрерывными по всем своим аргументам функциями P, Q, $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ *и решениями* $x = \varphi(t;t_0;x_0;y_0;\varepsilon)$, $y = \psi(t;t_0;x_0;y_0;\varepsilon)$ *выполнены условия:*

1) функции P *и* Q 2ω*-периодические по* t;

2) переопределенная относительно Φ *система*

$$Q(-t,\Phi,-y,\varepsilon) = Q(t,x,y,\varepsilon), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}P(t,x,y,\varepsilon) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}Q(t,x,y,\varepsilon) + P(-t,\Phi,-y,\varepsilon) = 0$$

имеет решение $\Phi = \Phi(t,x,y,\varepsilon)$, $t\in[-\omega;\omega]$, $x\in D$, $y\in G$, *для которого* $\Phi(0,x,0,\varepsilon) \equiv \Phi(\omega;x,0,\varepsilon) \equiv x$, $x\in D$;

3) при значении параметра $\varepsilon = 0$ *система (3) имеет семейство продолжимых на* $[0;\omega]$ *решений* $x = \varphi(t;0,x_0(s),0,0)$, $y = \psi(t;0,x_0(s),0,0)$, $s\in[s_1,s_2]$, *начинающихся при* $t = 0$ *на непрерывной кривой* $\mathrm{K} : x_0 = x_0(s)$, $y_0 = 0$, *для которых функция* $\psi(\omega;0,x_0(s),0,0)$ *на концах отрезка* $[s_1;s_2]$ *принимает значения разных знаков.*

Тогда система (3) при достаточно малых $|\varepsilon|$ *имеет хотя бы одно* 2ω*-периодическое решение вида*

$$x = \varphi(t;0,x_0(s),0,\varepsilon), \quad y = \psi(t;0,x_0(s),0,\varepsilon), \quad s\in[s_1,s_2]. \tag{4}$$

Если к тому же $\dfrac{\partial}{\partial s}\psi(\omega;0,x_0(s),0,0)$ *не меняет знака на* $[s_1;s_2]$, *то такое* 2ω*-периодическое решение единственно.*

Доказательство. 1. Из лемм 1 и 2 следует, что решение вида (4) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда имеет место равенство $y(x_0(s),\varepsilon) := \psi(\omega;0,x_0(s),0,\varepsilon) = 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в силу условий теоремы основное соотношение (1) для системы (3) выполнено при $F = (\Phi,-y)^{\mathrm{T}}$. Поэтому равенство $F(\omega,x(\omega)) = x(\omega)$ из леммы 2 выполнено тогда и только тогда, когда $y(x_0(s),\varepsilon) = 0$.

2. По теореме о непрерывной зависимости решений от параметра [3, с. 130] функция $y(x_0(s),\varepsilon)$ непрерывна по ε. При $\varepsilon = 0$ функция $y(x_0(s),\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = y(x_0(s),0)$ по условию теоремы на концах отрезка $[s_1;s_2]$ принимает значения разных знаков. Поэтому существует $\varepsilon_1 > 0$, для которого при всех $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ выполнено неравенство $y(x_0(s_1),\varepsilon)y(x_0(s_2),\varepsilon) < 0$, т.е. $y(x_0(s),\varepsilon)$ принимает на $[s_1;s_2]$ значения разных знаков. Тогда по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции на $[s_1;s_2]$ существует s, для которого $y(x(s),\varepsilon) = 0$. Отсюда, согласно первому пункту доказательства, следует периодичность решения (4) при указанном s и первая часть утверждения теоремы.

3. В том случае, когда производная $\dfrac{\partial\psi}{\partial s}(\omega,0,x_0(s),0,0) \equiv \dfrac{\partial y}{\partial s}(x_0(s),\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ не меняет знака на $[s_1;s_2]$, производная $\dfrac{\partial y}{\partial s}(x_0(s),\varepsilon)$ при достаточно малых ε также не меняет знака на $[s_1;s_2]$, а функция $y(x_0(s),\varepsilon)$ строго монотонна по s. Поэтому она не может принимать нулевое значение при разных значениях s, откуда в силу первого пункта доказательства следует единственность периодического решения вида (4). Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x,\dot{x},t,\varepsilon), \quad a \neq \pi^2k^2/\omega^2, \quad k\in\mathbb{N},$$

эквивалентное системе $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -ax + e(t) + f(x,y,t,\varepsilon)$.

Будем считать, что непрерывно дифференцируемая 2ω-периодическая по t функция f удовлетворяет условиям $f(x,-y,-t,\varepsilon) \equiv f(x,y,t,\varepsilon)$, $f(t,x,y,0) \equiv 0$, а $e(t)$ – четная непрерывная 2ω-периодическая функция. Тогда условия теоремы выполняются при $\Phi \equiv x$. При $\varepsilon = 0$ система вырождается в линейную систему, для которой при $a > 0$ указанное в теореме семейство решений имеет вид

$$x = s\cos\sqrt{a}\,t - (\dot\varphi(0)/\sqrt{a})\sin\sqrt{a}\,t + \varphi(t), \quad y = -s\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\,t - \dot\varphi(0)\cos\sqrt{a}\,t + \dot\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – единственное 2ω-периодическое решение уравнения $\ddot x + ax = e(t)$, $x_0(s) = s + \varphi(0)$. Функция

$$\psi(\omega; 0, x_0(s), 0, 0) \equiv -s\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\omega - \dot\varphi(0)\cos\sqrt{a}\omega + \dot\varphi(\omega) \equiv -s\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\omega - \dot\varphi(0)\cos\sqrt{a}\omega + \dot\varphi(\omega)$$

принимает значения разных знаков на концах любого отрезка, содержащего точку

$$s = [-\dot\varphi(0)\cos\sqrt{a}\omega + \dot\varphi(\omega)]/(\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\omega).$$

Поэтому при $a > 0$ выполнены все условия теоремы 1, а рассматриваемое уравнение второго порядка имеет при достаточно малых ε единственное 2ω-периодическое решение указанного в теореме вида. При $a < 0$ условия теоремы также выполнены. Этот результат впервые доказан в [7]. Там же приведен пример использования его в механике.

