УДК 517.544

Р. Б. Салимов, М. Л. Славутин

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РЕШЕТКИ БЕСКОНЕЧНЫХ КОНТУРОВ В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРА x

1. Пусть D_z—бесконечная область в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, границей которой служит семейство конгруэнтных контуров Z_z^n $(n=0, \pm 1, \ldots)$, составляющих прямую решетку постоянного шага $\alpha+i\beta$. Требуется определить форму контуров Z_z^n $(n=0, \pm 1, \ldots)$, если на них заданы граничные значения функции $w(z)$, аналитической в области D_z, в виде

$$\begin{gathered}\varphi_{nj}(\xi)+i\psi_{nj}(\xi)=w_n(\xi)=\varphi_{0j}(x)+i\psi_{0j}(x)+iTn,\\ T>0,\ \xi=x+\alpha n,\ 0\leqslant x<+\infty,\ j=1,\ 2,\end{gathered}\tag{1}$$

где ξ и x — абсциссы точек контуров Z_z^n и Z_z^0 соответственно, причем $\varphi_{02}(x)$, $\psi_{02}(x)$ относится к верхней ветви Z_{2z}^0, $\varphi_{01}(x)$, $\psi_{01}(x)$ — к нижней ветви Z_{1z}^0 контура Z_z^0; $\varphi_{01}(0)=\varphi_{02}(0)$, $\psi_{01}(0)=$ $=\psi_{02}(0)$.

Будем считать, что область D_z остается слева при движении по Z_{1z}^0, когда x убывает, и при движении по Z_{2z}^0, при котором x возрастает.

Положим, что в интервале $[K, +\infty)$ (K — достаточно большое положительное число) справедливы следующие представления:

$$\varphi_{0j}(x)=x+a_{0j}+\Phi_{0j}(x),\ \psi_{0j}(x)=\psi_{0j}(\infty)+\Psi_{0j}(x),\ j=1,\ 2,\tag{2}$$

где функции $\Phi_{0j}(x)$ и $\Psi_{0j}(x)$ исчезают на бесконечности вместе со своими производными, $a_{0j}=\text{const}$, $\psi_{02}(\infty)>\psi_{01}(\infty)$, причем производные удовлетворяют условию Гёльдера (условию H); для функции $r(x)$ это условие в интервале $[K, +\infty)$ записывается в виде

$$\begin{gathered}|r(x_1)-r(x_2)|<A\,|1/x_1-1/x_2|^{\mu},\ 0<\mu<1,\\ A=\text{const},\ \mu=\text{const}.\end{gathered}\tag{3}$$

Граничные значения (1) определяют в плоскости комплексного переменного $w=\varphi+i\psi$ конгруэнтные контуры Z_w^n $(n=0,$ $\pm 1, \ldots)$. Пусть эти контуры не имеют точек самопересечения и не пересекают друг друга, любая конечная дуга кривой Z_w^n — кривая Ляпунова. Бесконечную область, ограниченную контурами Z_w^n $(n=0, \pm 1, \ldots)$, обозначим через D_w.

Пусть производная функции $z = F(w)$, обратная к $w(z)$, при $\varphi \to \pm\infty$ стремится к конечным и отличным от нуля пределам.

2. Введем обозначения $\Phi_{0j}(x) + i\Psi_{0j}(x) = F_{0j}(x)$, $a_{0j} + i\psi_{0j}(\infty) = c_j$. Не умаляя общности задачи, будем считать, что $\psi_{02}(\infty) = -\psi_{01}(\infty)$. В плоскости w проведем семейство конгруэнтных кривых λ_n ($n = 0, \pm 1, \ldots$), отстоящих друг от друга на величину T по мнимой оси и не имеющих общих точек с контурами Z_w^n ($n = 0, \pm 1, \ldots$). Пусть кривая λ_0 имеет своей асимптотой при $\varphi \to \pm\infty$ прямую, определяемую уравнением $\psi = -T/2$, и разделяет контуры Z_w^{-1} и Z_w^0. Обозначим через D_w^0 область, ограниченную кривыми Z_w^0 и λ_0, λ_1. Функцией

$$
\begin{gathered}
w_2 = 1/(a - w_1), \quad w_1 = \exp\{2\pi w/T\}, \\
a \neq \exp\{2\pi w/T\} \quad \forall\, w \in \overline{D}_w^0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

