

© 2023 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ
В ТОЧНЫХ АСИМПТОТИКАХ¹⁾

Исследуются некоторые вопросы, связанные с оценкой скорости сходимости в так называемых “точных асимптотиках”, и, в частности, получены асимптотические разложения по степеням ε сумм вида $\sum_{n \geq 1} n^s \mathbf{P}(\xi_\alpha > \varepsilon n^\delta)$, где случайная величина ξ_α имеет устойчивое распределение с показателем $\alpha \in (0, 2]$, $\delta > 0$, $s \in \mathbf{R}$.

Ключевые слова и фразы: скорость сходимости, точная асимптотика, полная сходимость.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5536>

1. Результаты. Рассмотрим суммы вида

$$S(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} n^s \mathbf{P}(\xi > \varepsilon n^\delta), \quad (1.1)$$

где случайная величина ξ имеет устойчивое распределение, $\delta > 0$, $s \in \mathbf{R}$.

Нашей ближайшей целью является изучение асимптотического поведения таких сумм при малых значениях параметра $\varepsilon > 0$.

Исследования такого рода необходимы для решения задач, связанных с оценкой скорости сходимости в так называемых “точных асимптотиках” (см. посвященные этой проблематике работы [1], [2], [4], [8] и обширные библиографии в них).

Для формулировки результата нам понадобятся некоторые обозначения.

Положим

$$U(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} n^t - \int_1^N y^t dy - \sum_{j=1}^{[t+1]} \frac{B_j}{j!} A_{j-1}^{(t)} N^{t+1-j} \right\}, \quad (1.2)$$

*Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: l_rozovsky@mail.ru

¹⁾Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00356).

где B_j — числа Бернулли ($B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_{2l+1} = 0$, $l \geq 1$) (например, [10, с. 56]), $A_k^{(t)} = \prod_{j=0}^{k-1} (t-j)$, если $k \geq 1$, и $A_0^{(t)} = 1$ (т.е. $(y^t)^{(k)} = A_k^{(t)} y^{t-k}$).

В частности, если t — целое неотрицательное число, то

$$\frac{1}{j!} A_{j-1}^{(t)} = \begin{cases} \frac{1}{t+1} \binom{t+1}{j}, & j \leq t+1, \\ 0, & j > t+1. \end{cases}$$

Из формулы (2.1) при $f(x) = x^t$ (см. также (2.22) и далее) следует, что пределы $U(t)$ при каждом t существуют и конечны.

Заметим, что $U(-1) = C$ и $U(t) = \zeta(-t) + 1/(t+1)$, если $t < -1$ (здесь и в дальнейшем C — постоянная Эйлера, $\zeta(\cdot)$ — функция Римана).

При $t+1 > 0$ положим

$$\widehat{U}(t) = U(t) - \frac{1}{t+1}. \quad (1.3)$$

Таким образом,

$$\widehat{U}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} n^t - \frac{N^{t+1}}{t+1} - \sum_{j=1}^{[t+1]} \frac{B_j}{j!} A_{j-1}^{(t)} N^{t+1-j} \right\}.$$

Пусть для начала случайная величина ξ в (1.1) имеет стандартное нормальное распределение.

Теорема 1 (случай $\alpha = 2$). Пусть $s \geq -1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\sum_{n \geq 1} n^s \mathbf{P}(\xi > \varepsilon n^\delta) - \frac{A(s, \varepsilon)}{2} \sim \sum_{r \geq 0} b_r \widehat{U}(s + (2r+1)\delta) \frac{\varepsilon^{2r+1}}{(2r+1)!}, \quad (1.4)$$

где

$$A(s, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{-(s+1)/\delta}}{s+1} \mathbf{E}|\xi|^{(s+1)/\delta} + \widehat{U}(s), \quad s+1 > 0, \quad (1.5)$$

$$A(-1, \varepsilon) = -\frac{1}{\delta} \ln \varepsilon + C + \frac{1}{\delta} \mathbf{E} \ln |\xi|,$$

$$b_r = \frac{(-1)^{r+1} (2r)!}{r! 2^r \sqrt{2\pi}}, \quad r \geq 0. \quad (1.6)$$

Математические ожидания в (1.5) можно сосчитать. Так,

$$\mathbf{E}|\xi|^t = \frac{2^{t/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right), \quad \mathbf{E} \ln |\xi| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (C + 2 \ln 2 - \sqrt{\pi} \ln 2).$$

Замечание 1. Результаты, аналогичные соотношению (1.4), причем для всех $\alpha \leq 2$ и всех допустимых s , имеют место и в случае $s < -1$, при котором $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} S(\varepsilon) = \zeta(-s) \mathbf{P}(\xi > 0)$ (см. (2.32) и (2.36) при $M > 2$).

Из теоремы 1, в частности, следует, что

$$S(\varepsilon) - A(s, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (1.7)$$

и эта оценка позволяет уточнить и обобщить все результаты из [1, предложение 1.1]. Например, из (1.7) при $s = 0$ получим

$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(|\xi| > \varepsilon n^\delta) - \varepsilon^{-1/\delta} \mathbf{E}|\xi|^{1/\delta} + \frac{1}{2} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

что при $\delta > 1$ уточняет результат из [1, предложение 1.1(iii)], в котором вместо $O(\varepsilon)$ стоит $O(\varepsilon^{1/\delta})$ (при $\delta \leq 1$ наша оценка совпадает с [1, предложение 1.1(ii)]). Аналогично, при $s = 1$

$$\sum_{n \geq 1} n \mathbf{P}(|\xi| > \varepsilon n^\delta) - \varepsilon^{-2/\delta} \frac{1}{2} \mathbf{E}|\xi|^{2/\delta} = -\frac{1}{12} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (1.8)$$

в то время как в [1, предложение 1.1(iv)] в правой части (1.8) стоит $O(1)$.

Из (1.7) вытекают также предложения 2.1, 2.2 ($\alpha = 2$) и 2.3 из [2].

Чтобы сформулировать следующий результат, нам понадобятся дополнительные обозначения.

