



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кановой, Обобщение одной теоремы
П. С. Новикова о сечениях борелевских мно-
жеств, *Матем. заметки*, 1983, том 33, вы-
пуск 2, 289–292

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

24 января 2025 г., 01:59:58



ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ П. С. НОВИКОВА О СЕЧЕНИЯХ БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановой

В статье П. С. Новикова [1] для произвольного плоского борелевского множества доказано, что совокупность всех точек этого множества, принадлежащих его замкнутым вертикальным сечениям, является CA -множеством. Мы докажем, что этот результат остается справедливым, если вместо замкнутых сечений рассматривать сечения, принадлежащие любому фиксированному классу борелевской иерархии.

Начнем с определений. Пространство Бэра I состоит из всех функций, определенных на множестве натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, со значениями в ω , т. е. из всех бесконечных последовательностей натуральных чисел [2]. Мы будем рассматривать подмножества бэровской плоскости I^2 , а не евклидовой плоскости OXY . Однако полученный результат нетрудно перенести на подмножества евклидовой плоскости, используя тот факт, что пространство Бэра гомеоморфно множеству всех иррациональных точек евклидовой прямой, см. [2].

Множества, которые можно получить из открытых в данном пространстве I^m (где $m \geq 1$) множеств с помощью операций счетного объединения, счетного пересечения и дополнения, называются борелевскими. Эти множества организованы в борелевскую иерархию, состоящую из классов Σ_α^0 , Π_α^0 , Δ_α^0 , определяемых для всякого ординала (порядкового числа) α , $1 \leq \alpha < \omega_1$, индукцией по α следующим образом:

Σ_1^0 есть совокупность всех открытых множеств;
 Π_α^0 есть совокупность всех дополнений множеств из Σ_α^0 ;
 Σ_α^0 (при $\alpha \geq 2$) есть совокупность всех счетных объединений множеств классов Π_β^0 с $\beta < \alpha$;

$$\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0.$$

Проекция на пространство I^m замкнутых множеств $P \subseteq I^{m+1}$ образуют класс Σ_1^1 -множеств (т. е. A -множеств в классической системе обозначений, принятой в [1]). Дополнения множеств класса Σ_1^1 называются Π_1^1 -множествами (или CA -множествами).

Пусть $P \subseteq I^2$. Каждой точке $x \in I$ сопоставим сечение

$$P_x = \{y \in I: \langle x, y \rangle \in P\}$$

множества P вертикальной прямой с абсциссой x . Для каждого класса K борелевской иерархии определим

$$P_{(K)} = \{\langle x, y \rangle \in P: P_x \in K\}$$

— совокупность всех точек множества P , лежащих на вертикальных сечениях этого множества, которые (сечения) принадлежат этому классу K .

ТЕОРЕМА. Пусть K — один из классов Σ_α^0 , Π_α^0 , Δ_α^0 . Тогда для каждого борелевского множества $P \subseteq I^2$, множество $P_{(K)}$ принадлежит классу Π_1^1 .

Доказательство теоремы использует кодировку борелевских множеств с помощью точек пространства I . Эта кодировка сопоставляет каждой точке f некоторого специального Π_1^1 -множества $W \subseteq I$ (множества борелевских кодов) множество $B_f \subseteq I$ следующим образом, см. [3]:

(1) Если $f(0) = 0$, то $B_f = U_{f(1)}$, где $\{U_i: i \in \omega\}$ есть некоторая раз навсегда фиксированная нумерация всех базовых открыто замкнутых в I множеств.

(2) Если $f(0) = 1$ и множество $B_{(f)_m}$ уже определено для всех $m \in \omega$, то $B_f = \bigcup_{m \in \omega} B_{(f)_m}$. Здесь $(f)_m \in I$ есть функция (точка I), определенная на ω условием

$$(f)_m(k) = f(2^m(2k+1)) \text{ для всех } k.$$

(3) Если $f(0) = 2$, $g(k+1) = f(k)$ для всех k , и множество B_g определено, то $B_f = I - B_g$.

Через W обозначается совокупность всех точек $f \in I$ таких, что можно определить множество $B_f \subseteq I$ в соответствии с условиями (1) — (3). Если $f \in W$, то множество B_f является борелевским. Обратно, каждое борелевское $B \subseteq I$ имеет вид B_f для подходящего кода $f \in W$.