отобразим область D_w^0 на область $D_{w_2}^0$ в плоскости переменного w_2, кривым λ_0 и λ_1 будут соответствовать берега разреза по линии Γ_{w_2}, а кривой Z_w^0 — кривая $Z_{w_2}^0$. В плоскости w_2 проведем разрез L вдоль интервала $(-\infty, -K_1)$ (K_1 — достаточно большое положительное число) на оси φ_2. Теперь функцией

$$
w_3 = w_2^{1/2\delta}, \quad \pi\delta = \pi - 2\pi\psi_{02}(\infty)/T,
\tag{5}
$$

отобразим область $D_{w_2}^0$ на область $D_{w_3}^0$ в плоскости w_3, разрезу по линии Γ_{w_2} соответствует разрез по линии Γ_{w_3}, кривой $Z_{w_2}^0$ — кривая $Z_{w_3}^0$, под $w_2^{1/2\delta}$ понимается ветвь, непрерывная в области $D_{w_2}^0$, причем

$$
\arg w_2^{1/2\delta} = \pi/2\delta
\tag{6}
$$

на верхнем берегу разреза L.

Пусть функция $w_3 = f(\zeta)$ ($f(1) = 0$, $f(0) = a^{-1/2\delta}$) осуществляет конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ в плоскости $\zeta = re^{i\gamma}$ на область, ограниченную кривой $Z_{w_3}^0$ и остающуюся слева при обходе по $Z_{w_2}^0$ в положительном направлении, при этом отображении разрезу по линии Γ_{w_3} соответствует разрез по линии Γ_ζ, соединяющей точки $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$.

Обозначим через t_2 и t_3 точки кривых $Z_{w_2}^0$ и $Z_{w_3}^0$, отвечающие точке

$$
t = \varphi_{0j}(x) + i\psi_{0j}(x) \quad (j = 1, 2)
\tag{7}
$$

кривой Z_w^0. Тогда

$$
t_2 = w_2(t) \equiv 1/(a - \exp(2\pi t/T)),
\tag{8}
$$

$$t_3 = w_3(t_2) \equiv t_2^{1/2\delta}. \qquad (9)$$

В силу (6)

$$t_2^{1/2\delta} = |t_2|^{1/2\delta} \exp\{(i \arg t_2)/2\delta\} \underset{\varphi_j \to +\infty}{\longrightarrow} \pm |t_2|^{1/2\delta} \cdot e^{i\pi/2\delta} \; (t_2 = w_2(t)), \qquad (10)$$

здесь и в дальнейшем верхний (нижний) знак берется при $j=2$ $(j=1)$. Пусть

$$t_3 = \widetilde{t}_{3j}(x) \equiv w_3[w_2(\varphi_{0j}(x) + i\psi_{0j}(x))]. \qquad (11)$$

Уравнение кривой $Z^0_{w_3}$ запишем в виде

$$t_3 = t_3^*(\sigma), \qquad (12)$$

где σ — дуговая абсцисса точки t_3, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки кривой $Z^0_{w_3}$ в положительном направлении, при котором область $D^0_{w_3}$ остается слева, $t_3^*(\sigma_0) = 0$.

Докажем, что $Z^0_{w_3}$ — кривая Ляпунова. Из (2) и (9) в интервале $[K, +\infty)$ будем иметь

$$w_3(t) = (a - \exp(2\pi(x + c_j + F_j(x))/T))^{-1/2\delta} = (-1)^{1/2\delta} \exp(-\tau(x + c_j + F_j(x)))(1 + R_j(x)), \quad \tau = \pi/T\delta,$$

где функции $R_j(x) = 0(\exp(-\tau x))$ и производные $R'_j(x)$ удовлетворяют условию Н. Принимая во внимание (10), получим

$$w'_3(t) = (-1)^{-1/2\delta}(\mp\tau)\exp(-\tau(x + c_j + F_j(x)))(1 + R_{1j}(x)),$$

где функции $R_{1j}(x)$ удовлетворяют условию Н. Отсюда в силу (2) и (11) следует

$$\widetilde{t}'_{3j}(x) = (-1)^{-1/2\delta}(\mp\tau)\exp(-\tau(x + c_j + F_j(x)))(1 + R_{2j}(x)), \qquad (13)$$

где функции $R_{2j}(x)$ имеют те же свойства, что и функции $R_{1j}(x)$. Соотношения (11) и (12) определяют функцию $\sigma = \sigma(x)$. Для ее производной согласно (13) в интервале $[K, +\infty)$ справедливо представление

$$\sigma'(x) = \pm|\widetilde{t}'_{3j}(x)| = (\mp\tau)\exp(-\tau(x + a_{0j} + \Phi_{0j}(x)))(1 + R_{3j}(x)), \qquad (14)$$