Пусть X, X_1, \dots — независимые случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и распределением V , $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Нас интересует точная асимптотика при $\varepsilon \rightarrow +0$ сумм вида

$$\sum_{n \geq 1} n^s \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon n^{(1+\delta)/2}), \quad s \geq -1, \quad \delta > 0.$$

Предположим, что распределение V имеет конечный абсолютный момент порядка $k + 2$ (целое $k \geq 0$). Последнее позволяет определить функцию

$$\Phi_k(x) = \sum_{\nu=0}^k n^{-\nu/2} Q_\nu(x), \quad (1.9)$$

где $Q_0(x) = \Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины ξ и $Q_\nu(x)$, $\nu \geq 1$, — функции, для которых имеются явные формулы, зависящие от моментов случайной величины X до порядка $\nu + 2$ включительно (см. [3, гл. 5, п. 6]). Например, $Q_1(x) = -\Phi'''(x) \mathbf{E}X^3/6$.

Теорема 2. Пусть целое $k \geq 1$, постоянная $\tau \in [0, 1)$. Предположим, что распределение V удовлетворяет условию

$$(C) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{E}e^{itX}| < 1.$$

Кроме того, $\mathbf{E}|X|^{k+2+\tau} < \infty$, если $0 < \tau < 1$, и

$$\mathbf{E}|X|^{k+2} < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{1}{y} \left| \int_{|x|>y} x^{k+2} V(dx) \right| dy < \infty, \quad \text{если } \tau = 0 \quad (1.10)$$

(условие (1.10) при четном k эквивалентно неравенству $\mathbf{E}X^{k+2} \ln |X| < \infty$). Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon n^{(1+\delta)/2}) - A_\tau(\varepsilon) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon^{-(j+\tau)/\delta}}{(j+\tau)/2} \int_0^\infty y^{(j+\tau)/\delta} Q'_{k-j}(y) dy \right) \\ & = \frac{1}{2} \widehat{U} \left(\frac{k-2+\tau}{2} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} Q_{k-j}(0) \widehat{U} \left(\frac{j-2+\tau}{2} \right) + B_k(\tau) + C_k(\tau). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь конечная постоянная

$$\begin{aligned} C_k(\tau) &= \sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \left(\mathbf{P}(S_n \geq 0) - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^k \frac{Q_\nu(0)}{n^{\nu/2}} \right), \\ A_\tau(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^{-\tau/\delta}}{\tau/2} \int_0^\infty y^{\tau/\delta} Q'_k(y) dy \quad \text{и} \quad B_k(\tau) = -Q_k(0) \widehat{U} \left(-1 + \frac{\tau}{2} \right), \quad \tau > 0, \\ A_0(\varepsilon) &= -Q_k(0) \frac{2}{\delta} \ln \varepsilon \quad \text{и} \quad B_k(0) = \frac{2}{\delta} \int_0^\infty \ln y Q'_k(y) dy + Q_k(0) C. \end{aligned}$$

Теорема 2 является новой. Ее варианты при $k = 0$, не требующие выполнения условия (С), были получены в [2, теоремы 2.1(а), 2.2(а)] и обобщены в [4] и [5]. Также отметим, что существенный вклад в доказательство теоремы 2 вносит оценка (1.4) при $r = 0$.

Замечание 2. 1) Если

$$\mathbf{E}X^{j+2} = \mathbf{E}\xi^{j+2}, \quad 1 \leq j \leq \nu, \quad (1.12)$$

то $Q_\nu(\cdot) = 0$;

2) при четных ν функции $Q_\nu(0) = 0$.

3) интеграл $\int_0^\infty y^{(j+\tau)/\delta} q_{k-j}(y) dy$ из (1.11) при $j = k$ равен $\frac{1}{2} \mathbf{E}|\xi|^{(k+\tau)/\delta}$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 2 и, кроме того, условие (1.12) при $\nu = k$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon n^{(1+\delta)/2}) - \frac{\varepsilon^{-(k+\tau)/\delta}}{k+\tau} \mathbf{E}|\xi|^{(k+\tau)/\delta} \right) \\ & = \frac{1}{2} \widehat{U} \left(\frac{k-2+\tau}{2} \right) + \sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \left(\mathbf{P}(S_n \geq 0) - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отметим, что следствие 1 представляет основной интерес лишь при $k \geq 4$, поскольку иначе является следствием заметно более общего результата, полученного в [6, теорема 2] (см. также [6, следствие 3]).

Далее рассмотрим случай $0 < \alpha < 2$. Не умаляя общности, будем предполагать, что характеристическая функция $\psi_\alpha(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$ определена на нижеследующими формулами (см. [7, теорема В.3 и п. В.4]):

$$\ln \psi_\alpha(t) = -|t|^\alpha \begin{cases} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha) \operatorname{sign} t\right), & \alpha \neq 1, \\ \frac{\pi}{2} + i\beta \operatorname{sign} t \ln |t|, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.14)$$

где $|\beta| \leq 1$, $K(\alpha) = 1 - |1 - \alpha|$. Положим $\rho = (1 + \beta K(\alpha)/\alpha)/2$.

Теорема 3. Пусть $\alpha < 1$ или $1 < \alpha < 2$. Тогда при $0 \leq s + 1 < \alpha\delta$

$$S(\varepsilon) - A_\alpha(s, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sin(\pi n \rho) \widehat{U}(s + n\delta) \frac{\varepsilon^n}{n!}, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (1.15)$$

Кроме того, если $\alpha > 1$ и $\beta = -1$, то соотношение (1.15) справедливо при любых $s \geq -1$.

Здесь

$$A_\alpha(s, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{-(s+1)/\delta}}{s+1} \mathbf{E}\mathbf{I}[\xi > 0] \xi^{(s+1)/\delta} + \rho \widehat{U}(s), \quad \text{если } s + 1 > 0, \quad (1.16)$$

$$A_\alpha(-1, \varepsilon) = -\frac{1}{\delta} \mathbf{E}\mathbf{I}[\xi > 0] \ln \xi + \frac{\rho}{\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} + C.$$

В частности, если $\alpha < 1$ и $\beta = 1$ (т.е. $\rho = 1$), то при любом $N > 0$

$$S(\varepsilon) = A_\alpha(s, \varepsilon) + O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (1.17)$$

Заметим, что некоторые двусторонние варианты оценок для $S(\varepsilon)$ при $1 < \alpha < 2$ содержатся в [2, предложения 2.2 и 2.4].