Ключевым моментом доказательства теоремы является

ЛЕММА [4]. Множество $W (\Sigma_\alpha^0) = \{f \in W: B_f \in \Sigma_\alpha^0\}$ принадлежит классу Π_1^1 , каков бы ни был ординал $\alpha < \omega_1$.

Эта лемма влечет

С л е д с т в и е. Аналогичным образом определяемые множества $W (\Pi_\alpha^0)$ и $W (\Delta_\alpha^0)$ также все принадлежат классу Π_1^1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Каждой точке $g \in I$ сопоставим точку $2^\wedge g \in I$ равенствами $(2^\wedge g)(0) = 2$ и $(2^\wedge g)(k+1) = g(k)$. Тогда, очевидно,

$$W (\Pi_\alpha^0) = \{g \in I: 2^\wedge g \in W (\Sigma_\alpha^0),$$

откуда и из леммы следует $W (\Pi_\alpha^0) \in \Pi_1^1$. (Здесь используется тот факт, что класс Π_1^1 , как и всякий проективный или борелевский класс, замкнут относительно операции непрерывного прообраза, см., например, [5]; отображение $g \mapsto 2^\wedge g$, очевидно, непрерывно.)

Наконец, ясно, что $W (\Delta_\alpha^0) = W (\Sigma_\alpha^0) \cap W (\Pi_\alpha^0)$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Докажем, что каждое борелевское множество $P \subseteq I^2$ обладает следующим свойством:

(*) Найдется непрерывная функция $F: I \rightarrow W$ такая, что $P_x = B_{F(x)}$ для всех $x \in I$.

Борелевские подмножества I^2 получаются повторным применением операций счетного объединения и дополнения из базовых множеств вида $U_i \times U_j$. Поэтому нужно доказать, что

(а) каждое множество P вида $U_i \times U_j$ удовлетворяет (*),

(б) если $P \subseteq I^2$ удовлетворяет (*), то дополнение $I^2 - P$ также удовлетворяет (*), и наконец!

(в) если множества $P_0, P_1, P_2, \dots \subseteq I^2$ удовлетворяют (*), то их объединение P также удовлетворяет (*).

Если $P = U_i \times U_j$, то при $x \in I - U_i$ через $F(x)$ обозначаем точку $\omega \times \{0\}$ (предполагается, что U_0 — пустое множество), а при $x \in U_i$ через $F(x)$ обозначаем

точку $f \in I$ такую, что $f(1) = j$ и $f(k) = 0$ при $k \neq 1$. Построенная функция F доказывает (а).

Для доказательства (б) заметим, что если функция F обеспечивает (*) для множества P , то, определив $G(x) = 2 \wedge F(x)$ для всех $x \in I$, мы получим функцию G , искомую в смысле (*) для множества $I^2 - P$.

Наконец, если функции F_0, F_1, F_2, \dots обеспечивают (*) для множеств P_0, P_1, P_2, \dots , то следует для каждого $x \in I$ через $F(x)$ обозначить точку $f \in I$ такую, что $f(0) = 1$ и $(f)_m = F_m(x)$, $\forall m$ (эти соотношения задают f однозначно). Полученная функция F будет искомой для объединения множеств P_m .

Итак, в самом деле любое борелевское $P \subseteq I^2$ имеет свойство (*). В частности, некоторая непрерывная $F: I \rightarrow W$ обеспечивает (*) для множества P из условия теоремы. Теперь, каков бы ни был борелевский класс K , мы имеем равенство

$$P_{(K)} = \{ \langle x, y \rangle \in P : F(x) \in W(K) \},$$

которое в силу леммы и следствия и дает $P_{(K)} \in \Pi_1^1$.

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы проекция пр $P_{(K)}$ множества $P_{(K)}$ на первую ось является пересечением Π_1^1 -множества $\{x : F(x) \in W(K)\}$ с Σ_1^1 -множеством пр P . Таким образом, если дополнительно известно, что пр P — борелевское множество, то можно утверждать, что пр $P_{(K)} \in \Pi_1^1$.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
29.X.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н о в и к о в П. С., О проекциях некоторых В-множеств, Докл. АН СССР, 23 (1939), № 9, 863—864.
- [2] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., «Наука», 1977.
- [3] S o l o v a y R. M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math., 92 (1970), 1—56.
- [4] L o u v e a u A., La hierarchie Borelienne des ensembles Δ_1^1 , C. R. Acad. Sci. Paris, 285 (1977), 601—604.
- [5] К у р а т о в с к и й К., М о с т о в с к и й А., Теория множеств, М., «Мир», 1970.