

# Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа

А. А. Гончар, С. П. Суетин

## § 1. Введение

1. Теория аппроксимаций Паде – *локально наилучших рациональных аппроксимаций степенного ряда* – составляет важное направление в комплексном анализе и теории приближений. В XVIII–XIX вв. это направление развивалось, в основном, в рамках классической теории непрерывных дробей. Интерес к аппроксимациям Паде и более общим конструкциям рациональных аппроксимаций аналитических функций резко возрос во второй половине прошлого века. Благодаря современному развитию вычислительной техники такие аппроксимации нашли многочисленные применения в различных задачах математической физики, механики и прикладной математики. В свою очередь, анализ возникающих при этом математических проблем привел к новым задачам и результатам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов (см. [1], где имеется обширная библиография работ в рассматриваемом направлении).

Подчеркнем, что речь идет о приближениях рациональными функциями со *свободными* полюсами, а сами рассматриваемые аппроксимации – непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их различные обобщения – имеют *нелинейный* характер. Оптимальный выбор коэффициентов как числителей, так и знаменателей аппроксимаций Паде позволяет с их помощью *локализовать особенности* функции, заданной своим разложением в степенной ряд, и *осуществлять ее эффективное аналитическое продолжение* за пределы круга сходимости степенного ряда. В этом состоит принципиальное преимущество рассматриваемых рациональных

аппроксимаций перед полиномиальными приближениями и рациональными аппроксимациями с заранее *фиксированными* полюсами.

Настоящая работа посвящена асимптотическим свойствам диагональных аппроксимаций Паде для мероморфных функций марковского типа. Многие замечательные свойства аппроксимаций Паде и их обобщений были открыты сначала эмпирически в результате численных расчетов и лишь затем строго обоснованы. Именно так была сделана и эта работа: сначала с помощью компьютерных расчетов было обнаружено новое свойство, связанное с асимптотическим поведением полюсов диагональных аппроксимаций Паде, а затем, с целью доказательства того, что соответствующая закономерность имеет место в достаточно широком классе мероморфных функций, были получены новые формулы сильной асимптотики для диагональных аппроксимаций Паде и их знаменателей.

## 2. Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} \quad (1)$$

– степенной ряд с центром в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$ ,  $f_n = [n/n]_f$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – последовательность его диагональных<sup>1</sup> аппроксимаций Паде. В случае, когда все ганкелевы определители

$$H_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

отличны от нуля, ряду (1) с помощью классического алгоритма Евклида сопоставляется чебышевская непрерывная дробь [2]:

$$f \sim \frac{a_1}{z - b_1 - \frac{a_2}{z - b_2 - \dots}}, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Термин “диагональная последовательность” связан с тем, что такие аппроксимации составляют главную диагональ в общей *таблице Паде* ряда  $f$  (см. [1]).

$n$ -я подходящая дробь которой совпадает с  $f_n$  и обладает следующим характеристическим свойством:

$$(f - f_n)(z) = \frac{A_n}{z^{2n+1}} + \dots, \quad (3)$$

где  $A_n \neq 0$ . Тем самым, дробь (2) есть просто другая (эквивалентная) форма записи для последовательности  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

В общем случае удобно основываться на следующем определении  $n$ -й диагональной аппроксимации Паде ряда  $f$  (определение Фробениуса):  $f_n = P_n/Q_n$ , где  $P_n, Q_n$  – полиномы от  $z$ ,  $\deg P_n < \deg Q_n \leq n$  ( $Q_n \neq 0$ ) и выполняется соотношение

$$R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Этими условиями полиномы  $P_n$  и  $Q_n$  определяются не однозначно, но рациональная дробь  $f_n = P_n/Q_n$  единственна (с точностью до стандартного отождествления). Функция  $R_n$  называется *функцией остатка*. Для *нормальных* индексов  $n$  порядок рациональной функции  $f_n$  равен  $n$ . Тем самым, для таких  $n$  полиномы  $P_n$  и  $Q_n$ , удовлетворяющие условию (4), не имеют общих нулей,  $\deg Q_n = n$  и выполняется соотношение (3) (где, возможно,  $A_n = 0$ ). Каково бы ни было  $n$ , справедливо равенство  $f_n = f_{n_k}$ , где  $n_k$  – наибольший нормальный индекс, не превосходящий  $n$ . Тем самым, последовательность нормальных индексов  $\{n_k\} = \Lambda = \Lambda(f)$  для ряда  $f$  разбивает натуральный ряд чисел на множества  $\Lambda_k = \{n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$  такие, что  $f_n = f_{n_k}$  для  $n \in \Lambda_k$ . Такая структура последовательности  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  позволяет в вопросах сходимости диагональных аппроксимаций Паде ограничиться рассмотрением последовательности  $\{f_n\}_{n \in \Lambda}$ .

Для *марковской* функции

$$\hat{\sigma}(z) := \int \frac{d\sigma(x)}{z-x}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (5)$$

где  $\sigma$  – положительная борелевская мера с бесконечным носителем  $S = \text{Supp } \sigma \in \mathbb{R}$ , коэффициенты соответствующего ей ряда (1) совпадают с моментами меры  $\sigma$ :

$$c_n = \int x^n d\sigma(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом все определители  $H_n$  положительны, полиномы  $Q_n(z) = Q_n(z; \hat{\sigma})$  имеют степень  $n$  и при нормировке  $Q_n(z; \hat{\sigma}) = z^n + \dots$  определяются единственным образом:

$$Q_n(z; \hat{\sigma}) = \frac{1}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = z^n + \dots, \quad n = 1, \dots$$

Полиномы  $Q_n$  ортогональны по мере  $\sigma$ , при этом для функции остатка (4) справедливо представление

$$R_n(z) = \int \frac{Q_n(x) d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (6)$$

а для полиномов  $P_n$  – представление

$$P_n(z) = \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} d\sigma(x); \quad (7)$$

в теории ортогональных многочленов (6) принято называть функцией второго рода, а (7) – многочленами второго рода.

Классическая теорема Маркова [3] утверждает, что *для марковской функции  $\hat{\sigma}$  чебышевская непрерывная дробь (2) равномерно сходится внутри* (на компактных подмножествах) *области  $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$ , где  $[\alpha, \beta]$  – выпуклая оболочка  $S$ .*

**3.** В 1975 году в работе [4] одним из авторов настоящей статьи было получено обобщение теоремы Маркова на класс *мероморфных* функций вида

$$f = \hat{\sigma} + r, \quad (8)$$

где  $r$  – рациональная функция с комплексными коэффициентами ( $r$  – “рациональное возмущение” марковской функции  $\hat{\sigma}$ ). Основной результат работы [4] состоит в следующем<sup>2</sup>.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\sigma$  – положительная борелевская мера с носителем  $\text{Supp } \sigma = [\alpha, \beta]$ ,  $\sigma' > 0$  п.в. на  $[\alpha, \beta]$  и  $f = \hat{\sigma} + r$ , где

---

<sup>2</sup>В [4] мера  $\sigma$  предполагалась такой, что имеет место асимптотика отношения многочленов, ортогональных на  $[\alpha, \beta]$  относительно  $\sigma$ . Позднее Е. А. Рахмановым [5], [6] было показано, что при условии:  $\sigma' > 0$  п.в. на  $[\alpha, \beta]$ , эта асимптотика отношения имеет место.

$r$  – произвольная комплексная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области  $\mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$ , и  $r(\infty) = 0$ . Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к  $f$  равномерно в сферической метрике<sup>3</sup> внутри области  $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$ .

Из теоремы 1 вытекает, что к каждому полюсу функции  $f$  в  $D$  стремится (со скоростью геометрической прогрессии; см. ниже формулу (10)) ровно столько полюсов  $f_n$ , какова его кратность, а все предельные точки остальных полюсов лежат на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Отметим, что из указанного асимптотического поведения полюсов диагональных аппроксимаций Паде для формального ряда  $f$  уже вытекает равномерная сходимости последовательности  $f_n$  внутри области  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$  (в сферической метрике); тем самым, этот ряд определяет аналитическую функцию  $f$ , допускающую мероморфное продолжение во внешность отрезка  $[\alpha, \beta]$  (см. [7], [8]).

Таким образом, диагональные аппроксимации Паде в классе функций вида (8), заданных своими разложениями в степенной ряд (1), полностью решают задачу эффективного аналитического продолжения степенного ряда в область  $D = D_f$ : полюсы этих аппроксимаций локализуют как отрезок  $[\alpha, \beta] = \text{Supp } \sigma$ , так и полюсы  $f$  в  $D$  с учетом их кратностей, а сами аппроксимации  $f_n$  восстанавливают  $f$  внутри  $D$ .

Из теоремы 1 получаем следующее утверждение о скорости сходимости последовательности  $f_n$  к функции  $f$  в “проколотов” области  $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$ :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(f - f_n)(z)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(z)|^2}, \quad (9)$$

где  $\Phi$  – функция, отображающая внешность отрезка  $[\alpha, \beta]$  на внешность единичного круга с условием  $\Phi(\infty) = \infty$ .

Отсюда уже вытекает [4, § 2, п. 10], что полюсы  $f_n$  стремятся к полюсам  $f$  в  $D$  со скоростью геометрической прогрессии

---

<sup>3</sup>Имеется в виду, что за расстояние между двумя точками в комплексной плоскости принимается расстояние между соответствующими точками на сфере Римана.

(в дальнейшем – *геометрически*); при этом если  $a$  – полюс  $f$  кратности  $\mu \geq 1$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}}, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad |\Phi(a)| > 1; \quad (10)$$

здесь  $\zeta_{j,n}(a)$ ,  $j = 1, \dots, \mu$ , – полюсы<sup>4</sup>  $f_n$ , перенумерованные в порядке неубывания их расстояний до точки  $a$ .

В работе [4, § 2, п. 11] было отмечено, что как теорема 1, так и ее следствия остаются в силе для любых мероморфных в области  $D$  функций  $f$  (с конечным числом полюсов в  $D$ ), голоморфные составляющие  $f^*$  которых могут быть представлены в виде

$$f^*(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{s(x) d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in D,$$

где  $s$  – произвольная комплексная рациональная функция, все нули и полюсы которой принадлежат области  $D$ . В частности, это относится и к простейшим алгебраическим функциям вида

$$f(z) = \frac{r_1(z)}{w} + r_2(z), \quad (11)$$

где  $w = \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)}$ , при условии, что все полюсы рациональных функций  $r_1, r_2$  лежат в  $D$ ,  $r_1$  не имеет нулей на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и в  $D$  зафиксирована определенная ветвь квадратного корня.

**4.** В условиях теоремы 1 для функций вида (8) в (9) и (10) имеет место *точное равенство*; тем самым, в правой части (10) указан правильный показатель скорости сходимости полюсов  $f_n$  к полюсам  $f$  в области  $D$  (ср. [7], а также § 2, п. 3 ниже). В то же время соотношения такого типа дают информацию о поведении каждого из  $\mu$  полюсов аппроксимаций Паде по отдельности и не позволяют судить о том, какова “в целом” картина поведения  $\mu$  полюсов  $f_n$  в окрестности  $\mu$ -кратного полюса  $f$ . Для выяснения возможных закономерностей в асимптотическом поведении полюсов аппроксимаций Паде  $f_n$  в окрестности кратного полюса  $f$  мы провели соответствующие вычисления для конкретных примеров

<sup>4</sup>Как обычно, полюсы и нули функций считаются с учетом их кратностей.

функций вида (11). С помощью программы, написанной на языке FORTRAN и работающей под управлением операционной системы LINUX, были проведены вычисления (с точностью в 40 значащих цифр) нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде для функций вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} + r(z), \quad (12)$$

где  $r$  – вещественная рациональная функция, которая в одном случае имеет единственный полюс 10-й кратности в точке  $a > 1$ , а в другом – два полюса в точках  $a$  и  $\bar{a}$ ,  $\text{Im } a > 0$ , каждый 10-й кратности. В обоих случаях ветвь корня в (12) выбиралась так, что  $\sqrt{z^2 - 1} > 0$  при  $z > 1$ .

Результаты численного анализа рассматриваемой задачи (для достаточно больших  $n$ ) представлены на рис. 1–8. Сделаем необходимые пояснения. На рис. 1 изображены нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде  $f_{28}$  функции вида (12) для первого случая с  $a = 1.45$ . Часть нулей и полюсов локализует отрезок  $\Delta = [-1, 1]$ , при этом они перемежаются между собой. Остальные нули рациональной функции  $f_{28}$  локализуют *простые* нули функции  $f$  в области  $D$ . То, что эти нули простые, отчетливо видно из сравнения рис. 1 и рис. 3: расположение таких нулей для аппроксимаций Паде  $f_n$  очень быстро стабилизируется и при последовательных  $n = 21, 22, \dots, 33$  остается практически неизменным, так как в соответствии с (10) они стремятся к нулям  $f$  в  $D$  геометрически<sup>5</sup> (отметим, что расстояние между такими нулями  $f_n$ , локализующими простой нуль  $f$ , при двух последовательных значениях  $n = 42, 43$  уже оказывается порядка  $10^{-10}$ ). Такой же характер имеет сходимость полюсов  $f_n$  к простому полюсу  $f$ .

Иначе обстоит дело в случае *кратного* (здесь – 10-кратного) полюса  $f$ : как видно из рис. 2, все 10 полюсов  $f_n$  в окрестности этого полюса *простые*; они по-прежнему сходятся к полюсу  $f$  геометрически (см. рис. 3 и 4), но теперь в соответствии с формулой (10) общий показатель скорости сходимости  $|\Phi(a)|^{-2} < 1$  распределяется между 10-ю простыми полюсами рациональной дроби  $f_n$ , локализующими точку  $z = a$ . Более того, это распределение

<sup>5</sup>Это вытекает из очевидной связи между диагональными аппроксимациями Паде для функций  $f$  и  $1/f$ .

носит равномерный характер, а совокупность из этих 10-ти простых полюсов  $f_n$  ведет себя регулярно в целом: *асимптотически они располагаются в вершинах правильного 10-угольника*. В этом убеждают результаты расчетов, представленные на рис. 2, 4, 6, 8.

Основная *цель настоящей работы* – вывод формул *сильной асимптотики* (см. (22<sub>1</sub>)–(22<sub>3</sub>)) для знаменателей диагональных аппроксимаций Паде мероморфных функций марковского типа  $f = \hat{\sigma} + r$  при дополнительных ограничениях на  $\sigma$  (см. ниже § 2). На основе соответствующих формул в работе доказано, что в достаточно малой окрестности кратного полюса мероморфной функции  $f = \hat{\sigma} + r$  все полюсы рациональных функций  $f_n$  простые и ведут себя именно так, как было указано выше в связи с проведенными численными расчетами.

Доказательство этих результатов основано на свойствах  $\Psi$ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на двулистной римановой поверхности. В работе рассмотрен также случай, когда носитель  $\sigma$  состоит из *нескольких отрезков*.

Настоящая работа выполнена в рамках Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” и Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-1551.2003.1), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564) и фонда INTAS (грант № 03-51-6637).