Теорема 4. Пусть $\alpha = 1$. Если $\beta = 0$, то при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$S_1(s, \varepsilon) - A_1(s, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} \frac{(-4/\pi^2)^{n+1}}{2(2n+1)} \widehat{U}(s + (2n+1)\delta) \varepsilon^{2n+1}, \quad (1.18)$$

где $A_1(s, \varepsilon)$ получено подстановкой в выражения из (1.16) $\alpha = 1$ и $\rho = 1/2$.

Если $\beta \neq 0$, то

$$S_1(s, \varepsilon) - A_1(s, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} b_n(|\beta|) \widehat{U}(s + n\delta) \frac{\varepsilon^n}{n!}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (1.19)$$

где $A_1(s, \varepsilon)$ определено в (1.16) при $\alpha = 1$, $\rho = b_0(\beta)$, если $\beta > 0$, и $\rho = 1 - b_0(|\beta|)$, если $\beta < 0$.

Здесь

$$b_n(\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\beta u \ln u) u^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 + \beta)u\right) du, \quad n \geq 0, \quad (1.20)$$

а параметр s обязан удовлетворять условию $0 \leq s + 1 < 1$, если $-1 < \beta \leq 1$, и может быть любым при $\beta = -1$.

Доказательства теорем 1, 3 и 4 основаны на довольно общей методике. Она, в частности, позволяет показать, что асимптотическое равенство (1.4) можно дифференцировать по параметру ε любое число раз.

В частности, если $s + 1 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} n^{s+\delta} \phi(\varepsilon n^\delta) - \frac{\varepsilon^{-(s+1)/\delta-1}}{2\delta} \mathbf{E}|\xi|^{(s+1)/\delta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{U}(s+\delta) \\ \sim - \sum_{r \geq 1} b_r \widehat{U}(s + (2r+1)\delta) \frac{\varepsilon^{2r}}{(2r)!}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\phi(y)$ — плотность распределения стандартной нормальной случайной величины ξ .

Проиллюстрируем возможности предложенного подхода еще на одном примере.

Теорема 5. Пусть $t \geq 0$ и $s + 1 \geq 0$. Тогда

$$\Delta_\varepsilon(t, s) = \mathcal{M}_\varepsilon(t, s) - \frac{A_t(s, \varepsilon)}{2} = O(\varepsilon^{1+t}), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (1.22)$$

где $\mathcal{M}_\varepsilon(t, s) = \sum_{n \geq 1} n^s \mathbf{E} \xi^{2t} \mathbf{I}[\xi > \varepsilon n^\delta]$,

$$\begin{aligned} A_t(s, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon^{-(s+1)/\delta}}{s+1} \mathbf{E}|\xi|^{t+(s+1)/\delta} + \widehat{U}(s) \mathbf{E}|\xi|^t, \quad s+1 > 0, \\ A_t(-1, \varepsilon) &= \frac{1}{\delta} (\mathbf{E}|\xi|^t \ln |\xi| + (\delta C - \ln \varepsilon) \mathbf{E}|\xi|^t). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Расчеты показывают, что

$$\mathbf{E}(\ln |\xi|)|\xi|^t = \frac{2^{t/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\ln 2}{2} \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right) + \Gamma'\left(\frac{t+1}{2}\right) \right).$$

Из (1.22) при $\delta = 1/2$, $t = p \in (0, 2)$, $s = -p/2$ вытекает (с некоторым уточнением остаточного члена) предложение 2.1(a) из [8].

Замечание 3. Утверждения теоремы 5 допускают обобщение в духе теоремы 1, а именно,

$$\Delta_\varepsilon(t, s) \sim \varepsilon^{1+t} \sum_{k \geq 0} a_k(t) \widehat{U}(s + (2k + t + 1)\delta) \varepsilon^{2k}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (1.24)$$

где (см. (1.6))

$$a_k(t) = \sum_{r=0}^k \frac{b_r}{(2r)!} c_{k-r}(t), \quad c_j(t) = \frac{1}{\prod_{i=0}^j (t+2i+1)}, \quad j \geq 0. \quad (1.25)$$

Можно показать, что при целых t

$$a_k(t) = \frac{b_k}{(2k)! (2k+t+1)}. \quad (1.26)$$

Таким образом, при $t = 0$ из (1.24) следует теорема 1.

2. Доказательства теорем 1, 3 и 4.

Лемма 1 (формула Эйлера–Маклорена [10, гл. 3.6], [11, гл. 12.2]). Пусть функция $f(x)$ на промежутке $[1, \infty)$ имеет m непрерывных производных (целое $m \geq 1$). Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-1} f(j) = \int_1^n f(x) dx + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{B_l}{l!} (f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(1)) + (-1)^{[(m+1)/2]} R_m(n), \quad m \geq 2, \quad (2.1)$$

где $R_m(n) = \int_1^n (P_m(x) - P_m(0)) f^{(m)}(x) dx$, и

$$\sum_{j=1}^{n-1} f(j) = \int_1^n f(x) dx - \frac{f(n) - f(1)}{2} - \int_1^n P_1(x) f'(x) dx, \quad m = 1,$$

где $P_1(x) = 1/2 - \{x\}$, а $\{x\}$ — дробная часть x .

Здесь

$$P_{2l}(x) = 2 \sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2k\pi x)}{(2\pi k)^{2l}}, \quad P_{2l-1}(x) = 2 \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(2k\pi x)}{(2\pi k)^{2l-1}}, \quad l \geq 1, \quad (2.2)$$

$$|P_m(x)| \leq \frac{2}{(2\pi)^m} \zeta(m), \quad m \geq 2.$$

Отметим, что если $f(x)$ является полиномом степени $m - 1$, то $R_m(n) = 0$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $s \in R$, $\delta > 0$ и пусть целые $m \geq 1$, $L \geq 1$ удовлетворяют условию

$$\rho = L\delta + s + 1 - m < \delta, \quad (2.3)$$

т.е.

$$m \geq 1 + [(L - 1)\delta + s + 1] \quad (2.4)$$

(при $m = 1$ из (2.4) следует, что $s < 0$).