где функции $R_{3j}(x)$ удовлетворяют условию Н. Следовательно, производная $t_3^{*\prime}(\sigma) = \widetilde{t}'_{3j}(x)/\sigma'(x)$ $(\sigma = \sigma(x))$ в интервале $[K, +\infty)$ удовлетворяет условию Н (см. (3)). Пусть функция $x^*(\sigma)$, обратная к функции $\sigma(x)$. В силу (14) функция $1/x^*(\sigma)$ удовлетворяет условию Н в окрестности точки $\sigma = \sigma_0$. Таким образом, производная $t_3^{*\prime}(\sigma)$ удовлетворяет условию Н. Теперь нетрудно видеть, что $Z^0_{w_3}$ — кривая Ляпунова. Согласно теореме Келлога [1] функцию $f(\zeta)$ на окружности $|\zeta|=1$ можно представить в виде

$$f(\zeta)=(\zeta-1)\Phi(\zeta), \tag{15}$$

где функция $\Phi(\zeta)$ удовлетворяет условию Н, причем $\Phi(\zeta)\neq 0$.

Введем в рассмотрение функцию $w=\omega(\zeta)$, осуществляющую конформное отображение области D^0_ζ — круга $|\zeta|<1$, разрезанного по линии Γ_ζ, на область D^0_w. Обозначим через ν_0 и ν_1 образы кривых λ_0 и λ_1 при отображении функцией $z=F(w)$. Из соотношения

$$w_0(x)=\omega(e^{i\gamma}) \tag{16}$$

найдем зависимость $x=\gamma(\gamma)$. Пусть $z=z(\zeta)$ — функция, конформно отображающая область D^0_ζ на область D^0_z, ограниченную кривыми Z^0_z и ν_0, ν_1, причем $x(\gamma_0)=0$. Для удобства будем использовать различные обозначения зависимости $x=x(\gamma)$: $x=x_1(\gamma)$, $0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_0$, для ветви Z^0_{1z} и $x=x_2(\gamma)$, $\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant 2\pi$, для ветви Z^0_{2z} контура Z^0_z. Так как

$$w(\zeta)=\frac{T}{2\pi}\ln\left(\frac{af^{2\delta}(\zeta)-1}{f^{2\delta}(\zeta)}\right), \tag{17}$$

следовательно, в силу (15) вблизи $\gamma=0$ $(\gamma>0)$ справедливо представление

$$\omega(e^{i\gamma})=(-\tau)^{-1}\ln\gamma+M(\gamma), \tag{18}$$

где функция $M(\gamma)$ удовлетворяет условию Н. Из соотношения (16) с учетом (18) вблизи $\gamma=0$ $(\gamma>0)$ получим $\varphi_{01}=\tilde{\varphi}_{01}(\gamma)\equiv\equiv(-\tau)^{-1}\ln\gamma+M_1(\gamma)$, где функция $M_1(\gamma)$ удовлетворяет условию Н. В силу (2), (14), (17) вблизи $\gamma=0$ $(\gamma>0)$ будем иметь

$$x_1(\gamma)=(-\tau)^{-1}\ln\gamma+T_1(\gamma), \tag{19}$$

где функция $T_1(\gamma)$ удовлетворяет условию Н. Аналогично вблизи $\gamma=2\pi$ $(\gamma<2\pi)$ получим

$$x_2(\gamma)=(-\tau)^{-1}\ln(2\pi-\gamma)+T_2(\gamma), \tag{20}$$

где функция $T_2(\gamma)$ удовлетворяет условию Н.

Функцию $z(\zeta)$ будем искать в виде

$$z(\zeta)=\frac{\alpha+i\beta}{2\pi i}\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}+z_0(\zeta), \tag{21}$$

где $\ln(\zeta/(\zeta-1))=\ln|\zeta/(\zeta-1)|+i(\arg\zeta-\arg(\zeta-1))$, под $\arg\zeta$ понимается ветвь, непрерывная в плоскости ζ с разрезом по линии Γ_0, совпадающей в круге $|\zeta|<1$ с линией Γ_ζ и уходящей в бесконечность, под $\arg(\zeta - 1)$ — непрерывная в плоскости ζ с разрезом от 1 до бесконечности по линии, совпадающей с линией Γ_0. Найдем теперь представление функции $z(\zeta)$. Из (21) видно, что

$$x_0(\gamma) = \operatorname{Re} z_0(e^{i\gamma}) \equiv x(\gamma) + \frac{\beta}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right| - \frac{\alpha}{2\pi} \arg (e^{i\gamma}/(e^{i\gamma} - 1)).$$