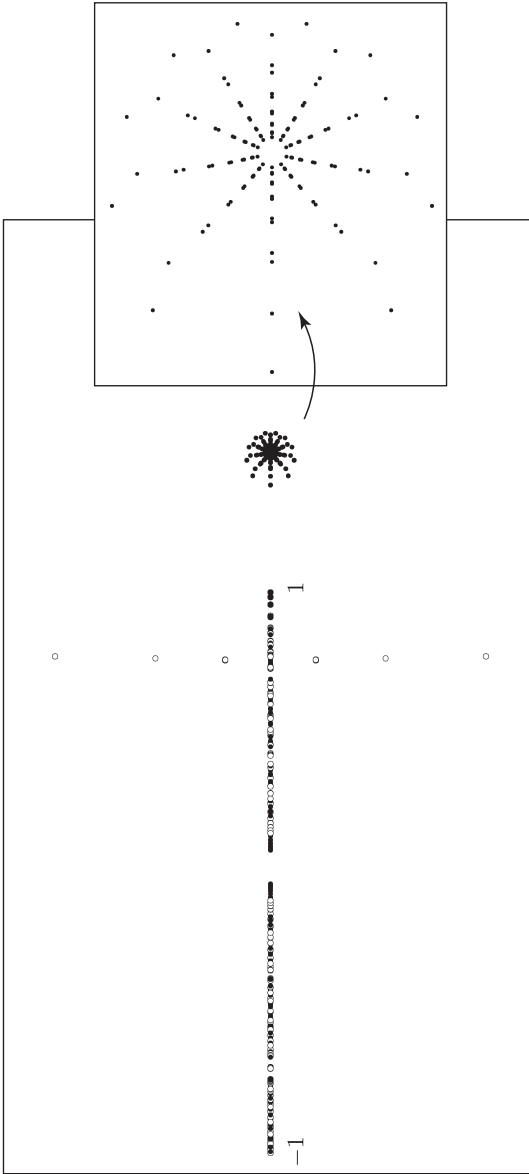


Рис. 3. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональных аппроксимаций Паде  $f_{21}, \dots, f_{33}$  для функции  $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$ , где  $r$  – вещественная рациональная функция с единственным полюсом в точке  $z = a$ ,  $a > 1$ , кратности 10. Основная часть нулей и полюсов функций  $f_{21}, \dots, f_{33}$  локализуется отрезок  $[-1, 1]$ . Оставшиеся нули и полюсы  $f_{21}, \dots, f_{33}$  локализуют соответственно простыми нули и 10-кратный полюс функции  $f$ , расположенные в дополнении к отрезку  $[-1, 1]$ .

Рис. 4 (справа). Полюсы диагональных аппроксимаций Паде  $f_{21}, \dots, f_{33}$ , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции  $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$ .

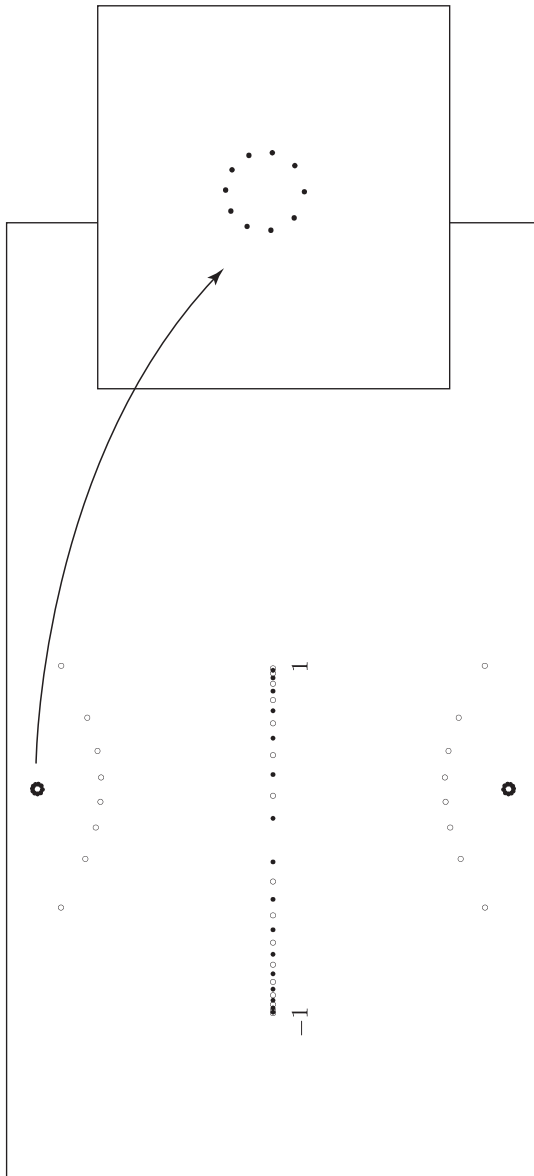


Рис. 5. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде  $f_{38}$  для функции  $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$ , где  $r$  – вещественная рациональная функция с двумя полюсами в точках  $z = a$  и  $z = \bar{a}$ ,  $\text{Im } a > 0$ , кратности 10 каждый. Основная часть нулей и полюсов функции  $f_{38}$  локализуется отрезок  $[-1, 1]$ , при этом они перемежаются между собой. Оставшиеся нули и полюсы  $f_{38}$  локализируют соответственно простые нули и два 10-кратных полюса функции  $f$ , расположенные в дополнении к отрезку  $[-1, 1]$ .

Рис. 6 (справа). Полюсы диагональной аппроксимации Паде  $f_{38}$ , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции  $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$ .

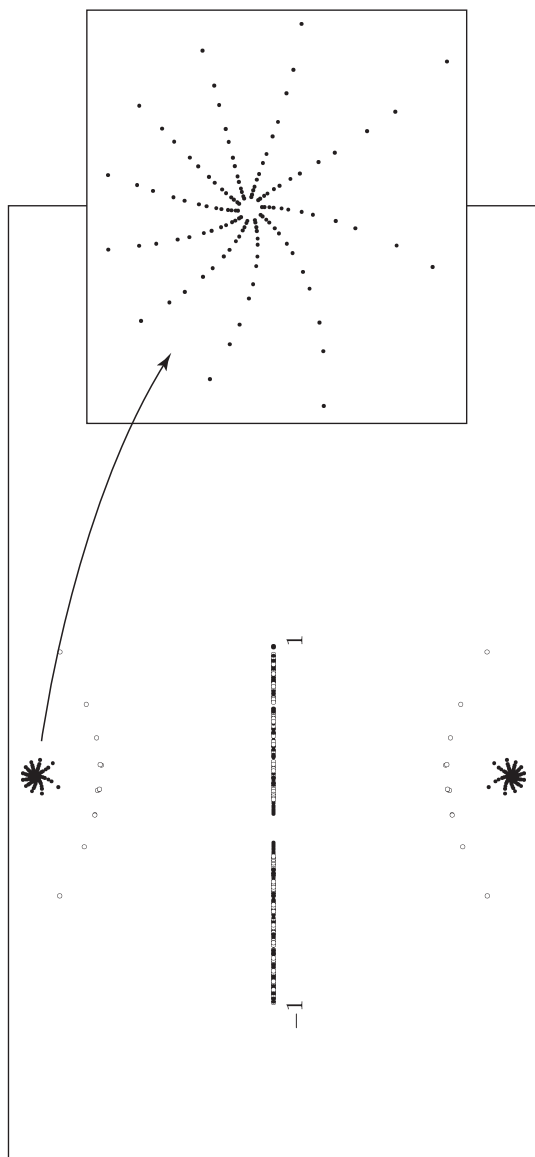


Рис. 7. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональных аппроксимаций Паде  $f_{31}, \dots, f_{43}$  для функции  $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$ , где  $r$  – вещественная рациональная функция с двумя полюсами в точках  $z = a$  и  $z = \bar{a}$ ,  $\text{Im } a > 0$ , кратности 10 каждый. Основная часть нулей и полюсов функций  $f_{31}, \dots, f_{43}$  локализует отрезок  $[-1, 1]$ . Оставшиеся нули и полюсы  $f_{31}, \dots, f_{43}$  локализируют соответственно простые нули и два 10-кратных полюса функции  $f$ , расположенные в дополнении к отрезку  $[-1, 1]$ .

Рис. 8 (справа). Полюсы диагональных аппроксимаций Паде  $f_{31}, \dots, f_{43}$ , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции  $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$ .

## § 2. Формулировка основных результатов

1. Всюду в дальнейшем полагаем  $\Delta = [-1, 1]$ ,  $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ . Мы будем рассматривать здесь *класс функций* вида

$$f = \widehat{\rho} + r, \quad (13)$$

где<sup>6</sup>

$$\widehat{\rho}(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (14)$$

*комплекснозначная* функция  $\rho$  голоморфна на отрезке  $\Delta$  и не обращается в нуль на этом отрезке, все полюсы комплексной рациональной функции  $r$  лежат в  $D$  и  $r(\infty) = 0$ . По традиции, восходящей к С. Н. Бернштейну [9], функцию  $\rho$  называют тригонометрическим весом; для краткости мы будем называть  $\rho$  просто *весом*. Очевидно, что класс функций (13) содержит функции вида (11) с  $w = \sqrt{z^2 - 1}$  и  $r_1 \neq 0, \infty$  на  $\Delta$ . Тем самым, все результаты настоящей работы справедливы и для таких простейших алгебраических функций.

В основе доказательства теоремы 1 в работе [4] лежит формула сравнительной асимптотики полиномов  $Q_n(z; \widehat{\sigma} + r)$  и  $Q_n(z; \widehat{\sigma})$  вне отрезка  $\Delta$ . Такая же формула (см. (20)) доказывается ниже для полиномов  $Q_n(z; f)$  и  $Q_n(z; \widehat{\rho})$  — знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функций вида (13) и (14). Эта формула является ключевой при доказательстве теоремы 2 — аналога теоремы 1 — и уже сама может рассматриваться как формула сильной асимптотики для полиномов  $Q_n(z; f)$ , но только *внутри области*  $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$ . В настоящей работе для исследования сильной асимптотики полюсов диагональных аппроксимаций Паде функций вида  $f = \widehat{\rho} + r$  в области  $D$  нам понадобится сильная асимптотика полиномов  $Q_n(z; f)$  как *вне* отрезка  $\Delta$ , так и *на* самом отрезке. Эти формулы сильной асимптотики будут получены в терминах, связанных с римановой поверхностью  $\mathfrak{X}$ :  $w^2 = z^2 - 1$ . Прежде чем формулировать основные результаты настоящей работы, приведем необходимые определения и обозначения, связанными с простейшими и хорошо известными конструкциями.

---

<sup>6</sup>Используемые нами обозначения  $\widehat{\sigma}$  и  $\widehat{\rho}$  для *меры*  $\sigma$  и *функции*  $\rho$  имеют разный смысл; ср. формулы (5) и (14). Однако из текста работы всегда ясно, какой из двух случаев имеется в виду.

Пусть  $\mathfrak{R}$  – риманова поверхность, заданная уравнением  $w^2 = z^2 - 1$ . Будем считать, что  $\mathfrak{R}$  реализована как двулистное разветвленное в точках  $z = \pm 1$  накрытие расширенной комплексной плоскости  $\hat{\mathbb{C}}$ . Два листа  $\mathfrak{R}$  – это два экземпляра  $\hat{\mathbb{C}}$ , разрезанных по отрезку  $\Delta$  и склеенных затем накрест так, что верхнему берегу одного отрезка соответствует нижний берег другого. Тем самым, над каждой точкой  $\hat{\mathbb{C}}$  за исключением точек ветвления  $z = \pm 1$  лежат ровно две точки римановой поверхности, а отрезку  $\Delta$  соответствует на  $\mathfrak{R}$  замкнутый цикл  $\Gamma$ . Будем считать, что в  $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$  выбрана ветвь корня  $\sqrt{z^2 - 1}$ , удовлетворяющая условию  $\sqrt{z^2 - 1}/z \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ . Функция  $w: w^2 = z^2 - 1$  однозначна на  $\mathfrak{R}$ . Первым (открытым) листом  $D^{(1)}$  поверхности  $\mathfrak{R}$  будем считать тот, на котором  $w = \sqrt{z^2 - 1}$ . На втором листе  $D^{(2)}$  имеем:  $w = -\sqrt{z^2 - 1}$ . Для точек римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  будем использовать обозначение  $\mathbf{z} = (z, w)$ , где  $w = \pm\sqrt{z^2 - 1}$ ; при этом для точек первого листа  $z^{(1)} = (z, \sqrt{z^2 - 1})$ , а для точек второго  $z^{(2)} = (z, -\sqrt{z^2 - 1})$ . Область  $D^{(1)}$  будем, как правило, отождествлять с “физической” областью  $D$ . Пусть  $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$  – функция, обратная к функции Жуковского. Тогда  $\Phi$  однозначна в  $D$  и продолжается на всю риманову поверхность  $\mathfrak{R}$  как однозначная мероморфная функция,  $\Phi(\mathbf{z}) = z + w \in \mathbb{C}(z, w)$ , с дивизором  $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$ .

Риманова поверхность  $\mathfrak{R}$  – нулевого рода, поэтому на  $\mathfrak{R}$  разрешим любой дивизор нулевой степени. Для дивизора вида  $a^{(1)} - b^{(2)}$ , где  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ , легко указать явно функцию  $\Phi_{a,b} \in \mathbb{C}(z, w)$  такую, что  $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$ :

$$\Phi_{a,b}(\mathbf{z}) = \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b)}{z - b} \frac{z - a}{1 - \Phi(a)\Phi(\mathbf{z})}; \quad (15)$$

при  $a = \infty$  или  $b = \infty$  формула для соответствующей функции  $\Phi_{a,b}$  получается предельным переходом в (15). Очевидно, что произвольному дивизору нулевой степени на  $\mathfrak{R}$  будет соответствовать произведение функций вида (15).

Функции Грина  $g_D(z, \infty) = \log |\Phi(z)|$  области  $D$  соответствует комплексная функция Грина  $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + ig_D^*(z, \infty)$ , где  $g_D^*(z, \infty)$  – гармонически сопряженная к  $g_D(z, \infty)$  функция. Функция  $G(z) = G_D(z, \infty)$  имеет в бесконечно удаленной точке ветвление логарифмического характера, однозначна по модулю  $2\pi i$  и представляется в виде

$$G(z) = \log \Phi(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad \zeta \in D,$$

где интегрирование – по любому пути, лежащему в  $D$ .

Используемый здесь подход к изучению асимптотических свойств знаменателей диагональных аппроксимаций Паде  $Q_n(z; f)$  основан на свойствах  $\Psi$ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на двулистной римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ . Такой подход берет начало с работ Н. И. Ахиезера [10]–[12] и был затем развит в работах Дж. Наттолла [13], [14] и С. П. Суетина [15]–[17] прежде всего – с целью изучения вопросов сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций и их естественных обобщений. Отметим также работу А. И. Аптекарева [18], посвященную вопросам изучения сильной асимптотики рациональных аппроксимаций аналитических функций, где применяется метод, основанный, в частности, на свойствах решения краевой задачи Римана подобного типа.