Всюду в дальнейшем $\mu(u) = u^s h(u^\delta)$, где функция $h(y)$ при $y > 0$ имеет $K = \max(L, m)$ непрерывных производных таких, что при $0 \leq j < L$ пределы $h^{(j)}(0) = \lim_{u \rightarrow 0+} h^{(j)}(u)$ существуют и конечны, а если $K = m$ и $L \leq j \leq K$, то $h^{(j)}(u) = O(1)$, $u \rightarrow +0$. Кроме того, предполагается, что

$$\mu^{(r)}(\infty) = 0, \quad r = 0, \dots, m - 1, \quad T_m = \int_1^\infty |\mu^{(m)}(u)| du < \infty \quad (2.5)$$

и то, что интеграл

$$\int_1^\infty \mu(u) du = \frac{1}{\delta} \int_1^\infty y^{(s+1)/\delta} h(y) \frac{dy}{y} \quad (2.6)$$

сходится.

Далее, в основном, будем рассматривать случай $m \geq 2$, как более общий и содержательный, ограничиваясь в случае необходимости лишь некоторыми комментариями при $m = 1$.

Наша ближайшая цель — исследование асимптотического поведения ряда $S(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \mu(\varepsilon n)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Из леммы 1 ($f(x) = \mu(\varepsilon x)$, $n \rightarrow \infty$) при сделанных предположениях, в частности, следует, что ряд $S(\varepsilon)$ сходится и

$$S(\varepsilon) = \int_1^\infty \mu(\varepsilon u) du - Q_{m-1} + (-1)^{[(m+1)/2]} \varepsilon^m R_m, \quad (2.7)$$

где (см. (2.1) и (2.2)) при $m \geq 2$

$$Q_{m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_j}{j!} \mu^{(j-1)}(\varepsilon) \varepsilon^{j-1}, \quad (2.8)$$

$$R_m = \int_1^\infty (P_m(y) - P_m(0)) \mu^{(m)}(\varepsilon y) dy = \left(\int_1^{1/\varepsilon} \dots \right) + \left(\int_{1/\varepsilon}^\infty \dots \right) = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2. \quad (2.9)$$

Очевидно (см. (2.2) и (2.5)), что

$$|\tilde{R}_2| \leq \frac{4\zeta(m)}{(2\pi)^m} T_m \varepsilon^{-1} \quad (2.10)$$

($|\tilde{R}_2| \leq \frac{1}{2} T_1 \varepsilon^{-1}$, если $m = 1$).

Для того, чтобы оценить \tilde{R}_1 , нам понадобится произвести некоторые вычисления.

Имеем

$$h(u) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} u^i + R_L(u), \quad 0 < u < 1, \quad (2.11)$$

где ($l = L$)

$$R_l(u) = \frac{1}{(l-1)!} \int_{0+}^u (u-t)^{l-1} h^{(L)}(t) dt. \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.11), (2.12) и свойств функции h следует, что при $0 < u \leq 1$

$$R_L^{(j)}(u) = R_{L-j}(u) = \theta_j u^{L-j}, \quad 0 \leq j \leq L, \quad |\theta_j| \leq \frac{\sup_{0 < u \leq 1} |h^{(L)}(u)|}{(L-j)!} \quad (2.13)$$

и, если $m > L$ (что невозможно при $m = 1$),

$$R_L^{(j)}(u) = h^{(j)}(u) = \theta_j, \quad L \leq j \leq m, \quad |\theta_j| \leq \sup_{0 < u \leq 1} |h^{(j)}(u)|. \quad (2.14)$$

Положим $\bar{R}(y) = R_L(y^\delta)$. Если $0 \leq k \leq K = \max(L, m)$ и $0 < y \leq 1$, то согласно (2.13) и (2.14) (см. также [3, гл. V, лемма 3])

$$\bar{R}^{(k)}(y) = \theta_k y^{L\delta-k}. \quad (2.15)$$

Воспользовавшись формулой Лейбница, отсюда получим

$$(y^s \bar{R}(y))^{(k)} = \theta y^{s-k+L\delta} \quad (2.16)$$

(функции θ_j , θ , не всегда одни и те же, в (2.15), (2.16) и дальнейшем равномерно ограничены по y).

Следовательно (см. (2.11)),

$$\mu^{(k)}(y) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} (y^{s+i\delta})^{(k)} + \theta y^{s+L\delta-k}, \quad 0 < y \leq 1, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (2.17)$$

Теперь мы в состоянии оценить \tilde{R}_1 (см. (2.9)).

Обозначим $\tilde{P}_m(y) = P_m(y) - P_m(0)$, $m \geq 2$, и $\tilde{P}_1(y) = P_1(y)$. Учтывая (2.17), при $k = m$ имеем

$$\tilde{R}_1 = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \varepsilon^{s+i\delta-m} \int_1^{1/\varepsilon} \tilde{P}_m(y) (y^{s+i\delta})^{(m)} dy + \theta \varepsilon^{-1} \omega_\rho(\varepsilon), \quad (2.18)$$

где $\omega_\rho(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 y^{\rho-1} dy$ и $\rho = s + 1 + L\delta - m$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \omega_\rho(\varepsilon) &= \ln \frac{1}{\varepsilon}, & \rho &= 0, \\ 0 < \omega_\rho(\varepsilon) &< \frac{1}{\rho}, & \rho &> 0, \\ 0 < \omega_\rho(\varepsilon) &< \frac{\varepsilon^\rho}{|\rho|}, & \rho &< 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из (2.3) при $0 \leq i \leq L - 1$ следует, что

$$s + 1 + i\delta - m = \rho - (L - i)\delta \leq \rho - \delta < 0,$$

вследствие чего (см. (2.10))

$$\left| \int_{1/\varepsilon}^\infty \tilde{P}_m(y) (y^{s+i\delta})^{(m)} dy \right| \leq A(s + 1 + i\delta - m)^{-1} \varepsilon^{-(s+1+i\delta-m)}. \quad (2.20)$$

Принимая во внимание (2.9), (2.10), (2.18) и (2.20), найдем

$$(-1)^{[(m+1)/2]} \varepsilon^m R_m = \varepsilon^s \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \tilde{U}_m(s + i\delta) \varepsilon^{i\delta} + \theta \varepsilon^{m-1} \omega_\rho(\varepsilon), \quad (2.21)$$

где $\tilde{U}_m(t) = (-1)^{[(m+1)/2]} \int_1^\infty \tilde{P}_m(y) (y^t)^{(m)} dy$ и $|\tilde{U}_m(s + i\delta)| < \infty$, $i = 0, \dots, L - 1$.