Следовательно, принимая во внимание, что $\gamma - 2 \arg(e^{i\gamma} - 1) = 3\pi/2$, получим

$$z_0(\zeta) = -\frac{1}{\tau} \ln(\zeta - 1) + \frac{\alpha + i\beta}{2\pi i} \ln(\zeta - 1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{x}_0(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + iC, \tag{22}$$

где $\tilde{x}_0(\gamma) = x(\gamma) + (-\tau)^{-1} \ln |2 \sin \gamma/2|$, C — произвольная действительная постоянная. Нетрудно видеть, что в силу (19), (20) функция $\tilde{x}_0(\gamma)$ удовлетворяет условию Н, причем $\tilde{x}_0(0) = \tilde{x}_0(2\pi)$. С учетом (21) получим

$$z(\zeta) = \frac{\alpha + i\beta}{2\pi i} \ln \zeta - \frac{1}{\tau} \ln(\zeta - 1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{x}_0(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + iC. \tag{23}$$

3. Найдем значения α и β, при которых $z(\zeta)$ из (23) есть однолистная функция. Отметим, что для однолистности функции $z(\zeta)$ необходимо и достаточно отсутствия точек самопересечения у контура Z_z^0. Это следует из того факта, что однолистность функции $z(\zeta)$ равносильна однолистности функции $g(\zeta) = \exp\{2\pi i z(\zeta)/(\alpha + i\beta)\}$.

Пусть $y(\gamma) = \operatorname{Re} z(e^{i\gamma})$, тогда в силу (23) будем иметь

$$y(\zeta) = (\beta/2\pi)\gamma - \tau^{-1} \arg(e^{i\gamma} - 1) + F(\gamma) + C, \tag{24}$$

где

$$F(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{x}_0(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \gamma}{2} d\theta.$$

Введем в рассмотрение функцию $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$, определяемую из соотношения $x_2(\tilde{\gamma}) = x_1(\gamma)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$. Ясно, что контур Z_z^0 будет простым, если для всех $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$ выполняется неравенство

$$y(\tilde{\gamma}) - y(\gamma) \geqslant 0. \tag{25}$$

Учитывая (24), условие (25) перепишем в виде

$$\beta N(\gamma) + G(\gamma) \geqslant 0,$$

где $N(\gamma) = \tilde{\gamma} - \gamma$, $G(\gamma) = -2T\delta(\arg(e^{i\tilde{\gamma}} - 1) - \arg(e^{i\gamma} - 1)) + 2\pi(F(\tilde{\gamma}) - F(\gamma))$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$. Функция $G_1(\gamma) = G(\gamma)/N(\gamma)$ будет ограничена, если существует конечный предел

$$G_1(\gamma_0) = \lim_{\gamma\to\gamma_0}(G(\gamma)/N(\gamma)) = \lim_{\gamma\to\gamma_0}(G'(\gamma)/(\tilde{\gamma}'(\gamma) - 1)).$$

Известно [2], что производные функций $\tilde{\gamma}(\gamma)$ и $F(\gamma)$ в точке $\gamma = \gamma_0$ будут непрерывны, если в окрестности точки $x = 0$ справедливы представления

$$\sqrt{\varphi_{0j}'^2(x) + \psi_{0j}'^2(x)} = x^{-l_j}(d_j + x^{n_j}P_j(x)),\quad d_j \neq 0, \tag{26}$$

где функции $P_j(x)$ удовлетворяют условию H, $d_j = \text{const}$, $0 < l_j < 1$, $n_j > 0$ $(j = 1, 2)$.

Пусть $\beta_0 = \max\limits_{0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_0} G_1(\gamma)$ тогда имеет место

Теорема. *Если справедливо представление* (26), *то для всех* α *и* $\beta \geqslant \beta_0$ *функция* $z(\zeta)$, *определяемая формулой* (23), *будет однолистной в области* D_ζ^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного — М.: Наука, 1965.—716 с.
2. Салимов Р. Б. Внешние обратные задачи для случая, когда граничные значения заданы в функции декартовой координаты x.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1957, 117, № 9, с. 60--64.

Доложено на семинаре 26 января 1984 года.