Как правило, наиболее общее условие на вес  $\rho$  для применимости такого подхода – это условие Гёльдера. В настоящей работе для простоты мы изучаем случай, когда вес  $\rho$  – голоморфная функция на отрезке  $\Delta$  ( $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$ ).

**2.** Рассмотрим сначала ряд (1) для функции  $f = \hat{\rho}$ , где  $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$  и  $\rho(x) \neq 0$  на  $\Delta$ . Зафиксируем произвольное  $n \in \mathbb{N}$  и рассмотрим на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  следующую краевую задачу Римана.

**ЗАДАЧА ( $\mathcal{R}_1$ ).** При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  найти функцию  $\Psi = \Psi_n$  такую, что:

- 1°.  $\Psi$  (кусочно) мероморфна на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$ ;
- 2°. дивизор  $(\Psi) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)}$ ;
- 3°. на  $\Gamma$  выполнено краевое условие:  $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$ .

Здесь под  $\Psi(\mathbf{x}+)$  понимаются предельные значения функции  $\Psi(\zeta)$  при  $D^{(1)} \ni \zeta \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ . Аналогичный смысл придается и  $\Psi(\mathbf{x}-)$ .

Так как род  $\mathfrak{R}$  равен нулю и  $\deg(\Psi) = 0$ , то задача ( $\mathcal{R}_1$ ) распадается на две независимые задачи, соответствующие п. 2° и п. 3°. Стандартными методами (см., например, [16]) доказывается, что такая функция  $\Psi$  всегда существует и определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной. Нетрудно найти и явный вид этой функции:

$$\Psi(z) = \Phi(z)^n e^{S(z)} = e^{nG(z)+S(z)} \quad \text{при } \mathbf{z} = z^{(1)}, \quad (16)$$

где

$$S(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (17)$$

– функция Сегё. Из свойств  $\Psi$ -функции вытекает, что

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \neq 0$$

при  $z \in D$ . Тем самым, это произведение продолжается как постоянная функция на всю комплексную плоскость  $\widehat{\mathbb{C}}$ . В дальнейшем нам удобно ввести следующую нормировку<sup>7</sup>:  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv 1$  при  $z \in D$ . Последнее соотношение в совокупности с (16), (17) приводит к явной формуле для  $\Psi$ -функции и при  $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$ .

При подходящей нормировке (подробнее см. ниже § 3, п. 3) полиномов  $Q_n(z; \widehat{\rho})$  – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции  $f = \widehat{\rho}$  – их сильная асимптотика как вне отрезка  $\Delta$ , так и на этом отрезке описывается в терминах  $\Psi$ -функции следующим образом.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Пусть комплекснозначная функция  $\rho$  голоморфна и не обращается в нуль на отрезке  $\Delta$ ,  $\Psi$  – решение задачи  $(\mathcal{R}_1)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при подходящей нормировке полиномов  $Q_n(z; \widehat{\rho})$  имеем:

- 1°.  $Q_n(z; \widehat{\rho}) = \Psi(z)(1 + o(1))$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно внутри  $D$ ;
- 2°.  $Q_n(x; \widehat{\rho}) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $\Delta$ .

Здесь  $\Psi(z) = \Psi(z^{(1)})$ , под  $\Psi^+(x)$  ( $\Psi^-(x)$ ) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения  $\Psi$  на  $\Delta$ ; величина  $o(1) = o(\delta^n)$ , где  $\delta < 1$ . Из п. 2° задачи  $(\mathcal{R}_1)$  вытекает, что функция  $\Psi$ , решающая эту задачу, имеет в бесконечно удаленной точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  полюс  $n$ -го порядка. Поэтому в силу п. 1° предложения 1 для всех достаточно больших  $n$  степень полинома  $Q_n(z; \widehat{\rho})$  равна  $n$ , т.е. все такие индексы нормальны. Непосредственно из представления (16) для  $\Psi$ -функции вытекает, что существует

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi(z)}{z^n} = \varkappa_n, \quad \text{где } \varkappa_n = 2^n e^{S(\infty)} \neq 0. \quad (18)$$

---

<sup>7</sup>Таким условием  $\Psi$ -функция определяется однозначно с точностью до знака  $\pm$ . В дальнейшем мы уточним правило выбора знака.

Тем самым, формула сильной асимптотики из п. 1° задает следующую естественную нормировку полиномов  $Q_n$ :

$$Q_n(z; \hat{\rho}) = \varkappa_n z^n + \dots,$$

где  $\varkappa_n \neq 0$  задано (18). Наконец, из п. 2° вытекает, что

$$\int_{\Delta} Q_n^2(x; \hat{\rho}) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

а если вес  $\rho$  положителен на  $\Delta$ , то равномерно на  $\Delta$

$$Q_n(x; \hat{\rho}) = \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x)) + o(1),$$

где

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad o(1) = o(\delta^n).$$

Предложение 1 и его следствия хорошо известны (см., например, [13] и [14]). В §3 настоящей работы для полноты изложения приводится его независимое доказательство (ср. с доказательством теоремы 2.1 в [14]).

**3.** Прежде чем переходить непосредственно к вопросу о сильной асимптотике полиномов  $Q_n(z; f)$ ,  $f = \hat{\rho} + r$ , сформулируем аналог теоремы 1 для изучаемого нами случая.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $f = \hat{\rho} + r$ , где комплекснозначная функция  $\rho$  голоморфна и не обращается в нуль на отрезке  $\Delta$ , все полюсы комплексной рациональной функции  $r$  лежат в области  $D$  и  $r(\infty) = 0$ . Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к  $f$  равномерно в сферической метрике внутри области  $D$ .

Тем самым, к каждому полюсу функции  $f$  в  $D$  стремится ровно столько полюсов  $f_n$ , какова его кратность. При этом если  $a$  – полюс  $f$  кратности  $\mu \geq 1$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}} < 1, \quad j = 1, \dots, \mu;$$

здесь  $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$  – функция, обратная к функции Жукковского,  $\zeta_{j,n}(a)$ ,  $j = 1, \dots, \mu$ , – полюсы  $f_n$ , перенумерованные в порядке неубывания их расстояния до точки  $a$ .

Доказательство теоремы 2 проводится (см. ниже § 4) по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 в работе [4]; в частности, утверждение об асимптотике полюсов  $f_n$  в  $D$  немедленно следует из полученной в § 4 формулы *сравнительной асимптотики* для подходящим образом нормированных полиномов  $Q_n(z; \widehat{\rho})$  и  $Q_n(z; \widehat{\rho} + r)$ , которая выполняется равномерно внутри  $D$ :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n(z; \widehat{\rho} + r)}{Q_n(z; \widehat{\rho})} = \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(z)\Phi(a_j)} \right)^{m_j}, \quad (20)$$

где  $\Lambda = \Lambda(f)$  – последовательность нормальных индексов для  $f = \widehat{\rho} + r$ ,  $a_1, \dots, a_\ell$  – полюсы  $f$  в  $D$ ,  $m_1, \dots, m_\ell$  – их кратности,  $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$  – полное число полюсов  $f$  в  $D$ . Соотношение (20) является ключевым и при доказательстве теоремы 2; с учетом предложения 1 оно само уже может рассматриваться как формула сильной асимптотики для полиномов  $Q_n(z; f)$ , но – по *подпоследовательности* нормальных индексов  $\Lambda$  и только *внутри* области  $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$ . Для доказательства основного результата работы (см. ниже теорему 3) нам, во-первых, надо показать, что все достаточно далекие индексы  $n$  нормальны, а во-вторых, установить формулу сильной асимптотики для полиномов  $Q_n(z; f)$  не только внутри  $D'$ , но и *на отрезке*  $\Delta$ , и, в конечном счете, *в окрестности полюсов* функции  $f$  в  $D$ . Для этого мы применим подход, основанный, как и в случае полиномов  $Q_n(z; \widehat{\rho})$ , на свойствах  $\Psi$ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ . Подчеркнем, что сильную асимптотику  $Q_n(z; f)$  можно выразить непосредственно в терминах этой  $\Psi$ -функции только *внутри области*  $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$  и *на отрезке*  $\Delta$ . Зато, пользуясь этими результатами, мы затем найдем сильную асимптотику тех нулей  $Q_n(z; f)$  (т.е. полюсов  $f_n$ ), которые стремятся к полюсам  $f$  в  $D$ . Полученные в итоге формулы (см. ниже формулы (22<sub>1</sub>)–(22<sub>3</sub>)) и следует *в совокупности* рассматривать как формулы сильной асимптотики для  $Q_n(z; f)$ .

Рассмотрим на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА ( $\mathcal{R}_2$ ). При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  найти функцию  $\Psi = \Psi_n$  такую, что:

- 1°.  $\Psi$  (кусочно) мероморфна на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$ ;
- 2°. дивизор  $(\Psi) = n\infty^{(2)} + m_1 a_1^{(1)} + \dots + m_\ell a_\ell^{(1)} - m_1 a_1^{(2)} - \dots - m_\ell a_\ell^{(2)} - n\infty^{(1)}$ ;
- 3°. на  $\Gamma$  выполнено краевое условие:  $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$ .

(Здесь предполагается, что все точки  $a_j \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ .)

Подчеркнем еще раз, что непосредственно в терминах  $\Psi$ -функции, решающей задачу ( $\mathcal{R}_2$ ), оказывается возможным описать сильную асимптотику  $Q_n(z, f)$  как на отрезке  $\Delta$ , так и внутри области  $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$ .

Так как в рассматриваемом здесь случае род римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  равен нулю и  $\deg(\Psi) = 0$ , то задача ( $\mathcal{R}_2$ ), как и задача ( $\mathcal{R}_1$ ), распадается на независимые задачи, соответствующие п. 2° и п. 3°. Каждая из них решается явно в терминах, связанных с  $\mathfrak{R}$ . Таким образом, решение задачи ( $\mathcal{R}_2$ ) всегда существует, единственно (с точностью до мультипликативной постоянной) и может быть найдено в явном виде. Зависимость  $\Psi$ -функции от  $n$  связана только с условием 2°. Нетрудно увидеть, что при  $z \in D$  функция  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const}$ , где  $\text{const} \neq 0$ . В дальнейшем нам удобно как обычно положить  $\text{const} = 1$ , т.е. нормировать  $\Psi$ -функцию (как и ранее, с точностью до знака  $\pm$ ) стандартным условием

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv 1.$$

Приведем явный вид решения задачи ( $\mathcal{R}_2$ ) при  $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$ :

$$\Psi(z) = \Phi(z)^n e^{S(z)} \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)} \right)^{m_j} = e^{nG(z)+S(z)} \Pi_m(z), \quad (21)$$

где  $S(z)$  – функция Серё (17).

В терминах  $\Psi$ -функции, решающей задачу ( $\mathcal{R}_2$ ), асимптотическое поведение полиномов  $Q_n(z; f)$  описывается следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть в условиях теоремы 2 точки  $a_1, \dots, a_\ell$  – полюсы  $f$  в  $D$ ,  $m_1, \dots, m_\ell$  – их кратности,  $\Psi$  – решение задачи ( $\mathcal{R}_2$ ) при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при подходящей нормировке полиномов  $Q_n(z; f)$  имеем:

$$1^\circ. Q_n(z; f) = \Psi(z)(1+o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D', \quad (22_1)$$

$$2^\circ. Q_n(x; f) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } \Delta, \quad (22_2)$$

где  $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$ , величина  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ .

Непосредственно из п. 1° этого предложения и свойств  $\Psi$ -функции, решающей задачу  $(\mathcal{R}_2)$ , вытекает, что  $\deg Q_n(z; f) = n$  для достаточно больших  $n$ , т.е. для функции  $f$  все достаточно большие индексы  $n$  нормальны.

Полученная в п. 2° предложения 2 формула сильной асимптотики полиномов  $Q_n(x; f)$  на отрезке  $\Delta$  лежит в основе доказательства следующего утверждения об асимптотическом поведении полюсов  $f_n$  вне отрезка  $\Delta$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть в условиях теоремы 2 точка  $a_j \in D$  – полюс функции  $f$  кратности  $m_j \geq 1$ ,  $a_{j,\nu}(n)$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ , – соответствующие точке  $a_j$  при  $n \rightarrow \infty$  полюсы  $f_n$ . Тогда

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1+o(\delta^n)) \text{ при } n \rightarrow \infty, \nu = 1, \dots, m_j, \quad (22_3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\ B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = |\Phi(a_j)|^{1/m_j} e^{ig^*(a_j)/m_j}, \\ C_j &= e^{-2S(a_j)/m_j} \left( -\frac{2G'(a_j)}{A_j \alpha_j} \right)^{1/m_j} \\ &\quad \times \frac{(-2)^{m/m_j} \Phi(a_j)^{m/m_j} \prod_{s=1}^{\ell} \Phi(a_s)^{m_s/m_j}}{\prod_{s=1}^{\ell} (1 - \Phi(a_s)\Phi(a_j))^{2m_s/m_j}}; \end{aligned}$$

комплексные постоянные  $A_j$  и  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , конечны, отличны от нуля и зависят только от  $f$ .

Здесь  $g^*(z) = g_D^*(z, \infty)$  – функция, сопряженная к функции Грина  $g_D(z, \infty)$  области  $D$ ,  $G(z) = G_D(z, \infty)$  – комплексная функция Грина;  $S(z)$  – функция Сегё.

Постоянная  $C_j$  связана с геометрическим расположением  $j$ -го полюса  $a_j$  функции  $f$  относительно отрезка  $\Delta$  и других полюсов  $f$ ; величина  $1/B_j$  характеризует (геометрическую) скорость

сходимости полюсов  $f_n$  к точке  $a_j$  и не зависит от других полюсов  $f$ ; наличие множителя  $\varepsilon_j$ ,  $\varepsilon_j^{m_j} = 1$ , обеспечивает то асимптотически правильное расположение  $m_j$  полюсов  $f_n$  по отношению к притягивающей точке  $a_j$ , о котором говорилось во введении. Непосредственно из (22<sub>3</sub>) вытекает, что при каждом  $j = 1, \dots, \ell$  существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_j - a_{j,\nu}(n)|^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(a_j)|^{2/m_j}}, \quad \nu = 1, \dots, m_j;$$

тем самым, в правой части (10) указан правильный показатель скорости сходимости полюсов  $f_n$  к полюсам  $f$  в  $D$ .

Из теоремы 3 вытекают следующие результаты.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *В классе функций вида  $f = \hat{\rho} + r$ , где функция  $\rho$  голоморфна и не обращается в нуль на отрезке  $\Delta$ , а все полюсы комплексной рациональной функции  $r$  лежат в области  $D$  и  $r(\infty) = 0$ , справедлива импликация*

$$\begin{aligned} (f - f_n)(z) &= \frac{A}{z^{2n+1}} + \dots \\ &\Downarrow \\ (f - f_n)(z) &= \frac{2G'(z)}{\Psi(z)^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

равномерно внутри  $D'$ ,

где  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – рациональная функция порядка не выше  $n$ ,  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ .

Соотношение (23) приводит к формуле сильной асимптотики для последовательности  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$f_n(z) = f(z) - \frac{2G'(z)}{\Psi(z)^2} (1 + o(1))$$

равномерно внутри  $D'$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *Пусть в условиях теоремы 2 вес  $\rho$  положителен на  $\Delta$ , а рациональная функция  $r$  вещественна. Тогда для всех достаточно больших  $n$  все полюсы диагональных аппроксимаций Паде функции  $f = \hat{\rho} + r$  простые.*

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в условиях теоремы 2 вес  $\rho > 0$  на  $\Delta$ ,  $f = \hat{\rho} + r$ ,  $r \in \mathbb{R}(z)$ . Тогда равномерно на  $\Delta$

$$Q_n(x; f) = \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x) + \alpha(x)) + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \\ \cos \alpha(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{e^{i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{i \arccos x}} \right)^{m_j} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{e^{-i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{-i \arccos x}} \right)^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

В заключение сделаем общее замечание относительно используемого здесь метода, основанного на свойствах  $\Psi$ -функции – решении специальной краевой задачи Римана. Такая задача рассматривается при фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  (см. задачи  $(\mathcal{R}_1)$  и  $(\mathcal{R}_2)$ ), а ее решение находится в явном виде в терминах римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  и веса  $\rho$  (см. (16) и (21)). Отсюда следует, что этот метод пригоден и для нахождения формул сильной асимптотики в случае переменного (т.е. зависящего от  $n$ ) веса  $\rho = \rho_n$ : в явную формулу для  $\Psi$ -функции вместо веса  $\rho_n$  надо подставить выражение, описывающее его зависимость от  $n$  (см. [18]). Кроме того, метод оказывается применим и в случае, когда в (5) носитель  $S$  меры  $\sigma$  состоит из нескольких отрезков (подробнее см. ниже § 7).

### § 3. Доказательство предложения 1

1. Пусть  $\Psi$  – решение задачи  $(\mathcal{R}_1)$  при некотором  $n \in \mathbb{N}$ , полином  $Q_n(z) = Q_n(z; \hat{\rho})$ ,  $\deg Q_n \leq n$ ,  $Q_n \not\equiv 0$ , удовлетворяет соотношению

$$R_n(z; \hat{\rho}) := (Q_n \hat{\rho} - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где  $\deg P_n \leq n - 1$ ,  $R_n(z) = R_n(z; \hat{\rho})$  – функция остатка.

Определим на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$  функцию  $F$  следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ -2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}; \end{cases} \quad (24)$$

нетрудно видеть, что  $F$  (кусочно) голоморфна в  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ .

Используя свойства  $\Psi$ -функции как решения задачи  $(\mathcal{R}_1)$  и свойства функции остатка  $R_n$  на границе отрезка  $\Delta$ :  $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$ , получаем следующее краевое условие для  $F$  на кривой  $\Gamma$ :

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (25)$$

где функция  $\chi(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ , голоморфна на втором листе<sup>8</sup>. При этих условиях  $F$  стандартным образом [20, § 8, формула (8.16)] восстанавливается в  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$  по граничным условиям (25) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (26)$$

где  $C_n$  – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (27)$$

– мероморфный на  $\mathfrak{R}$  абелев дифференциал, который имеет полюсы только в точках  $\mathbf{z}$ ,  $\infty^{(1)}$ ,  $\infty^{(2)}$  с вычетами  $1$ ,  $-1/2$ ,  $-1/2$  соответственно, а контур  $\Gamma^+$  ориентирован положительно относительно области  $D^{(1)}$ : область остается слева при обходе по контуру. Интегральное представление (26) лежит в основе дальнейших рассуждений.

**2.** Пусть сначала  $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$ . Выберем числа  $R > 1$  и  $\varepsilon > 0$  так, чтобы функции  $\chi$  и  $1/\rho$  были бы голоморфны в области  $\{z^{(2)} : 1 < |\Phi(z)| < R + \varepsilon\}$ . Тогда (при  $\mathbf{z} = z^{(1)}$ ) в интегральном представлении (26) контур  $\Gamma$  можно заменить на контур

---

<sup>8</sup>Как и ранее, под  $F(\zeta+)$  здесь понимаются предельные значения функции  $F(\mathbf{z})$  при  $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \zeta \in \Gamma$ . Аналогичный смысл придается  $F(\zeta-)$  и  $\chi(\zeta-)$ .

$\Gamma_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| = R\}$ , целиком лежащий на втором листе  $D^{(2)}$ . Воспользуемся теперь тем, что

$$\chi(z^{(2)}) = \Psi(z^{(2)})R_n(z)w(z^{(2)}) = -F(z^{(1)})\frac{\Psi(z^{(2)})}{\Psi(z^{(1)})} = -\frac{F(z^{(1)})}{\Psi(z^{(1)})^2}$$

и  $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$  (см. (27)). Тогда из (26) получаем следующее представление для функции  $F$ :

$$\begin{aligned} F(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F(\zeta^{(1)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + C_n, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\Gamma_R^{(1)} = \{\zeta^{(1)} : |\Phi(\zeta)| = R\}$ . При  $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$  дифференциал (27) имеет вид:

$$d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) - w(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)};$$

следовательно, это – голоморфный по переменной  $z^{(2)}$  в области  $D^{(2)}$  дифференциал. Более того, дифференциал  $d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z})$  – голоморфный по  $\mathbf{z}$  на компакте  $D^{(2)} \sqcup \Gamma$  при  $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$ . Поэтому представление (28) справедливо<sup>9</sup> при  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$ . Из (28) получаем, что равномерно на компакте  $D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{1}{|\Psi(\zeta^{(1)})|^2} O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

где  $M_n = \max_{\Gamma_R^{(1)}} |F(\zeta^{(1)})|$ . Следовательно, равномерно по  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

где  $\delta = 1/R^2 < 1$ . Так как  $F(z^{(1)}) \not\equiv 0$  (см. (24)), то  $M_n \neq 0$ , поэтому, применяя (30) сначала к компакту  $\Gamma_R^{(1)} \subset D^{(1)}$ , а затем

---

<sup>9</sup>Интегральная формула (28) задает аналитическое продолжение функции  $F(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ , через контур  $\Gamma$  на второй лист римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  вплоть до контура  $\Gamma_R^{(2)}$ , причем для  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$  это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией  $F(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ , определенной в (24); ср. с доказательством теоремы 2.1 в [14].

к компактму  $D^{(1)} \sqcup \Gamma$ , последовательно получаем:

$$\begin{aligned} M_n &= |C_n|(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \\ F(\mathbf{z}) &= C_n(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \\ &\quad \text{равномерно по } \mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

**3.** Пусть теперь  $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$ . Тогда из (26) вытекает, что при  $z^{(2)} \in D_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| > R\}$

$$\begin{aligned} F(z^{(2)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F(\zeta^{(1)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + C_n; \end{aligned} \quad (32)$$

здесь мы воспользовались тем, что  $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$ . Дифференциал  $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$  – голоморфный по  $z^{(1)} \in D_R^{(1)}$  при  $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$ . Используя свойства  $\Psi$ -функции и полученное выше асимптотическое представление (31) для функции  $F(z^{(1)})$ , получаем из (32) аналог соотношения (31) для  $F(z^{(2)})$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$F(z^{(2)}) = C_n(1 + O(\delta_1^n)) \quad (33)$$

равномерно внутри  $D_R^{(2)}$ , где  $\delta_1 < 1$ . Отсюда и из определения (24) функции  $F$  вытекает, что равномерно внутри  $D_R$  справедливо представление

$$2Q_n(z) = -\frac{C_n}{\Psi(z^{(2)})} (1 + o(1)) = -C_n \Psi(z)(1 + o(1)), \quad (34)$$

$$\text{где } o(1) = O(\delta_1^n), \quad \delta_1 < 1.$$

Напомним, что

$$\frac{\Psi(z)}{z^n} \rightarrow \varkappa_n \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где  $\varkappa_n = 2^n \exp\{S(\infty)\} \neq 0$ , т.е.  $\Psi$  имеет в точке  $z = \infty$  полюс  $n$ -го порядка. Так как постоянная  $C_n \neq 0$  при достаточно больших  $n$  (см. (31)), то  $\deg Q_n = n$ , т.е. все достаточно далекие индексы  $n$  нормальны. Выбор постоянной  $C_n \neq 0$  связан только с нормировкой  $Q_n$ . Положим  $C_n = -2$ . В таком случае асимптотическая формула (34) для полиномов  $Q_n$  вне отрезка  $\Delta$  примет вид:

$$Q_n(z) = \Psi(z)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (35)$$

где  $o(1) = O(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ .

4. Вернемся теперь к соотношению  $F(\mathbf{z}) = C_n(1 + o(1)) = -2 + o(1)$ , которое справедливо равномерно на компакте  $D^{(1)} \sqcup \Gamma$  и, следовательно, равномерно на  $\Gamma$ . Из этого соотношения в силу определения функции  $F$  вытекает, что равномерно по  $x \in \Delta$

$$\begin{aligned} \Psi^+(x)R_n^+(x)w^+(x) &= -2 + o(1), \\ \Psi^-(x)R_n^-(x)w^-(x) &= -2 + o(1) \end{aligned} \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как  $\Psi^+(x) \neq 0$  и  $\Psi^-(x) \neq 0$  на  $\Delta$ , то

$$\begin{aligned} R_n^+(x)w^+(x) &= -\frac{2}{\Psi^+(x)}(1 + o(1)), \\ R_n^-(x)w^-(x) &= -\frac{2}{\Psi^-(x)}(1 + o(1)), \end{aligned} \quad n \rightarrow \infty.$$

Суммируя два последних соотношения, получаем

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -\frac{2}{\Psi^+(x)} - \frac{2}{\Psi^-(x)} + o(1). \quad (36)$$

Поскольку  $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$  при  $x \in \Delta$ , то

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x). \quad (37)$$

Объединяя соотношения (36) и (37), получаем, что

$$Q_n(x)\rho(x) = \frac{1}{\Psi^+(x)} + \frac{1}{\Psi^-(x)} + o(1).$$

Так как  $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$  при  $x \in \Delta$ , то

$$Q_n(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$$

равномерно по  $x \in \Delta$ , где  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ .

Предложение 1 доказано.

## § 4. Доказательство теоремы 2

1. Схема доказательства теоремы 1, предложенная в [4] для *положительной меры*  $\sigma$ , является достаточно общей и при условии существования сильной асимптотики (35) позволяет получить аналог теоремы 1 для *комплексного веса*  $\rho$ . Ниже мы приводим доказательство теоремы 2, следуя в целом схеме рассуждений работы [4].

В этом параграфе мы будем придерживаться следующего соглашения при обозначении полюсов функции  $f$  в  $D$ :  $a_j, j = 1, \dots, \ell$ , – попарно различные полюсы  $f$  кратностей  $m_j \geq 1$  соответственно,  $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$  – полное число полюсов  $f$  в  $D$  с учетом их кратностей.

Пусть функция  $f = \widehat{\rho} + r$ , где

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (38)$$

$$r(z) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(k-1)!} \frac{1}{(z-a_j)^k}, \quad (39)$$

здесь  $A_{j,m_j} \neq 0$ .

Так как для функции  $\widehat{\rho}$  все достаточно далекие индексы  $n$  нормальны, то  $\deg Q_n(z; \widehat{\rho}) = n$  при  $n \geq n_0$ . Временно в пределах этого параграфа нам удобно, *сохранив обозначения, перейти к другой нормировке полиномов  $Q_n(z; \widehat{\rho})$  и считать, что  $Q_n(z; \widehat{\rho}) = z^n + \dots$  при  $n \geq n_0$* . С учетом представления (16) функции  $\Psi$  нетрудно видеть, что формула сильной асимптотики (35) для полиномов  $Q_n$  сохранится, если мы соответствующим образом изменим и нормировку самой  $\Psi$ -функции, точнее, в правой части представления (16)  $\Phi(z)$  заменим на  $\Phi(z)/2$  и умножим эту правую часть на  $\exp\{-S(\infty)\}$  (и, тем самым, нормируем  $\Psi$ -функцию условием  $\Psi(z)/z^n \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ ).

Аналогичное соглашение в пределах этого параграфа будет действовать и относительно полиномов  $Q_n(z; f)$ : *если  $\Lambda = \{n_k\}$  – последовательность нормальных индексов для функции  $f$ , то  $Q_n(z; f) = z^n + \dots$  при  $n \in \Lambda$* . Напомним, что последовательность  $\Lambda = \{n_k\}$  разбивает натуральный ряд чисел на множества  $\Lambda_k = \{n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$  такие, что  $f_n = f_{n_k}$  для  $n \in \Lambda_k$ . Для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  существует единственная пара полиномов  $P_n, Q_n$  (степени  $\leq n$ ) такая, что: а) справедливо соотношение (4), б) полиномы  $P_n$  и  $Q_n$  не имеют общих нулей и с) старший коэффициент полинома  $Q_n$  равен 1. Всюду в этом параграфе через  $P_n = P_n(f)$  и  $Q_n = Q_n(f)$  обозначаются полиномы, удовлетворяющие условиям а)–с); будем называть их числителем и знаменателем рациональной функции  $f_n, n \in \mathbb{N}$ .

Всюду в дальнейшем мы придерживаемся этих соглашений и, кроме того, для краткости полагаем:  $L_n(z) := Q_n(z; \widehat{\rho}) = z^n + \dots$

при  $n \geq n_0$ ,  $Q_n(z) := Q_n(z; f)$ ; тем самым,  $Q_n(z) = z^n + \dots$  при  $n \in \Lambda$ .

С учетом сказанного из предложения 1 вытекают следующие формулы сильной асимптотики для полиномов  $L_n$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$L_n(z) = \left( \frac{\Phi(z)}{2} \right)^n e^{S(z) - S(\infty)} (1 + o(1)) \quad (40)$$

равномерно внутри  $D$ ,

$$L_n(x) = \left( \frac{\Phi^+(x)}{2} \right)^n e^{S^+(x) - S(\infty)} + \left( \frac{\Phi^-(x)}{2} \right)^n e^{S^-(x) - S(\infty)} + o(1)$$

равномерно на  $\Delta$ . (41)

Отметим несколько фактов относительно полиномов  $L_n$ , ортогональных на отрезке  $\Delta$  с весом  $\rho$ , которые вытекают из (40), (41) и будут использоваться нами в дальнейшем. Пусть  $U$  – произвольная окрестность отрезка  $\Delta$  вида  $U = U_\varepsilon = \{z : g_D(z, \infty) < \varepsilon\}$ . Из формулы сильной асимптотики (40) для  $L_n$  вытекает, что для достаточно больших  $n$  все нули  $L_n$  и их производных лежат внутри  $U$ . В дальнейшем будем считать, что  $\varepsilon > 0$  выбрано так, что все полюсы функции  $f$  лежат в  $D \setminus \bar{U}$ .