Из леммы 1 ($f(x) = x^t$, $n \rightarrow \infty$, $t < m-1$) следует (см. (1.2)) равенство

$$\tilde{U}_m(t) = U(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_j}{j!} A_{j-1}^{(t)}. \quad (2.22)$$

В частности, если целое неотрицательное $t < m-1$, то

$$U(t) = -\frac{1}{t+1} \sum_{j=1}^{t+1} B_j \binom{t+1}{j},$$

и, с учетом того, что $B_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j$, $n \geq 2$,

$$U(t) = \frac{1 - B_{t+1}}{t+1}, \quad t \geq 1, \quad \text{и} \quad U(0) = \frac{1}{2}.$$

Согласно (2.7), (2.8), (2.17), (2.21)

$$-Q_{m-1} + (-1)^{[(m+1)/2]} \varepsilon^m R_m = \varepsilon^s \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} U(s+i\delta) \varepsilon^{i\delta} + \theta \varepsilon^{m-1} \omega_\rho(\varepsilon).$$

Таким образом (см. (2.7)), имеет место следующее ключевое равенство:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-s} S(\varepsilon) &= \sum_{n \geq 1} n^s h(\varepsilon^\delta n^\delta) = \varepsilon^{-s-1} \int_\varepsilon^\infty \mu(u) du \\ &+ \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} U(s+i\delta) \varepsilon^{i\delta} + \theta \varepsilon^{m-s-1} \omega_\rho(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Формально к оценке остатка надо добавить $\varepsilon^{L\delta}$, однако, учитывая (2.3) и (2.19), $\varepsilon^{m-s-1} \omega_\rho(\varepsilon)$ равно $\varepsilon^{L\delta} \ln(1/\varepsilon)$ при $\rho = 0$ и имеет порядок $\varepsilon^{L\delta-\rho}$ при $\rho > 0$ и $\varepsilon^{L\delta}$ при $\rho < 0$. То есть $\varepsilon^{L\delta} = O(\varepsilon^{m-s-1} \omega_\rho(\varepsilon))$, $\varepsilon \rightarrow 0$, при любом значении ρ .

Заметим, что условие $\rho < 0$ будет выполняться, когда при заданном L

$$\frac{m-s-1}{\delta} > L \quad (2.24)$$

(согласно (2.3) $(m-s-1)/\delta > L-1$), т.е. из (2.24) следует, что $\varepsilon^{m-s-1} \omega_\rho(\varepsilon) = O(\varepsilon^{L\delta})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее изучим поведение интеграла $\int_\varepsilon^\infty \mu(u) du$ из равенства (2.23) при $\varepsilon \rightarrow +0$. Положим

$$h_l(y) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} y^i, \quad 0 \leq l \leq L \quad \left(\sum_{i=0}^{-1} \dots = 0 \right). \quad (2.25)$$

Очевидно, что

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \mu(u) du = A_l(s) - I_l(\varepsilon) + J_l(\varepsilon), \quad (2.26)$$

где (см. (2.6))

$$\begin{aligned} A_l(s) &= \int_1^{\infty} \mu(y) dy + \int_{0+}^1 y^s (h(y^\delta) - h_l(y^\delta)) dy \\ &= \frac{1}{\delta} \int_1^{\infty} y^{(s+1)/\delta} h(y) \frac{dy}{y} + \frac{1}{\delta} \int_{0+}^1 y^{(s+1)/\delta} (h(y) - h_l(y)) \frac{dy}{y}, \quad (2.27) \\ I_l(\varepsilon) &= \int_{0+}^{\varepsilon} y^s (h(y^\delta) - h_l(y^\delta)) dy, \quad J_l(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 y^s h_l(y^\delta) dy, \end{aligned}$$

причем

$$J_l(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \int_{\varepsilon}^1 y^{s+i\delta} dy \quad (2.28)$$

и (см. (2.17))

$$I_l(\varepsilon) = \sum_{i=l}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} (s+1+i\delta)^{-1} \varepsilon^{s+1+i\delta} + \theta \varepsilon^{s+L\delta+1}. \quad (2.29)$$

Определим M равенством

$$M = \min(\text{целое } k \geq 0: k\delta + s + 1 > 0) \quad (2.30)$$

и будем предполагать, что

$$M \leq L. \quad (2.31)$$

Видим, что $M = 0$, если $s + 1 > 0$, и $M = 1$, когда $-\delta < s + 1 \leq 0$, т.е. в этих двух важных случаях условие (2.31) выполняется.

Отметим также, что если $s + 1 = -(j - 1)\delta$ при некотором $j = 1, 2, \dots$, то $M = j$.

Далее приведем некоторые следствия равенства (2.23).

Пусть сначала $s + 1 > 0$ (тогда $M = 0$) или $s + 1 < 0$ и $s + 1 \neq -(M - 1)\delta$, причем $M \leq L$ (в этом случае при $M \geq 2$).

Тогда $s + 1 + i\delta \neq 0$, $0 \leq i < L$, и, если выполняется условие (2.24), то (см. (2.23) и (2.26)–(2.30) при $l = M$, а также (1.3))

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-s} S(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1-s} \left(A_M(s) + \sum_{i=0}^{M-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} (s + 1 + i\delta)^{-1} \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \widehat{U}(s + i\delta) \varepsilon^{i,\delta} + \theta \varepsilon^{L\delta}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

В частности, если t — целое неотрицательное число, то

$$\widehat{U}(t) = -\frac{B_{t+1}}{t+1}, \quad t \geq 1, \quad \text{и} \quad \widehat{U}(0) = -\frac{1}{2}.$$

Отметим, что при $s+1 > 0$ (и (2.24)) (т.е. когда $m > \delta L + s + 1$)

$$\varepsilon^{-s} S(\varepsilon) = \varepsilon^{-1-s} A_0(s) + \sum_{i=0}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \widehat{U}(s+i\delta) \varepsilon^{i\delta} + \theta \varepsilon^{L\delta}, \quad (2.33)$$

причем

$$A_0(s) = \frac{1}{\delta} \int_{+0}^{\infty} y^{(s+1)/\delta-1} h(y) dy = \frac{-1}{s+1} \int_{+0}^{\infty} y^{(s+1)/\delta} dh(y). \quad (2.34)$$

Таким образом, например,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} n^s h(\varepsilon n^\delta) &= \varepsilon^{-(1+s)/\delta} \frac{-1}{s+1} \int_{+0}^{\infty} y^{(s+1)/\delta} dh(y) \\ &\quad + h(0) \widehat{U}(s) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Пусть теперь $s+1 = -(M-1)\delta$ и $s+1 \leq 0$, т.е. $M \geq 1$.