Пример 2. Рассматриваем 2ω-периодическую по t систему

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1 + f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon), \quad \frac{dy_1}{dt} = -b^2x_1 + f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = y_2 + f_3(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon), \quad \frac{dy_2}{dt} = ax_2 + e(t) + f_3(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon).$$

Будем считать, что для нее выполнены следующие условия:

1) число a и функция $e(t)$ такие же, как и в примере 1;

2) для функций f_1, f_2, f_3, f_4 справедливы тождества

$$bf_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon)\cos 2bt - f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon)\sin 2bt +$$

$$+ bf_1(-t, x_1\cos 2bt - (y_1/b)\sin 2bt, x_1 b\sin 2t + y_1\cos 2bt, x_2 - y_2, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$f_3(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) + f_3(-t, x_1\cos 2bt - (y_1/b)\sin 2bt, x_1 b\sin 2t + y_1\cos 2bt, x_2 - y_2, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$f_4(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \equiv f_4(-t, x_1\cos 2bt - (y_1/b)\sin 2bt, x_1 b\sin 2t + y_1\cos 2bt, x_2 - y_2, \varepsilon),$$

$$f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon)\sin 2bt + f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon)\cos 2bt + f_2(-t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$f_i(t, x_1, y_1, x_2, y_2, 0) \equiv 0, \quad i = \overline{1,4};$$

3) для некоторых постоянных A_k, $k = \overline{0,4}$, выполнено неравенство $|f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, 0)| \le \le A_0 + A_1|x_1| + A_2|y_1| + A_3|x_2| + A_4|y_2|$.

Тогда у этой системы имеется хотя бы одно 2ω-периодическое решение. Для доказательства достаточно заметить, что в данном случае

$$\Phi = (x_1\cos 2bt - (y_1/b)\sin 2bt,\ x_1 b\sin 2bt + y\cos 2bt,\ x_1)^{\mathrm{T}},$$

а $\psi(\omega; 0, x_{10}(s), y_{10}(s), x_{20}(s), 0, 0)$ такое же, как и в примере 1.

Рассмотрим теперь систему вида (3), считая y вектор-столбцом, $y \in G \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 2. *Пусть для системы (3) с $y \in G \subset \mathbb{R}^m$ выполнены условия 1) и 2) теоремы 1 и условие*

3^0) *при $\varepsilon = 0$ система (3) имеет семейство продолжимых на $[0;\omega]$ решений $x = = \varphi(t; 0, x_0, 0, 0)$, $y = \psi(t; 0, x_0, 0, 0)$, $x_0 \in G_0$, начинающихся при $t = 0$ в ограниченной области $G_0 \subset \mathbb{R}^m$, для которого вращение векторного поля $\psi(\omega; 0, x_0, 0, 0)$ на границе G_0 не равно нулю.*

Тогда система (3) при достаточно малых $|\varepsilon|$ *имеет хотя бы одно* 2ω*-периодическое решение вида*

$$x = \varphi(t; 0, x_0, 0, \varepsilon), \quad y = \psi(t; 0, x_0, 0, \varepsilon). \tag{5}$$

Доказательство. 1. Точно так, как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в том, что решение вида (5) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $\psi(\omega; 0, x_0, 0, \varepsilon) \equiv 0$.

2. Пусть Γ – граница G_0, а $\gamma(\varepsilon)$ – вращение векторного поля $\psi(\omega; 0, x_0, 0, \varepsilon)$ на Γ. Из условий теоремы следует, что $\gamma(\varepsilon)$ – непрерывная и целочисленная функция ε. Так как, кроме того, по условию теоремы $\gamma(0) \neq 0$, то при достаточно малых ε будет также выполняться неравенство $\gamma(\varepsilon) \neq 0$. Тогда, согласно теореме 4.2 из [8, с. 20], рассматриваемое векторное поле будет равняться нулю хотя бы в одной точке G_0. Поэтому, согласно первому пункту, теорема доказана.

Примером к данной теореме может служить система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + f(t, x, y, \varepsilon)$, где $x \in \mathbb{R}^2$ и $y \in \mathbb{R}^2$, а f – 2ω-периодическая, $\omega \notin \mathbb{N}$, непрерывно дифференцируемая функция, для которой выполнены условия $f(t, x, y, 0) \equiv 0$ и $f(-t, x, -y, \varepsilon) \equiv f(t, x, y, \varepsilon)$. Здесь в качестве соответствующего семейства решений можно взять семейство, для которого $y_1 = x_0 \sin t$, $y_2 = x_0 \sin t$, $x_0^{\mathrm{T}} = (x_{10}, x_{20})$, $x_{10}^2 + x_{20}^2 \leq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
2. *Мироненко В.И.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1636–1641.
3. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.
4. *Митропольский Ю.В., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., 1973.
5. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М., 1987.
6. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1960.
7. *Muracchini A., Colafranceschi.* // Riv. Mat. Univ. Parma. 1983. V. 4. № 9. P. 339–349.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию
31.08.2002 г.