Из формулы (41) легко вытекает, что  $L_n(x) = 2^{-n} \cdot O(1)$  равномерно на  $\Delta$  и

$$\int_{\Delta} L_n^2(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2^{1-2n} e^{-2S(\infty)} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(ср. с (19)).

Исходя из этих свойств полиномов  $L_n$  легко доказать следующие утверждения (аналоги лемм 2–5 из [4]).

(i) *Равномерно внутри  $D$  справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+\mu}}{L_n}(z) = \left( \frac{\Phi(z)}{2} \right)^\mu, \quad (42)$$

где  $\mu$  – произвольное натуральное число.

(ii) *Для любых натуральных  $\mu$  и  $\nu$ ,  $\mu < \nu < n$ , и любого  $K \Subset \mathbb{C} \setminus \bar{U}$  имеют место оценки*

$$c_1 n^{\nu-\mu} < \left| \frac{L_n^{(\nu)}}{L_n^{(\mu)}}(z) \right| < c_2 n^{\nu-\mu}, \quad z \in K, \quad (43)$$

где  $c_1 > 0$  и  $c_2 < +\infty$  не зависят от  $n$ .

(iii) Для любых натуральных  $\mu$  и  $\nu$  равномерно внутри  $D$  имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+\mu}^{(\nu)}}{L_n^{(\nu)}}(z) = \left( \frac{\Phi(z)}{2} \right)^\mu. \quad (44)$$

(iv) Для любых целых неотрицательных  $\mu$  и  $\nu$  и любого  $a \in D$  имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\|L_{n+\mu}\|_\Delta}{|L_n^{(\nu)}(a)|} \right)^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(a)|}, \quad (45)$$

где  $\|\cdot\|_\Delta$  – sup-норма на  $\Delta$ .

Из определяющего рациональную дробь  $f_n$  соотношения (4) для  $f = \hat{\rho} + r$  легко вытекает, что для любого полинома  $q$ ,  $\deg q \leq n - 1$ , имеем

$$\int_\Delta Q_n(x)q(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} A_{j,k} (Q_n(z)q(z))^{(k-1)} \Big|_{z=a_j} = 0 \quad (46)$$

(напомним, что  $Q_n(z) := Q_n(z; f)$ ). Всюду в дальнейшем считаем, что  $n > m$ . Полагая  $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}$ ,  $q(z) = \omega_m(z)z^\nu$ , получим из (46) следующие соотношения “квазиортогональности” для полинома  $(Q_n\omega_m)(z)$ ,  $\deg(Q_n\omega_m) \leq n + m$ :

$$\int_\Delta Q_n(x)\omega_m(z)z^\nu \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1. \quad (47)$$

Так как все достаточно далекие индексы  $n$  для функции  $\hat{\rho}$  нормальны, то  $\deg L_n = n$  при  $n \geq n_0$ . Отсюда, из ортогональности  $L_n$  с весом  $\rho$  на  $\Delta$  и соотношений квазиортогональности (47) для  $Q_n$  вытекает, что  $\deg Q_n \geq n - 2m$  при всех  $n \geq n_0 + m$ . Это означает, что для последовательности  $\Lambda = \{n_k\}$  нормальных индексов для функции  $f$  имеем:

$$n_{k+1} - n_k \leq 2m + 1 \quad \text{при} \quad n_k \geq n_0 + m. \quad (48)$$

Дальнейшие рассуждения (в пп. 2–4) проводятся для нормальных индексов.

**2.** Наша ближайшая цель – доказательство следующего утверждения (формулы сравнительной асимптотики), аналогично-го лемме 1 из [4].

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** *Равномерно внутри области  $D$  справедли-во соотношение*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n}{L_n}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\Phi(z) - \Phi(a_j))^{2m_j}}{2^m \Phi^m(z) \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}}. \quad (49)$$

Пусть  $n \in \Lambda$ ,  $S_{n+m}(z) = (Q_n \omega_m)(z) = z^{n+m} + \dots$ . Тогда

$$\int_{\Delta} S_{n+m}(x) x^{\nu} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

Так как для всех достаточно далеких индексов  $\deg L_n = n$ , то из этих соотношений вытекает, что полином  $S_{n+m}$  представляется в следующем виде:

$$S_{n+m} = L_{n+m} + \lambda_{n,1} L_{n+m-1} + \dots + \lambda_{n,2m} L_{n-m}, \quad (50)$$

где параметры  $\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,2m}$  неизвестны. Ниже мы получим  $2m$  соотношений, которые позволят исключить эти параметры из представления (50).

Первые  $m$  соотношений немедленно следуют из определения полинома  $S_{n+m}$ :

$$S_{n+m}(a_j) = S'_{n+m}(a_j) = \dots = S_{n+m}^{(m_j-1)}(a_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (51)$$

Получим еще одну группу из  $m$  соотношений.

Зафиксируем  $j \in \{1, \dots, \ell\}$  и положим

$$S_{n+m}(z) \cdot (z - a_j)^{-m_j} = S_{n+m,j}(z) = b_{n,j}^{(0)} + b_{n,j}^{(1)}(z - a_j) + \dots \quad (52)$$

(степень этого полинома равна  $n + m - m_j$ ). Подставив теперь полином  $\omega_m(z)/(z - a_j)^{\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ , в соотношение (46), получим

$$\int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x - a_j)^{\nu}} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{m_j} A_{j,k} (S_{n+m,j}(z)(z - a_j)^{m_j - \nu})^{(k-1)} \Big|_{z=a_j} = 0.$$

Отсюда вытекает система уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{x-a_j} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + (m_j-1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(0)} = 0, \\ & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x-a_j)^2} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + (m_j-2)! A_{j,m_j-1} b_{n,j}^{(0)} \\ & \quad + (m_j-1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(1)} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x-a_j)^{m_j}} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + A_{j,1} b_{n,j}^{(0)} + \dots \\ & \quad + (m_j-1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(m_j-1)} = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно  $b_{n,j}^{(0)}, b_{n,j}^{(1)}, \dots, b_{n,j}^{(m_j-1)}$  (напомним, что величины  $A_{j,m_j} \neq 0$ , см. (39)), получим набор из  $m_j$  полиномов  $p_{j,1}, \dots, p_{j,m_j}$  (второй индекс равен степени полинома) таких, что

$$\begin{aligned} & m_j! b_{n,j}^{(0)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,1} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ & (m_j+1)! b_{n,j}^{(1)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,2} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & (2m_j-1)! b_{n,j}^{(m_j-1)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,m_j} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что полиномы  $p_{j,\nu}$ ,  $1 \leq \nu \leq m_j$ , не зависят от  $n$ ; они полностью определяются главной частью разложения функции  $f$  в точке  $z = a_j$ . Учитывая (52), последнюю систему равенств можно переписать так:

$$\begin{aligned} & S_{n+m}^{(m_j)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,1} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ & S_{n+m}^{(m_j+1)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,2} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad (53) \\ & \dots\dots\dots \\ & S_{n+m}^{(2m_j-1)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,m_j} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Совокупность таких систем (53) для всех  $j = 1, 2, \dots, \ell$  содержит  $m$  соотношений.

**3. Положим**

$$\delta_n(j, \mu, \nu) = \frac{1}{L_{n-m}^{(m_j-1+\nu)}(a_j)} \int_{\Delta} L_{n-m+\mu}(x) p_{j,\nu} \left( \frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (54)$$

где  $j = 1, \dots, \ell$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, 2m$ . Функции

$$p_{j,\nu} \left( \frac{1}{z-a_j} \right)$$

голоморфны в окрестности отрезка  $\Delta$ , а полиномы  $p_{j,\nu}$  не зависят от  $n$ . С учетом свойств (i)–(iv) полиномов  $L_n$ , получаем из (54):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n(j, \mu, \nu)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a_j)|} < 1.$$

Пусть  $\delta < 1$  таково, что  $1/|\Phi(a_j)| < \delta < 1$  при каждом  $j = 1, \dots, \ell$ . Тогда для любой тройки индексов  $j, \mu, \nu$ , меняющихся в указанных выше пределах, имеем

$$\delta_n(j, \mu, \nu) = o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Подставим в соотношения (53) разложение (50); после очевидных преобразований, учитывая (55), получим

$$\begin{aligned} & \frac{L_{n+m}}{L_{n-m}}(a_j) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n+m-1}}{L_{n-m}}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{L_{n+m}^{(m_j-1)}}{L_{n-m}^{(m_j-1)}}(a_j) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n+m-1}^{(m_j-1)}}{L_{n-m}^{(m_j-1)}}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} = 0, \quad (56) \\ & \frac{L_{n+m}^{(m_j)}}{L_{n-m}^{(m_j)}}(a_j) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \left( \frac{L_{n+m-1}^{(m_j)}}{L_{n-m}^{(m_j)}}(a_j) + o(\delta^n) \right) + \dots \\ & \quad + \lambda_{n,2m}(1 + o(\delta^n)) = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{L_{n+m}^{(2m_j-1)}}{L_{n-m}^{(2m_j-1)}}(a_j) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \left( \frac{L_{n+m-1}^{(2m_j-1)}}{L_{n-m}^{(2m_j-1)}}(a_j) + o(\delta^n) \right) + \dots \\ & \quad + \lambda_{n,2m}(1 + o(\delta^n)) = 0, \end{aligned}$$

где  $j = 1, 2, \dots, \ell$ . Во второй группе из  $m_j$  соотношений мы заменили на  $o(\delta^n)$  выражения вида (54).

При  $n \rightarrow \infty$  в каждом из уравнений (56) строка коэффициентов имеет один и тот же предел, а именно строку

$$\left(\frac{1}{2}\Phi(a_j)\right)^{2m}, \left(\frac{1}{2}\Phi(a_j)\right)^{2m-1}, \dots, 1$$

(см. свойства (i)–(iv)). Преобразуем теперь систему (56) так, чтобы в пределе получались линейно независимые строки.

С помощью формулы Лейбница получаем

$$\frac{L_{n+m-\mu}^{(\nu)}}{L_{n-m}^{(\nu)}} = \left(\frac{L_{n+m-\mu}}{L_{n-m}}\right)^{(\nu)} \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}} - \sum_{k=1}^{\nu} F_{n-m}(\nu, k) \frac{L_{n+m-\mu}^{(\nu-k)}}{L_{n-m}^{(\nu-k)}}, \quad (57)$$

где

$$F_{n-m}(\nu, k) = \binom{\nu}{k} \frac{L_{n-m} L_{n-m}^{(\nu-k)}}{L_{n-m}^{(\nu)}} \left(\frac{1}{L_{n-m}}\right)^{(k)},$$

$\mu = 0, 1, \dots, 2m - 1$ ; подчеркнем, что  $F_{n-m}(\nu, k)$  не зависит от  $\mu$ . Пользуясь соотношениями (43) и (44), нетрудно показать, что для любого  $a \in D$  справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_{n-m}(\nu, k)(a)|^{1/n} \leq 1. \quad (58)$$

Пусть  $C > 1$  таково, что  $\delta_1 = C\delta < 1$ . В силу (58) для любой тройки индексов  $j, \nu, k$ , меняющихся в пределах  $j = 1, \dots, \ell$ ,  $\nu = 1, \dots, 2m_j - 1$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ , имеем

$$F_{n-m}(\nu, k)(a_j) = O(C^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{n,\mu} = \frac{L_{n+m-\mu}}{L_{n-m}}, \quad \mu = 0, 1, \dots, 2m; \quad \varphi = \frac{\Phi}{2}. \quad (60)$$

В силу (42) равномерно внутри  $D$  выполняются соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,\mu}(z) = \varphi^{2m-\mu}(z), \quad \mu = 0, 1, \dots, 2m; \quad (61)$$

тем самым, и последовательные производные функций  $\varphi_{n,\mu}$  равномерно внутри  $D$  сходятся к соответствующим производным функций  $\varphi^{2m-\mu}$ .

Прибавим теперь к  $\nu$ -й строке системы (56) линейную комбинацию предшествующих строк с коэффициентами, определяемыми равенством (57) в точке  $a_j$ . Тогда, учитывая (для  $\nu \geq m_j$ ) соотношение (59), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,0}^{(\nu)}(a_j) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}^{(\nu)}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m}\varphi_{n,2m}^{(\nu)}(a_j) &= 0, \\ \nu &= 0, 1, \dots, m_j - 1; \\ \varphi_{n,0}^{(\nu)}(a_j) \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}}(a_j) + o(\delta_1^n) & \\ + \lambda_{n,1} \left( \varphi_{n,1}^{(\nu)}(a_j) \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}}(a_j) + o(\delta_1^n) \right) + \dots & \\ + \lambda_{n,2m} \left( \varphi_{n,2m}^{(\nu)}(a_j) \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}}(a_j) + o(\delta_1^n) \right) &= 0, \\ \nu &= m_j, m_j + 1, \dots, 2m_j - 1. \end{aligned}$$

Умножая  $\nu$ -е уравнение (для  $\nu \geq m_j$ ) на  $L_{n-m}^{(\nu)}(a_j)/L_{n-m}(a_j)$  и учитывая соотношения (43) (т.е. степенной рост этого множителя при  $\nu = m_j, \dots, 2m_j - 1$ ), окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} \varphi_{n,0}(a_j) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} \cdot 1 &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_{n,0}^{(m_j-1)}(a_j) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}^{(m_j-1)}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} \cdot 0 &= 0, \quad (62) \\ \varphi_{n,0}^{(m_j)}(a_j) + o(1) + \lambda_{n,1}(\varphi_{n,1}^{(m_j)}(a_j) + o(1)) + \dots & \\ + \lambda_{n,2m} \cdot o(1) &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_{n,0}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) + \lambda_{n,1}(\varphi_{n,1}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1)) + \dots & \\ + \lambda_{n,2m} \cdot o(1) &= 0, \end{aligned}$$

где  $j = 1, 2, \dots, \ell$ .

4. Обозначим через  $\Delta_n^0$  определитель при неизвестных  $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,2m}$  этой системы. Учитывая соотношение (61), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^0 = \Delta^0 = \begin{vmatrix} \varphi^{2m-1}(a_j) & \varphi^{2m-2}(a_j) & \dots & 1 \\ (\varphi^{2m-1})'(a_j) & (\varphi^{2m-2})'(a_j) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi^{2m-1})^{(2m_j-1)}(a_j) & (\varphi^{2m-2})^{(2m_j-1)}(a_j) & \dots & 0 \end{vmatrix}_{j=1, \dots, \ell}.$$

Символ, стоящий в правой части этого равенства, обозначает определитель порядка  $2m$ , в котором последовательно выписываются указанные группы строк для  $j = 1, 2, \dots, \ell$ . Поскольку  $\varphi$  – однолистная функция в области  $D$ , определитель  $\Delta^0$  отличен от нуля (величина этого определителя нам не понадобится). Следовательно,  $\Delta_n^0 \neq 0$  при достаточно больших  $n \geq n_0$ .