Тогда в предположении (2.24) (и $M \leq L$)

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-s} S(\varepsilon) &= \varepsilon^{(M-1)\delta} \left(A_M(s) + \sum_{i=0}^{M-2} \frac{h^{(i)}(0)}{i!(i+1-M)\delta} + \frac{h^{(M-1)}(0)}{(M-1)!} \left(C + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{i=0, \neq M-1}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \widehat{U}(-1+(i+1-M)\delta) \varepsilon^{i\delta} + \theta \varepsilon^{L\delta}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Так, если $s+1 = 0$, или $M = 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq l} n^{-1} h(\varepsilon^\delta n^\delta) &= A_1(-1) + h(0) \left(C + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{L-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \widehat{U}(-1+i\delta) \varepsilon^{i\delta} + \theta \varepsilon^{L\delta}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

В частности,

$$\sum_{n \geq 1} n^{-1} h(\varepsilon n^\delta) = A_1(-1) + \frac{h(0)}{\delta} \left(\delta C + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.38)$$

Заметим, что если $\int_1^\infty |h(y)| dy/y < \infty$, то

$$A_1(-1) = -\frac{1}{\delta} \int_{0+}^\infty \ln y dh(y). \quad (2.39)$$

Обращаем внимание на то, что правые части в формулах (2.32), (2.33), (2.36) и (2.38) зависят в основном лишь от производных функции h в нуле и от показателя $A_M(s)$, предположение о конечности которого накладывает определенные ограничения на значения s .

Теперь посмотрим, как выглядят вышеупомянутые характеристики при $h(y) = \mathbf{P}(X_\alpha > y)$, где X_α является “стандартной” устойчивой случайной величиной с показателем $\alpha \in (0, 2]$, и при каких s они справедливы.

Пусть для начала $\alpha = 2$ и $h(y) = \bar{\Phi}(b + y) = 1 - \Phi(b + y)$, где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартной нормально распределенной случайной величины ξ с плотностью $\phi(\cdot)$, а b — некоторая постоянная.

Тогда

$$h(0) = 1 - \Phi(b), \quad h^{(i)}(0) = (-1)^i \phi(b) H_{i-1}(b), \quad i \geq 1, \quad (2.40)$$

где $H_{i-1}(\cdot)$ — полиномы Чебышёва–Эрмита степени $i - 1$ (см. [3, гл. 5, п. 6]).

Заметим, что если $b = 0$, то при $r \geq 0$

$$h(0) = \frac{1}{2}, \quad h^{(2r+2)}(0) = 0, \quad h^{(2r+1)}(0) = b_r. \quad (2.41)$$

Если $\alpha = 2$, условия (2.5) и (2.6) выполняются при любом s .

Теорема 1 вытекает из (2.33) и (2.37), поскольку в нашем случае постоянную L и соответствующее значение m можно выбирать произвольно.

Далее рассмотрим случай $0 < \alpha < 2$ (см. (1.14)).

Положим $G(x, \alpha, \beta) = \mathbf{P}(X_\alpha < x)$ и $\bar{G}(x, \alpha, \beta) = 1 - G(x, \alpha, \beta)$.

Согласно [7, теорема 2.4.2 и (2.2.30)] при $1 < \alpha < 2$ и $x \geq 0$

$$\bar{G}(x, \alpha, \beta) = \rho + \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sin(\pi n \rho) \frac{x^n}{n!}, \quad (2.42)$$

откуда

$$h(0) = \rho, \quad h^{(n)}(0) = \frac{1}{\pi\alpha} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sin(\pi n \rho), \quad n \geq 1. \quad (2.43)$$

Условия (2.5) и (2.6) выполняются при любом s , если $\beta = -1$ ([7, теорема 2.5.3]), и при

$$s + 1 < \alpha\delta, \quad (2.44)$$

если $\beta \neq -1$.

Если же $\alpha < 1$, то согласно [7, теорема 2.5.1 и следствие 1] при $x \rightarrow +0$

$$\bar{G}(x, \alpha, \beta) - \rho \sim \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sin(\pi n \rho) \frac{x^n}{n!}, \quad (2.45)$$

и (2.43) выполнено снова.

Отметим, что если здесь $\beta = 1$, то $h(+0) = 1$ и $h^{(n)}(+0) = 0$, $n \geq 1$, т.е. асимптотика $S(\varepsilon)$ заметно упрощается (случай $\beta = -1$ неинтересен, поскольку тогда $h(u) = 0$, $u \geq 0$, и $S(\varepsilon) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$).

Ограничения на s здесь такие же, как в (2.44) (см. [7, (2.4.3)]).

Наконец, рассмотрим случай $\alpha = 1$ (как и ранее, $h(x) = \overline{G}(x, 1, \beta)$).

Если $\beta = 0$, то $h(x) = 1/2 - (1/\pi) \arctg(2x/\pi)$ и, следовательно, при $l \geq 0$

$$h(0) = \frac{1}{2}, \quad h^{(2l+2)}(0) = 0, \quad h^{(2l+1)}(0) = -(2l)! \frac{2}{\pi^2} \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)^l. \quad (2.46)$$

Если $\beta > 0$, то

$$h^{(n)}(0) = (-1)^n b_n(\beta), \quad n \geq 0, \quad (2.47)$$

а если $\beta < 0$, то

$$h(0) = 1 - b_0(|\beta|), \quad h^{(n)}(0) = -b_n(|\beta|), \quad n \geq 1, \quad (2.48)$$

где (см. [7, (2.4.5) и (2.2.29)])

$$b_n(\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\beta u \ln u) u^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 + \beta)u\right) du, \quad n \geq 0.$$

При этом, s обязан удовлетворять условию (2.44), $\alpha = 1$, если $-1 < \beta \leq 1$, и может быть любым при $\beta = -1$ (см. [7, (2.5.26) и (2.5.20)]).

Теоремы 2 и 3 с учетом соотношений (2.42)–(2.48) проверяются так же, как теорема 1.

3. Доказательства теорем 2 и 5.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2, и $\Delta_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x\sqrt{n}) - \Phi_k(x)$ (см. (1.9)). Тогда

$$\sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \sup_x |\Delta_n(x)| < \infty. \quad (3.1)$$

Лемма 2 является следствием теоремы 7 (и замечаний 1–3) работы [9].

Положим

$$I(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon n^{(1+\delta)/2}). \quad (3.2)$$

Имеем в условиях леммы 2

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= - \sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \Delta_n(\varepsilon n^{\delta/2}) + \sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} (1 - \Phi_k(\varepsilon n^{\delta/2})) \\ &= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.1) и свойств функций $Q_\nu(x)$ следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I_1(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} n^{-1+(k+\tau)/2} \left(\mathbf{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^k \frac{Q_\nu(0)}{n^\nu} \right) + o(1). \quad (3.4)$$

Напоминаем, что $Q_\nu(0) = 0$ при четных ν , т.е. фактически

$$\sum_{\nu=1}^k \frac{Q_\nu(0)}{n^\nu} = \sum_{l=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \frac{Q_{2l-1}(0)}{n^{2l-1}}.$$

Теперь займемся суммой $I_2(\varepsilon)$.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть целое $k \geq 0$. Положим

$$H_n(x) = \sum_{\nu=0}^k n^{-\nu/2} h_\nu(x), \quad (3.5)$$

где $h_\nu(x)$, $x > 0$, — некоторые функции.

Тогда

$$S(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} n^s H_n(\varepsilon n^\delta) = \sum_{\nu=0}^k S_\nu(\varepsilon), \quad (3.6)$$

где $S_\nu(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} n^{s-\nu/2} h_\nu(\varepsilon n^\delta)$.

Пусть здесь $s - k/2 \geq -1$, а функции h_ν удовлетворяют всем необходимым условиям гладкости, которые потребуются для справедливости дальнейших рассуждений.

Обозначим $t = (s + 1 - \nu/2)/\delta$. Отметим, что $t \geq 0$, причем условие $t = 0$ может выполняться лишь при $\nu = k$, или $s = k/2 - 1$, т.е. во всех других случаях $t > 0$.

Согласно (2.35) и (2.38), (2.39) при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$S_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^{-t} \frac{-1}{\delta t} \int_0^\infty y^t dh_\nu(y) + h_\nu(0) \widehat{U} \left(s - \frac{\nu}{2} \right) + O(\varepsilon), \quad t > 0, \quad (3.7)$$

и

$$S_k(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty \ln y dh_k(y) + h_k(0) \left(C + \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon), \quad t = 0. \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что если $s > k/2 - 1$, то

$$S(\varepsilon) = - \sum_{\nu=0}^k \frac{\varepsilon^{-(s+1-\nu/2)/\delta}}{s+1-\nu/2} \int_0^\infty y^{(s+1-\nu/2)/\delta} dh_\nu(y) + \sum_{\nu=0}^k h_\nu(0) \widehat{U} \left(s - \frac{\nu}{2} \right) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Если же $s = k/2 - 1$, то формулу (3.9) следует несколько модифицировать, а именно, заменить в ее правой части оба слагаемых с индексом $\nu = k$ на $S_k(\varepsilon)$ из (3.8). То есть при $s = k/2 - 1$

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty \ln y dh_k(y) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\varepsilon^{-(k-\nu)/2\delta}}{(k-\nu)/2} \int_0^\infty y^{(k-\nu)/2\delta} dh_\nu(y) \\ + h_k(0) \left(C + \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + \sum_{\nu=0}^{k-1} h_\nu(0) \widehat{U} \left(\frac{k-\nu}{2} - 1 \right) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Вернемся к сумме $I_2(\varepsilon)$ (см. (3.3)). Чтобы ее оценить воспользуемся формулами (3.9) и (3.10), заменив δ на $\delta/2$, при $s = -1 + (k+\tau)/2 \geq -1/2$ (т.е. при $k = [2s + 2] \geq 1$), $h_0(x) = 1 - \Phi(x)$, $h_\nu(x) = -Q_\nu(x)$, $1 \leq \nu \leq k$.

Условие $s > k/2 - 1$ выполнено, если $\tau > 0$; $s = k/2 - 1$, если $\tau = 0$.

Таким образом, если $\tau > 0$, то $(q_\nu(y) = Q'_\nu(y))$

$$I_2(\varepsilon) = \varepsilon^{-(k+\tau)/\delta} \left(\frac{1}{k+\tau} \mathbf{E} |\xi|^{(k+\tau)/\delta} \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^k \frac{\varepsilon^{\nu/\delta}}{(k-\nu+\tau)/2} \int_0^\infty y^{(k-\nu+\tau)/\delta} q_\nu(y) dy \right) \\ + \frac{1}{2} \widehat{U} \left(\frac{k-2+\tau}{2} \right) - \sum_{\nu=1}^k Q_\nu(0) \widehat{U} \left(\frac{k-2-\nu+\tau}{2} \right) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Если же $\tau = 0$, то

$$I_2(\varepsilon) = -\frac{2}{\delta} \int_0^\infty \ln y q_k(y) dy + \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\varepsilon^{-(k-\nu)/\delta}}{(k-\nu)/2} \int_0^\infty y^{(k-\nu)/\delta} q_\nu(y) dy \\ - Q_k(0) \left(C + \frac{2}{\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} \widehat{U} \left(\frac{k-2}{2} \right) \\ - \sum_{\nu=1}^{k-1} Q_\nu(0) \widehat{U} \left(\frac{k-2-\nu}{2} \right) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Теорема 2 вытекает из (3.2)–(3.4), (3.11) и (3.12).

Теперь займемся проверкой теоремы 5 и замечания 3.