Добавим теперь к системе (62) соотношение

$$\varphi_{n,0}(z) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}(z) + \dots + \lambda_{n,2m} = \frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z), \quad z \in D,$$

и исключим из этого соотношения (с помощью системы (62)) неизвестные  $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,2m}$ . Получим

$$\frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z) = \frac{\Delta_n(z)}{\Delta_n^0}, \quad z \in D, \quad n \geq n_0,$$

где

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} \varphi_{n,0}(z) & \varphi_{n,1}(z) & \dots & 1 \\ \varphi_{n,0}(a_j) & \varphi_{n,1}(a_j) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,0}^{(m_j-1)}(a_j) & \varphi_{n,1}^{(m_j-1)}(a_j) & \dots & 0 \\ \varphi_{n,0}^{(m_j)}(a_j) + o(1) & \varphi_{n,1}^{(m_j)}(a_j) + o(1) & \dots & o(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,0}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) & \varphi_{n,1}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) & \dots & o(1) \end{vmatrix}_{j=1, \dots, \ell}.$$

Следовательно (напомним, что  $n \in \Lambda$ ),

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z) = \mathcal{P}(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta^0}, \quad z \in D, \quad (63)$$

где

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \varphi^{2m}(z) & \varphi^{2m-1}(z) & \dots & 1 \\ \varphi^{2m}(a_1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi^{2m}(a_\ell) & \dots & \Delta^0 & \dots \end{vmatrix}; \quad (64)$$

переход к пределу в (63) – равномерный внутри  $D$ . Функция  $\mathcal{P}(z)$  – полином от  $\varphi(z)$  степени  $2m$  со старшим коэффициентом

при  $\varphi^{2m}(z)$ , равным 1 (см. (50)). Учитывая характер нулей этой функции, получаем

$$\mathcal{P}(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (\varphi(z) - \varphi(a_j))^{2m_j}. \quad (65)$$

Следовательно, принимая во внимание (60), (65) и введенное ранее обозначение  $S_{n+m} = Q_n \omega_m$ , имеем:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n}{L_{n-m}}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\Phi(z) - \Phi(a_j))^{2m_j}}{2^{2m} \omega_m(z)}, \quad z \in D; \quad (66)$$

сходимость – равномерная внутри  $D$ . Последнее соотношение эквивалентно (49). Предложение 3 доказано.

Отметим, что в силу легко проверяемого тождества

$$\frac{\Phi(z) - \Phi(a)}{z - a} = -\frac{2\Phi(z)\Phi(a)}{1 - \Phi(z)\Phi(a)}$$

соотношение (49) эквивалентным образом переписывается в виде:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n(z)}{L_n(z)} = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(z)\Phi(a_j)} \right)^{m_j}, \quad (67)$$

где  $\text{const} = (-1)^m / \prod_{j=1}^{\ell} \Phi^{m_j}(a_j)$ .

**5.** Функция, стоящая в правой части соотношения (49), голоморфна в области  $D$ ; множество ее нулей совпадает (с учетом их кратностей) с множеством полюсов функции  $f$  в  $D$ . Отсюда и из теоремы Руше получаем утверждение теоремы 2 для последовательности нормальных индексов  $\Lambda = \{n_k\}$ ; структура последовательности  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такова (см. § 1, п. 2), что тем самым это утверждение оказывается справедливым и для всех индексов.

Ниже мы используем следующее соотношение, вытекающее из (63):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} |S_{n+m}(z)|^{1/n} = \frac{1}{2} |\Phi(z)|, \quad z \in D' \quad (68)$$

(переход к пределу – равномерный внутри  $D'$ ).

Докажем утверждение о скорости сходимости функций  $f_n$  к  $f$  и полюсов  $f_n$  к полюсам  $f$ . Пусть  $n \in \Lambda$ ,  $n > m$ ; из (4) получаем

$$(\widehat{\rho} + r - f_n)(z) = (\widehat{\rho} - \tau_n)(z) = \frac{A}{z^{2n+1}} + \dots; \quad (69)$$

здесь  $\tau_n = f_n - r$  – рациональная функция порядка  $n + m$ , знаменатель которой есть  $Q_n \omega_m = S_{n+m}$ . Соотношение (69) означает, что эта рациональная функция интерполирует голоморфную в области  $D$  функцию  $\widehat{\rho}$  в точке  $z = \infty$  до порядка  $2n + 1 > n + m$ .

Фиксируем произвольный компакт  $K \subset D'$ ; из утверждения теоремы 2 следует, что для достаточно больших  $n$  все нули полинома  $S_{n+m}$  лежат вне компакта  $K$ . Для любого  $R > 1$  положим  $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$ ; пусть  $R$  столь близко к 1, что  $K$  лежит во внешности  $\Gamma_R$ . С помощью формулы Эрмита из (69) получаем

$$(f - f_n)(z) = (\widehat{\rho} - \tau_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{S_{n+m}(t)q(t)\widehat{\rho}(t) dt}{S_{n+m}(z)q(z)(t-z)}, \quad z \in K,$$

где  $q$  – произвольный полином степени  $\leq n - m$ . Выберем  $q = L_{n-m}$ . Тогда, используя (68) и свойства полиномов  $\{L_n\}$ , получаем оценку

$$\|f - f_n\|_K < C \left( \frac{R + \varepsilon}{R(K) - \varepsilon} \right)^{2n},$$

где  $\|\cdot\|$  – суп-норма,  $R(K) = \inf\{|\Phi(z)| : z \in K\}$ ,  $\varepsilon > 0$  – произвольно,  $n > n(\varepsilon)$ ,  $n \in \Lambda$ ,  $C$  не зависит от  $n$ . Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{R + \varepsilon}{R(K) - \varepsilon};$$

устремляя  $\varepsilon$  к нулю и  $R$  к единице, получаем отсюда

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{R(K)} < 1. \quad (70)$$

Вновь учитывая структуру последовательности  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и неравенство (48) для нормальных индексов, получаем из (70) следующее утверждение о скорости сходимости функций  $f_n$  к  $f$ :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{R(K)} < 1.$$

Отсюда уже легко вытекает, что если  $a \in D$  – полюс  $f$  кратности  $\mu \geq 1$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}} < 1, \quad j = 1, \dots, \mu$$

(как обычно,  $\zeta_{j,n}(a)$ ,  $j = 1, \dots, \mu$ , – полюсы  $f_n$ , перенумерованные в порядке неубывания их расстояния до точки  $a$ ).

## § 5. Доказательство предложения 2

1. Существование и единственность решения задачи  $(\mathcal{R}_2)$  доказываются стандартным способом (см. [16]): в предположении, что решение существует, находится его явный вид. Непосредственно проверяется, что полученная в итоге функция является решением краевой задачи. Для *доказательства* предложения 2 нам понадобится рассмотреть и решить несколько более общую, чем  $(\mathcal{R}_2)$ , краевую задачу.

Пусть  $a_j, b_j \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ ,  $j = 1, \dots, m$ , – произвольные необязательно различные точки.

**ЗАДАЧА  $(\mathcal{R}_3)$ .** При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  найти функцию  $\psi = \psi_n$  такую, что:

- 1°.  $\psi$  (кусочно) мероморфна на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$ ;
- 2°. дивизор  $(\psi) = n\infty^{(2)} + a_1^{(1)} + \dots + a_m^{(1)} - b_1^{(2)} - \dots - b_m^{(2)} - n\infty^{(1)}$ ;
- 3°. на  $\Gamma$  выполнено краевое условие:  $\rho(x)\psi(\mathbf{x}+) = \psi(\mathbf{x}-)$ .

Непосредственно из условий этой задачи вытекает, что

$$\psi(z^{(1)})\psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j)}$$

при  $z \in D$ , где  $\text{const} \neq 0$ . Как и ранее, будем придерживаться той нормировки  $\psi$ -функции, которая даст  $\text{const} = 1$ . Решение задачи  $(\mathcal{R}_3)$  понадобится нам в ситуации, когда  $b_j = a_{j,n} \rightarrow a_j$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Отметим, что среди точек  $a_1, \dots, a_m$  в п. 2° задачи  $(\mathcal{R}_3)$  могут встречаться совпадающие; аналогичное замечание относится и к точкам  $b_1, \dots, b_m$ . В дальнейшем в пределах этого параграфа подобного соглашения нам будет удобно придерживаться и относительно полюсов функции  $f$ : *каждый полюс  $f$  в  $D$  выписывается столько раз, какова его кратность*.

Найти явный вид решения задачи  $(\mathcal{R}_3)$  не составляет труда: риманова поверхность  $\mathfrak{X}$  – нулевого рода, поэтому любой дивизор вида  $a^{(1)} - b^{(2)}$  разрешим: существует функция  $\Phi_{a,b}$ , мероморфная на  $\mathfrak{X}$  и такая, что  $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$  (см. (15)). Для  $\psi$ -функции  $\deg(\psi) = 0$ , поэтому задача  $(\mathcal{R}_3)$  разбивается на несколько независимых задач, соответствующих пп. 2° и 3°.

Функция  $\Phi(\mathbf{z}) = z + w$  мероморфна на  $\mathfrak{X}$ , дивизор  $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$  и  $\Phi(z^{(1)})\Phi(z^{(2)}) \equiv 1$  при  $z \in D$ . Пусть  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Delta$  – произвольные точки,  $\lambda \neq 0$  – комплексная постоянная. Функция

$$\Phi_{a,b}(\mathbf{z}) = \lambda \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b)}{z - b} \frac{z - a}{1 - \Phi(a)\Phi(\mathbf{z})} \quad (71)$$

– однозначная мероморфная функция на  $\mathfrak{X}$  с дивизором  $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$ . Положим  $\lambda = \lambda(a, b) = \sqrt{\Phi(a)/\Phi(b)}$ . Тогда  $\Phi_{a,b}(z^{(1)}) \times \Phi_{a,b}(z^{(2)}) \equiv (z - a)/(z - b)$  при  $z \in D$ . Функции вида (71) потребуются нам только в ситуации, когда  $a$  фиксировано, а  $b \rightarrow a$ . Исходя из этого условия выберем в представлении для  $\lambda$  ветвь корня так, что  $\lambda(a, b) = 1 + o(1)$  при  $b \rightarrow a$ ; очевидно, что  $o(1)$  определяется скоростью стремления  $b \rightarrow a$ :  $o(1) = O(|a - b|)$ .

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{z}) &= \Phi(\mathbf{z})^n \prod_{j=1}^m \Phi_{a_j, b_j}(\mathbf{z}) \\ &= \Phi(\mathbf{z})^n \prod_{j=1}^m \lambda(a_j, b_j) \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b_j)}{z - b_j} \frac{z - a_j}{1 - \Phi(a_j)\Phi(\mathbf{z})}. \end{aligned}$$

Функция  $\mathcal{F}$  мероморфна на  $\mathfrak{X}$ , дивизор  $(\mathcal{F}) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)} + \sum_{j=1}^m a_j^{(1)} - \sum_{j=1}^m b_j^{(2)}$  и  $\mathcal{F}(\mathbf{x}+) = \mathcal{F}(\mathbf{x}-)$  на  $\Gamma$ . Тем самым,  $(\mathcal{F}) = (\psi)$  и для функции  $H(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z})/\mathcal{F}(\mathbf{z})$  имеем:  $(H) = 0$ , т.е.  $H$  голоморфна и отлична от нуля в  $\mathfrak{X} \setminus \Gamma$ , а на  $\Gamma$  выполняется краевое условие  $\rho(x)H(\mathbf{x}+) = H(\mathbf{x}-)$ . Отсюда с учетом выбранных нормировок функций  $\psi$  и  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}(z^{(1)})\mathcal{F}(z^{(2)}) \equiv \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_m)}{(z - b_1) \cdots (z - b_m)},$$

получаем, что  $H(z^{(1)})H(z^{(2)}) \equiv 1$  при  $z \in D$ . С учетом этого соотношения из краевого условия для функции  $H$  на  $\Gamma$  вытекает, что  $\rho(x)H^+(x)H^-(x) \equiv 1$  при  $x \in \Delta$ .

Таким образом, функция  $H(z) = H(z^{(1)})$  голоморфна и отлична от нуля в  $D$  и удовлетворяет условию:  $\rho(x)H^+(x)H^-(x) \equiv 1$  при  $x \in \Delta$ . Тогда функция  $u(z) = \frac{\log H(z)}{w(z)}$  однозначно определена и голоморфна в  $D$ ,  $u(\infty) = 0$  и

$$u^+(x) - u^-(x) = -\frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} = i \frac{\log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

при  $x \in \Delta$ . Следовательно, для  $u$  справедливо следующее представление интегралом типа Коши:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x-z} \frac{dx}{w^+(x)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Тем самым, произведение  $w(z)u(z) = S(z)$  – функция Сегё для веса  $\rho$ . Отсюда вытекает, что

$$H(z) = e^{w(z)u(z)} = e^{S(z)} = \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}.$$

В итоге для  $\psi$ -функции, решающей задачу  $(\mathcal{R}_3)$ , получаем следующее представление при  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$ :

$$\psi(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z})H(\mathbf{z}), \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} H(z^{(1)}) &= \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}, \\ H(z^{(2)}) &\equiv \frac{1}{H(z^{(1)})}, \\ \mathcal{F}(z^{(1)}) &= \Phi(z)^n \prod_{j=1}^m \lambda(a_j, b_j) \frac{\Phi(z) - \Phi(b_j)}{z - b_j} \frac{z - a_j}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)}, \\ \mathcal{F}(z^{(2)}) &\equiv \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j) \cdot \mathcal{F}(z^{(1)})}. \end{aligned} \quad (73)$$

Из полученного представления вытекает, что  $\psi(z)/z^n \rightarrow \varkappa_n$  при  $z \rightarrow \infty$ , где

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= 2^n e^{S(\infty)} \prod_{j=1}^m \frac{\lambda(a_j, b_j)}{(-\Phi(b_j))} \\ &= 2^n \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{\lambda(a_j, b_j)}{(-\Phi(b_j))} \neq 0, \end{aligned}$$

т.е.  $\psi$  имеет в точке  $z = \infty$  полюс  $n$ -го порядка. Непосредственно проверяется, что полученная функция  $\psi$  является решением задачи  $(\mathcal{R}_3)$ . Отметим также следующее свойство этой функции, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$\rho(x)\psi^+(x)\psi^-(x) \equiv \prod_{j=1}^m \frac{x-a_j}{x-b_j} \quad \text{при } x \in \Delta. \quad (74)$$

Наконец, при  $b_j = a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , полученные результаты прямо приводят к  $\Psi$ -функции, решающей задачу  $(\mathcal{R}_2)$ :

$$\Psi(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z})H(\mathbf{z}), \quad (75)$$

где  $H(\mathbf{z})$  определяется условиями (73), а

$$\mathcal{F}(z^{(1)}) = \Phi(z)^n \prod_{j=1}^m \frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)}, \quad \mathcal{F}(z^{(2)}) \equiv \frac{1}{\mathcal{F}(z^{(1)})}, \quad (76)$$

при этом  $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$  при  $x \in \Delta$  и  $\Psi(z)/z^n \rightarrow \varkappa_n$  при  $z \rightarrow \infty$ , где

$$\varkappa_n = \frac{2^n e^{S(\infty)}}{\prod_{j=1}^m (-\Phi(a_j))} \neq 0,$$

т.е.  $\Psi$  имеет в точке  $z = \infty$  полюс  $n$ -го порядка.

**2.** Рассуждения этого пункта основаны на свойствах  $\psi$ -функции. Всюду здесь предполагается, что в условии 2° задачи  $(\mathcal{R}_3)$  точки  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , — полюсы<sup>10</sup> функции  $f$  в  $D$ ,  $b_j = a_{j,n}$  — полюсы рациональной дроби  $f_n$ , соответствующие полюсам  $f$  в  $D$

<sup>10</sup>Напомним, что в этом параграфе мы придерживаемся следующего соглашения: каждый полюс или нуль функции выписывается столько раз, какова его кратность.

при  $n \rightarrow \infty$  и занумерованные так, что  $a_{j,n} \rightarrow a_j$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $j = 1, \dots, m$ . Тем самым дивизор  $(\psi) = n\infty^{(2)} + a_1^{(1)} + \dots + a_m^{(1)} - a_{1,n}^{(2)} - \dots - a_{m,n}^{(2)} - n\infty^{(1)}$ , а соответствующие  $\lambda = \lambda(a_j, b_j) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$  с геометрической скоростью (см. § 2, п. 3). Положим  $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$ ,  $\omega_{n,m}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$ .

Определим на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$  функцию  $F$  следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ -2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}. \end{cases} \quad (77)$$

Опираясь на свойства функции  $\psi$  в  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ , нетрудно увидеть, что функция  $F$  (кусочно) голоморфна в  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ . Как будет показано ниже, все достаточно большие индексы  $n$  нормальны для функции  $f = \hat{\rho} + r$  и для таких  $n$  дивизор  $(F) = 0$ .

Используя свойства  $\psi$ -функции на кривой  $\Gamma$  и следующее свойство функции остатка  $R_n$  на границе отрезка  $\Delta$ :  $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$ , получаем краевое условие для  $F$  на  $\Gamma$ :

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (78)$$

где функция  $\chi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ , мероморфна на втором листе. В таком случае  $F$  стандартным образом (см. [19], [16]) восстанавливается в  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$  по граничным условиям (78) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (79)$$

где  $C_n$  – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (80)$$

– мероморфный на  $\mathfrak{R}$  абелев дифференциал, а контур  $\Gamma^+$  ориентирован положительно относительно области  $D^{(1)}$ : область остается слева при обходе по контуру. Как обычно, дальнейшие рассуждения основаны на интегральном представлении (79).

Пусть сначала  $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$ . Выберем числа  $R > 1$  и  $\varepsilon > 0$  так, чтобы функции  $\chi$  и  $1/\rho$  были бы голоморфны в области

$\{z^{(2)} : 1 < |\Phi(z)| < R + \varepsilon\}$ . Тогда в интегральном представлении (79) контур  $\Gamma$  можно заменить на контур  $\Gamma_R^{(2)} \subset D^{(2)}$ . Воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned}\chi(z^{(2)}) &= \psi(z^{(2)})R_n(z)w(z^{(2)}) = -F(z^{(1)})\frac{\psi(z^{(2)})}{\psi(z^{(1)})} \\ &= -F(z^{(1)})\frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(z^{(1)})^2}\end{aligned}$$

и  $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$ , получаем из (79) следующее представление для функции  $F$ :

$$\begin{aligned}F(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + C_n,\end{aligned}\tag{81}$$

где  $\Gamma_R^{(1)} = \{z^{(1)} : |\Phi(z)| = R\}$ . Так как дифференциал  $d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z})$  – голоморфный по  $\mathbf{z}$  на компакте  $D^{(2)} \sqcup \Gamma$  при  $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$ , то последнее интегральное представление<sup>11</sup> справедливо равномерно на компакте  $D^{(1)} \sqcup \Gamma$ . Из (81) получаем, что равномерно по  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R} \frac{1}{|\psi(\zeta^{(1)})|^2} O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где  $M_n = \max_{\Gamma_R^{(1)}} |F(\zeta^{(1)})|$ . Используя свойства  $\psi$ -функции, получаем отсюда, что равномерно по  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,\tag{82}$$

где  $\delta = 1/R^2 < 1$ . Так как  $F(z^{(1)}) \not\equiv 0$ , то  $M_n \neq 0$ , поэтому из (82) последовательно получаем:  $M_n = |C_n|(1 + O(\delta^n))$  и

$$F(z^{(1)}) = C_n(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty\tag{83}$$

равномерно по  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$ .

<sup>11</sup>Как и ранее, интегральная формула (81) задает аналитическое продолжение функции  $F(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ , через контур  $\Gamma$  на второй лист римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  вплоть до контура  $\Gamma_R^{(2)}$ , причем для  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$  это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией  $F(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ , определенной (77).

Пусть теперь  $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$ . Тогда из (79) вытекает, что при  $z^{(2)} \in D_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| > R\}$

$$\begin{aligned} F(z^{(2)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + C_n. \end{aligned} \tag{84}$$

Дифференциал  $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$  – голоморфный по  $z^{(1)} \in D_R^{(1)}$  при  $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$ . Используя свойства  $\psi$ -функции и полученное выше асимптотическое представление (83) для функции  $F(\mathbf{z})$ , получаем из (84) аналог соотношения (83) для  $F(z^{(2)})$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$F(z^{(2)}) = C_n(1 + O(\delta^n)) \tag{85}$$

равномерно внутри  $D_R^{(2)}$ ,  $\delta < 1$ . Непосредственно из определения (77) функции  $F$  вытекает, что равномерно внутри  $D_R$ ,  $R > 1$ , справедливо представление

$$2Q_n(z) = -C_n \frac{1}{\psi(z^{(2)})} (1 + o(1)), \quad \text{где } o(1) = O(\delta^n), \quad \delta < 1.$$

Так как в силу (83) постоянная  $C_n \neq 0$  при достаточно больших  $n$ , то  $\deg Q_n = n$ , т.е. все такие индексы нормальны. Выбор постоянной  $C_n \neq 0$  связан только с нормировкой  $Q_n$ , поэтому в дальнейшем положим  $C_n = -2$ . В таком случае асимптотическая формула для полиномов  $Q_n$  вне отрезка  $\Delta$  примет вид:

$$Q_n(z) = \frac{1}{\psi(z^{(2)})} (1 + o(1)) = \psi(z) \prod_{j=1}^m \frac{\omega_{m,n}(z)}{\omega_m(z)} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

или, окончательно,

$$Q_n(z) \frac{\omega_m(z)}{\omega_{m,n}(z)} = \psi(z) (1 + o(1)) \tag{86}$$

равномерно внутри  $D$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Вернемся теперь к соотношению

$$F(\mathbf{z}) = C_n(1 + o(1)) = -2 + o(1),$$

которое справедливо равномерно на компакте  $D^{(1)} \sqcup \Gamma$ . Из этого соотношения в силу определения функции  $F$  вытекает, что равномерно по  $x \in \Delta$

$$\begin{aligned}\psi^+(x)R^+(x)w^+(x) &= -2 + o(1), \\ \psi^-(x)R^-(x)w^-(x) &= -2 + o(1),\end{aligned}\quad n \rightarrow \infty.$$

Так как  $\psi^+(x) \neq 0$  и  $\psi^-(x) \neq 0$  на  $\Delta$ , то

$$\begin{aligned}R^+(x)w^+(x) &= -\frac{2}{\psi^+(x)}(1 + o(1)), \\ R^-(x)w^-(x) &= -\frac{2}{\psi^-(x)}(1 + o(1)),\end{aligned}\quad n \rightarrow \infty.$$

Суммируя последние соотношения, получаем

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -\frac{2}{\psi^+(x)} - \frac{2}{\psi^-(x)} + o(1).$$

Поскольку  $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$  при  $x \in \Delta$ , то  $R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)$ . Объединяя последние соотношения для функции остатка, получаем, что

$$Q_n(x)\rho(x) = \frac{1}{\psi^+(x)} + \frac{1}{\psi^-(x)} + o(1).$$

Но  $\rho(x)\psi^+(x)\psi^-(x) \equiv \omega_m(x)/\omega_{m,n}(x) = 1 + o(1)$  на  $\Delta$ , тем самым

$$Q_n(x)\frac{\omega_m(x)}{\omega_{m,n}(x)} = \psi^+(x) + \psi^-(x) + o(1) \quad (87)$$

равномерно по  $x \in \Delta$ , где  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ .

Итак, получены (см. выше (86) и (87)) следующие асимптотические представления для полиномов  $Q_n(z) = Q_n(z; f)$ :

$$\begin{aligned}Q_n(z; f)\frac{\omega_m(z)}{\omega_{m,n}(z)} &= \psi(z)(1 + o(\delta^n)) \\ &\text{равномерно внутри } D',\end{aligned}\quad (88)$$

$$\begin{aligned}Q_n(x; f)\frac{\omega_m(x)}{\omega_{m,n}(x)} &= \psi^-(x) + \psi^+(x) + o(\delta^n) \\ &\text{равномерно на } \Delta,\end{aligned}$$

где  $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$ ,  $\omega_{m,n}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$ , а  $\delta < 1$ . Так как равномерно внутри  $D'$  и равномерно на  $\Delta$  при  $n \rightarrow \infty$  имеем:  $\omega_{m,n}(z) = \omega_m(z)(1 + o(\delta^n))$  и  $\psi(z) = \Psi(z)(1 + o(\delta^n))$ , где  $\Psi$  – решение задачи  $(\mathcal{R}_2)$ , то из (88) немедленно следуют утверждения предложения 2.

Предложение 2 доказано.

В дальнейшем нам понадобится также следующее соотношение, которое вытекает непосредственно из (88) и представления (75), (76):

$$\frac{Q_n(z; f)}{\omega_{m,n}(z)} = \frac{\Psi(z)}{\omega_m(z)}(1 + o(\delta^n)) \quad \text{равномерно внутри } D,$$

или, если ввести обозначения  $\tilde{Q}_n(z; f) = Q_n(z; f)/\omega_{m,n}(z)$ ,  $\tilde{\Psi}(z) = \Psi(z)/\omega_m(z)$ , то

$$\tilde{Q}_n(z; f) = \tilde{\Psi}(z)(1 + o(\delta^n)) \quad \text{равномерно внутри } D. \quad (89)$$

### § 6. Доказательство теоремы 3

1. Доказательство теоремы 3 основано, главным образом, на формуле *сильной асимптотики* (22<sub>2</sub>) *полиномов*  $Q_n(z) = Q_n(z; f)$  на отрезке  $\Delta$ . Наша ближайшая цель – придать этой формуле вид, пригодный для дальнейших рассуждений. Для отображающей функции  $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$  имеем:

$$\Phi^+(x) = e^{ig^{*+}(x)} = e^{i \arccos x}, \quad \Phi^-(x) = e^{-i \arccos x} \quad \text{при } x \in \Delta.$$

Следовательно,  $|\Phi^+(x)| \equiv |\Phi^-(x)| \equiv 1$  на  $\Delta$ . Учитывая теперь представление (75), (76) для  $\Psi$ -функции, получаем:  $\Psi^+(x) = O(1)$  и  $\Psi^-(x) = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $\Delta$ . Так как  $Q_n(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$  равномерно на отрезке  $\Delta$ , то, во-первых,  $Q_n(x) = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $x \in \Delta$ , а во-вторых,

$$Q_n^2(x) = \Psi^+(x)^2 + \Psi^-(x)^2 + \frac{2}{\rho(x)} + o(1), \quad \text{где } o(1) = o(\delta^n), \quad \delta < 1; \quad (90)$$

здесь мы воспользовались полученным ранее соотношением

$$\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$$

при  $x \in \Delta$ .

Пусть  $a_1, \dots, a_\ell$  – (различные) полюсы функции  $f$  в области  $D$ ,  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , – их кратности,  $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$  – полное число полюсов  $f$  в  $D$ . Положим  $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}$ ,  $\omega_{n,m}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$ , где  $a_{j,n}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , – соответствующие полюсам  $f$  при  $n \rightarrow \infty$  полюсы рациональной дроби  $f_n$ ; пусть  $\tilde{Q}_n(z) = Q_n(z)/\omega_{n,m}(z)$ , тогда  $\deg \tilde{Q}_n = n - m$  при достаточно больших  $n$ . Умножив соотношение (4) на полином  $\tilde{Q}_n \omega_m$  степени  $n$ , получим

$$\tilde{R}_n(z) = (Q_n \tilde{Q}_n \omega_m f - \tilde{P}_n)(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где функция  $\tilde{R}_n = R_n \tilde{Q}_n \omega_m$  голоморфна в  $D$ ,  $\tilde{P}_n = P_n \tilde{Q}_n \omega_m$ . Для голоморфной в  $D$  функции  $\tilde{R}_n$  справедливо представление

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x) \tilde{Q}_n(x) \omega_m(x) \rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)(1+\delta_n(x))\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\delta_n(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= I_1(z) + I_2(z), \quad z \in D, \end{aligned} \tag{91}$$

где  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\|_{\Delta}^{1/n} < 1$ . Так как  $Q_n^2(x) = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $x \in \Delta$ , то для

$$I_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\delta_n(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}}$$

имеем

$$I_2(z) = \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} = G'(z)o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$  равномерно внутри  $D$ ,

где  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ . Займемся теперь асимптотикой величины

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{(z-x)} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дальнейшие рассуждения основаны на асимптотической формуле (90) для  $Q_n^2$  на отрезке  $\Delta$ .

Последовательно используя (90) и свойства  $\Psi$ -функции, преобразуем представление для  $I_1(z)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{2}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\Psi^+(x)^2 + \Psi^-(x)^2}{z-x} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \left( \frac{1}{\Psi^-(x)^2} + \frac{1}{\Psi^+(x)^2} \right) \frac{dx}{(z-x)\rho(x)\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} \\
 &= \frac{2+o(1)}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta)^2 \rho(\zeta) \sqrt{\zeta^2-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} (1+o(1)) \\
 &= 2G'(z)(1+o(1))
 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$  равномерно внутри  $D_R$ ,  $R > 1$ ,

где  $D_R = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| > R\}$ ,  $\Gamma_R = \partial D_R$ ,  $R > 1$ ,  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ . Таким образом,

$$\tilde{R}_n(z) = 2G'(z)(1+o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D. \tag{92}$$

Непосредственно из хода доказательства этого соотношения видно, что оно “выдерживает” дифференцирование любое число раз: для любого целого  $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_n^{(k)}(z) &= 2G^{(k+1)}(z)(1+o(1)) \\
 &\text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D;
 \end{aligned} \tag{93}$$

последнее соотношение важно для нас лишь постольку, поскольку его правая часть равномерно ограничена внутри  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ , а следовательно, – и в окрестности полюсов функции  $f$  в  $D$ .