Пусть целое $l \geq 1$. Обозначим $I_l(y) = \int_y^\infty y^{t+2l} \phi(y) dy$, $I_0(y) = I_l(y)|_{l=0}$.

Индукцией по l получим (см. (1.25))

$$I_0(y) = c_{l-1}(t)I_l(y) - \phi(y) \sum_{j=0}^{l-1} c_j(t)y^{t+1+2j}, \quad y > 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{c_{l-1}(t)}{c_{l-1}(t+\lambda)} - \tau \sum_{j=0}^{l-1} \frac{c_j(t)}{c_{j-1}(t+\lambda)} = 1, \quad \lambda \geq 0. \quad (3.14)$$

Положим $\mathcal{K}_\varepsilon(\lambda) = \sum_{n \geq 1} n^{\lambda+\delta} \phi(\varepsilon n^\delta)$.

По (3.13) в обозначениях теоремы 5

$$\mathcal{M}_\varepsilon(t, s) = c_{l-1}(t)\mathcal{M}_\varepsilon(t+2l, s) - \sum_{j=0}^{l-1} c_j(t)\varepsilon^{t+1+2j}\mathcal{K}_\varepsilon(s+(t+2j)\delta). \quad (3.15)$$

Пусть (см. (2.3), (2.4) и (2.24)) $s+1 \geq 0$, $t \geq 0$, произвольное целое $M \geq 1$, целые L и l удовлетворяют условиям $L \geq t+2M+3$, $l \geq M+2$, $t+2l > s+1+L\delta$. Обозначим $E_\lambda = \mathbf{E}|\xi|^\lambda/2$, $\lambda \geq 0$. Заметим, что

$$\frac{E_\lambda}{E_{\lambda+2j}} = c_{j-1}(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Согласно (2.33), (2.34), (2.37), (2.39) при $h(y) = I_l(y)$ (см. (1.23))

$$\mathcal{M}_\varepsilon(t+2l, s) = \frac{A_{t+2l}(s, \varepsilon)}{2} + O(\varepsilon^{t+2M+3}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Положим $\tau = (s+1)/\delta$. По (1.21)

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{t+1+2j}\mathcal{K}_\varepsilon(s+(t+2j)\delta) - \frac{\varepsilon^{-\tau}}{\delta} E_{\tau+t+2j} \\ & \sim -\varepsilon^{t+1} \sum_{r \geq 0} b_r \widehat{U}(s+(2(r+j)+t+1)\delta) \frac{\varepsilon^{2(r+j)}}{(2r)!}, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.15), (3.17), (3.18) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\varepsilon(t, s) &= c_{l-1}(t) \frac{A_{t+2l}(s, \varepsilon)}{2} - \sum_{j=0}^{l-1} c_j(t) \frac{\varepsilon^{-\tau}}{\delta} E_{\tau+t+2j} \\ &+ \varepsilon^{1+t} \left(\sum_{k=0}^M a_k(t) \widehat{U}(s+(2k+t+1)\delta) \varepsilon^{2k} + O(\varepsilon^{2M}) \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда, по (3.16) и (3.14) при $s+1 > 0$

$$\Delta_\varepsilon(t, s) = \varepsilon^{1+t} \left(\sum_{k=0}^M a_k(t) \widehat{U}(s+(2k+t+1)\delta) \varepsilon^{2k} + O(\varepsilon^{2M}) \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

что, в силу произвольности M , доказывает асимптотическое равенство (1.24), когда $s+1 > 0$.

Случай $s + 1 = 0$ анализируется аналогично с использованием равенства

$$c_{l-1}(t) \mathbf{E}|\xi|^{t+2l} \ln |\xi| = \mathbf{E}|\xi|^t \ln |\xi| + \sum_{j=0}^{l-1} c_j(t) \mathbf{E}|\xi|^{t+2j},$$

и также приводит к (1.24).

Таким образом, замечание 3 и, следовательно, теорема 5 доказаны.

Что касается равенства (1.26), то его можно получить, скажем, путем сравнения при $\delta = 1$ асимптотических разложений (1.24) и (2.33) ($h(y) = I_l(y)$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Gut, J. Steinebach, “Convergence rates in precise asymptotics”, *J. Math. Anal. Appl.*, **390**:1 (2012), 1–14; *Correction*, 2014, 2 pp., <http://www.math.uu.se/~allan/90correction.pdf>.
2. A. Gut, J. Steinebach, “Convergence rates in precise asymptotics. II”, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, **39** (2013), 95–110.
3. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Наука, М., 1987, 318 с.
4. Yong Zhang, “A note on the convergence rates in precise asymptotics”, *J. Inequal. Appl.*, **2019** (2019), 15, 11 pp.
5. L. V. Rozovsky, “One more on the convergence rates in precise asymptotics”, *Statist. Probab. Lett.*, **171** (2021), 109023, 6 pp.
6. Л. В. Розовский, “О скорости сходимости в “точных асимптотиках” для случайных величин с устойчивым распределением”, *Вероятность и статистика*. 30, Зап. науч. сем. ПОМИ, **501**, ПОМИ, СПб., 2021, 259–275.
7. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М., 1983, 304 с.; англ. пер.: V. M. Zolotarev, *One-dimensional stable distributions*, Transl. Math. Monogr., **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, x+284 pp.
8. Lingtao Kong, Hongshuai Dai, “Convergence rates in precise asymptotics for a kind of complete moment convergence”, *Stoch. Dyn.*, **17**:2 (2017), 1750015, 18 pp.
9. Б. А. Лифшиц, “О точности аппроксимации в центральной предельной теореме”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **21**:1 (1976), 107–122; англ. пер.: B. A. Lifshits, “On the accuracy of approximation in the central limit theorem”, *Theory Probab. Appl.*, **21**:1 (1976), 108–124.
10. Н. Г. де Брёйн, *Асимптотические методы в анализе*, ИЛ, М., 1961, 248 с.; пер. с англ.: N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, 2nd ed., Bibliotheca Mathematica, **4**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961, xii+200 pp.
11. Г. Крамер, *Математические методы статистики*, Мир, М., 1975, 648 с.; пер. с англ.: H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, Princeton Math. Ser., **9**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1946, xvi+575 pp.

Поступила в редакцию
29.X.2021

Исправленный вариант
17.II.2022