**2.** Напомним, что  $\tilde{R}_n(z) = (Q_n \tilde{Q}_n \omega_m f - \tilde{P}_n)(z) = (Q_n \tilde{Q}_n F - \tilde{P}_n)(z)$ , где функция  $F = \omega_m f$  голоморфна в  $D$ , а полином  $\tilde{P}_n = P_n Q_n \omega_m$ . Величина  $A_j = F(a_j) \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ . Зафиксируем теперь произвольное  $j \in \{1, \dots, \ell\}$  и, тем самым, соответствующие ему  $a_j$  и  $m_j$ . В силу соотношений (92), (93) величина  $\tilde{R}_n^{(k)}(a_j) = 2G^{(k+1)}(a_j)(1 + o(1))$  для  $k = 0, \dots, m_j - 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . С другой стороны, для таких  $k$  величина  $\tilde{P}_n^{(k)}(a_j) = (P_n \tilde{Q}_n \omega_m)(a_j)^{(k)} = 0$ , поэтому в силу формулы Лейбница

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n^{(k)}(a_j) &= (Q_n \tilde{Q}_n F)^{(k)}(a_j) = (\omega_{m,n} \tilde{Q}_n^2 F)^{(k)}(a_j) \\ &= A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}^{(k)}(a_j) + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (\tilde{Q}_n^2 F)^{(s)} \omega_{m,n}^{(k-s)}(a_j). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение при  $k = 0$  в (92), получаем

$$A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}(a_j) = 2G'(a_j)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{где } G'(a_j) \neq 0, \quad (94)$$

аналогично из (93) для  $k = 1, \dots, m_j - 1$  имеем:

$$\begin{aligned} A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}^{(k)}(a_j) + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (\tilde{Q}_n^2 F)^{(s)} \omega_{m,n}^{(k-s)}(a_j) \\ = 2G^{(k+1)}(a_j)(1 + o(1)); \end{aligned} \quad (95)$$

в частности,

$$A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega'_{m,n}(a_j) + (\tilde{Q}_n^2 F)' \omega_{m,n}(a_j) = 2G''(a_j)(1 + o(1)). \quad (96)$$

Пусть  $a_{j,\nu}(n)$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ , — полюсы рациональной дроби  $f_n$ , соответствующие при  $n \rightarrow \infty$  точке  $a_j$ . Положим  $q_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_j} (z - a_{j,\nu}(n))$ ,  $\tilde{\omega}_n(z) = \omega_{m,n}(z)/q_n(z)$ . Тогда  $\tilde{\omega}_n(a_j) = \alpha_j(1 + o(1))$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\alpha_j = \omega_m^{(m_j)}(a_j)/m_j! \neq 0$ . Тем самым, величина  $A_j \alpha_j \tilde{\Psi}(a_j)^2 / 2G'(a_j) \neq 0, \infty$ ; здесь  $\tilde{\Psi} = \Psi/\omega_m$ ,  $G'(a_j) \neq 0$ . Пусть

$$\lambda_j = \lambda_j(n) = - \left( - \frac{A_j \alpha_j \tilde{\Psi}(a_j)^2}{2G'(a_j)} \right)^{2/m_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -|\Phi(a_j)|^{2n/m_j} \exp \left\{ \frac{i2ng^*(a_j)}{m_j} \right\} \exp \left\{ \frac{2S(a_j)}{m_j} \right\} \\ &\times \left( - \frac{A_j \alpha_j}{2G'(a_j)} \frac{\prod_m}{\omega_m}(a_j) \right)^{2/m_j} \end{aligned}$$

и из (94) вытекает, что  $q_n(a_j)\lambda_j^{m_j} = 1 + o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $o(1) = o(\delta^n)$ . Так как для достаточно больших  $n$  все нули полиномов  $\tilde{Q}_n$  и их производных лежат в произвольной наперед заданной окрестности  $U$  отрезка  $\Delta$ , множество  $\{a_1, \dots, a_\ell\} \subset \mathbb{C} \setminus \bar{U}$ , то

$$\left| \frac{(F\tilde{Q}_n^2)'(z)}{\tilde{Q}_n^2(z)} \right| = O(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \mathbb{C} \setminus \bar{U}.$$

Рассуждая по индукции, получаем отсюда, что и для любого  $k = 2, \dots, m_j$

$$\left| \frac{(F\tilde{Q}_n^2)^{(k)}(z)}{\tilde{Q}_n^2(z)} \right| = O(n^k) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \mathbb{C} \setminus \bar{U}.$$

Модуль величины  $\lambda_j(n)$  растет со скоростью геометрической прогрессии при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_j(n)|^{1/n} = |\Phi(a_j)|^{2/m_j} > 1.$$

Поэтому из (96) вытекает, что  $q'_n(a_j)\lambda_j^{m_j-1} = (q'_n(a_j)\lambda_j^{m_j})/\lambda_j = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где, как обычно,  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ . Вновь рассуждая по индукции, получаем из (94) и (95), что  $q_n^{(k)}(a_j)\lambda_j^{m_j-k} = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $k = 2, \dots, m_j - 1$ .

Пусть теперь  $p_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_j}(z - z_{\nu,n})$ , где  $z_{\nu,n} = \lambda_j(n)(a_j - a_{j,\nu}(n))$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ . Тогда из установленных выше асимптотических соотношений вытекает, что  $p_n(z) = z^{m_j} - 1 + o(1)$ . Следовательно, при надлежащей перенумерации точек  $z_{\nu,n}$  — нулей  $p_n$  — имеем:  $z_{\nu,n} = \varepsilon_j^\nu + o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\varepsilon_j = e^{2\pi i/m_j}$ ,  $o(1) = o(\delta^n)$ . Отсюда уже получаем, что

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}}(1 + o(1)) \tag{97}$$

при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ .

Здесь

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\
 B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = |\Phi(a_j)|^{1/m_j} e^{ig^*(a_j)/m_j}, \\
 |B_j| &= |\Phi(a_j)|^{1/m_j} > 1, \\
 C_j &= e^{-2S(a_j)/m_j} \left( -\frac{2G'(a_j)}{A_j\alpha_j} \right)^{1/m_j} \\
 &\quad \times \frac{(-2)^{m/m_j} \Phi(a_j)^{m/m_j} \prod_{s=1}^{\ell} \Phi(a_s)^{m_s/m_j}}{\prod_{s=1}^{\ell} (1 - \Phi(a_s)\Phi(a_j))^{2m_s/m_j}}, \tag{98}
 \end{aligned}$$

а величины  $A_j$  и  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , конечны, отличны от нуля и зависят только от  $f$ :

$$A_j = (f\omega_m)(a_j) \neq 0, \quad \alpha_j = \frac{\omega_m^{(m_j)}(a_j)}{m_j!} \neq 0, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Постоянная  $C_j$  связана с геометрическим расположением  $j$ -го полюса функции  $f$  относительно отрезка  $\Delta$  и других полюсов  $f$ ; величина  $1/B_j$  характеризует (геометрическую) скорость сходимости полюсов  $f_n$  к точке  $a_j$  при  $n \rightarrow \infty$  и не зависит от других полюсов  $f$ ; наличие  $\varepsilon_j$ ,  $\varepsilon_j^{m_j} = 1$ , обеспечивает то асимптотически правильное расположение полюсов  $f_n$  по отношению к притягивающей точке  $a_j$ , о котором говорилось во введении.

Теорема 3 доказана.

Формулы (97), (98) полностью описывают асимптотическое поведение полюсов рациональных дробей  $f_n$ , находящихся вблизи полюсов  $f$  в  $D$ .

### 3. Перейдем к доказательству следствий.

Справедливость следствия 1 вытекает непосредственно из хода доказательства теоремы 3 (см. формулы (91)–(93)).

Утверждение следствия 2 вытекает из того, что в его условиях при всех достаточно больших  $n$  на отрезке  $\Delta$  расположены  $n - m$  простых нулей полинома  $Q_n(x; f)$ . Поскольку в силу теоремы 3 для оставшихся  $m$  нулей справедливы асимптотические формулы вида (97), (98), то при  $j = 1, \dots, \ell$  и  $\nu, \mu = 0, \dots, m_j - 1$ ,  $\nu \neq \mu$ , имеем

$$|a_{j,\nu}(n) - a_{j,\mu}(n)| = \frac{|C_j| \cdot |\varepsilon_j^{\nu-\mu} - 1|}{|B_j^n|} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как  $\varepsilon_j^{\nu-\mu} \neq 1$  при  $\nu \neq \mu$ , то из последней асимптотической формулы вытекает, что при достаточно больших  $n$  и оставшиеся  $m$  нулей знаменателя  $f_n$  простые.

Докажем следствие 3. Из теоремы Сохоцкого получаем, что для  $x \in \Delta$

$$\hat{\rho}^+(x) = I(x) + i \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \hat{\rho}^-(x) = I(x) - i \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(t) - \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Аналогично, для функции

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t)}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

имеем

$$u^+(x) = J(x) - \frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} = J(x) + \frac{i \log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$u^-(x) = J(x) - \frac{i \log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Положим  $\theta(x) = \sqrt{1-x^2} J(x)/2$ . Тогда в условиях следствия 3 величина  $\theta(x)$  вещественна при всех  $x \in \Delta$ , а для функции Сегё  $S(z) = w(z)u(z)/2$  и функции  $H(z) = \exp\{S(z)\}$  получаем

$$S^+(x) = i\theta(x) - \frac{1}{2} \log \rho(x), \quad S^-(x) = -i\theta(x) - \frac{1}{2} \log \rho(x),$$

$$H^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \exp\{i\theta(x)\}, \quad H^-(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \exp\{-i\theta(x)\}. \quad (99)$$

Для функции  $\mathcal{F}$  (см. (76)) при  $x \in \Delta$  имеем с учетом принятого здесь соглашения относительно полюсов функции  $f$ :

$$\mathcal{F}^+(x) = e^{in\varphi} \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{e^{i\varphi} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)e^{i\varphi}} \right)^{m_j},$$

$$\mathcal{F}^-(x) = e^{-in\varphi} \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{e^{-i\varphi} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)e^{-i\varphi}} \right)^{m_j},$$

где  $\varphi = \varphi(x) = \arccos x$ . Нетрудно видеть, что так как рациональная функция  $r$  вещественна, то при  $x \in \Delta$

$$\mathcal{F}^+(x) = e^{ni\varphi(x)+i\alpha(x)}, \quad \mathcal{F}^-(x) = e^{-ni\varphi(x)-i\alpha(x)}, \quad (100)$$

где  $\alpha(x) \in \mathbb{R}$  при  $x \in \Delta$ ,

$$\begin{aligned} \cos \alpha(x) = \frac{1}{2} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{e^{i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{i \arccos x}} \right)^{m_j} \right. \\ \left. + \prod_{j=1}^{\ell} \left( \frac{e^{-i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{-i \arccos x}} \right)^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

Перепишем асимптотическую формулу для полиномов  $Q_n$  на отрезке  $\Delta$  следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_n(x; f) &= \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \\ &= \mathcal{F}^+(x)H^+(x) + \mathcal{F}^-(x)H^-(x) + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись представлениями (99) и (100) для граничных значений функций  $H$  и  $\mathcal{F}$  на отрезке  $\Delta$ , получаем

$$\begin{aligned} Q_n(x; f) &= \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \left\{ e^{ni\varphi(x)+i\alpha(x)+i\theta(x)} + e^{-ni\varphi(x)-i\alpha(x)-i\theta(x)} \right\} + o(1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x) + \alpha(x)) + o(1), \end{aligned}$$

где  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ ,

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Следствие 3 доказано.

## § 7. Случай нескольких отрезков

1. В этом параграфе мы коротко изложим результаты, относящиеся к случаю, когда носитель меры  $\sigma$  марковской функции (5) состоит из нескольких (непересекающихся) отрезков:  $S = \bigsqcup_{j=1}^p \Delta_j \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 2$ . В [20] Е. А. Рахманов получил для такого случая аналог теоремы 1 для мероморфных функций вида  $f = \hat{\sigma} + r$ ,

где  $r$  – вещественная рациональная функция, все полюсы которой лежат вне отрезка  $\Delta$  – выпуклой оболочки  $S$ . В той же работе [20] доказано, что уже для двух отрезков и комплексной рациональной функции  $r$  аналог теоремы 1 не имеет места.

**ТЕОРЕМА 1'.** Пусть  $\sigma$  – положительная борелевская мера на  $\mathbb{R}$ , носитель  $S = \text{Supp } \sigma$  которой состоит из нескольких отрезков,  $\Delta$  – выпуклая оболочка  $S$  и  $f = \hat{\sigma} + r$ , где  $r$  – произвольная вещественная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ , и  $r(\infty) = 0$ . Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к  $f$  равномерно в сферической метрике внутри области  $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ .

При этом, как и в теореме 1, к каждому полюсу  $f$  в  $\tilde{D}$  стремится ровно столько полюсов  $f_n$ , какова его кратность. Остальные полюсы  $f_n$  ведут себя следующим образом. Все предельные точки этих полюсов лежат на отрезке  $\Delta$ ; ассоциированная с полюсами  $f_n$  единичная<sup>12</sup> мера (слабо) сходится к равновесной мере компакта  $S$ , в каждой из  $p - 1$  (открытой) лакуны между отрезками при фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  может располагаться не больше чем по одному полюсу  $f_n$ , в “общем положении” такие полюсы  $f_n$  при  $n \rightarrow \infty$  всюду плотны в лакунах. Тем самым, в рассматриваемом случае “как правило” весь отрезок  $\Delta$  – выпуклая оболочка  $S$  – состоит из предельных точек полюсов  $f_n$ .

Используемый в настоящей работе метод исследования сильной асимптотики знаменателей  $Q_n(z; f)$  рациональных дробей  $f_n$  оказывается применим и для рассмотренного Е. А. Рахмановым случая, когда  $S = \bigsqcup_{j=1}^p \Delta_j$  в предположении, что мера  $\sigma$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на  $S$  и

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x+i0)}} > 0 \quad \text{на } S; \quad (101)$$

здесь  $h(z) = \prod_{j=1}^{2p} (x - e_j)$ ,  $e_1, \dots, e_{2p}$  – концы отрезков  $\{\Delta_j\}$ , в области  $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus S$  выбрана ветвь квадратного корня, которая положительна при положительных значениях аргумента, а весовая

<sup>12</sup>В условиях теоремы 1' все индексы  $n$  нормальны, тем самым, при каждом  $n$  рациональная функция  $f_n$  имеет ровно  $n$  полюсов.

функция  $\rho$  голоморфна и не обращается в нуль на  $S$ . Формулы сильной асимптотики для  $Q_n$  и в этом случае выражаются явно в терминах  $\Psi$ -функции – решения соответствующей специальной краевой задачи Римана – и вполне аналогичны (22<sub>1</sub>)–(22<sub>3</sub>). Однако при этом в дивизоре  $\Psi$ -функции неизбежно присутствуют “свободные” нули, число которых равно числу лакунов между отрезками, а их поведение при  $n \rightarrow \infty$  определяется проблемой обращения Якоби.

**2.** Пусть  $\mathfrak{R}$  – гиперэллиптическая риманова поверхность рода  $g = p-1$ , заданная уравнением  $w^2 = h(z)$ , где  $h(z) = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j)$ ,  $e_1 < \dots < e_{2g+2}$ . Будем считать, что  $\mathfrak{R}$  реализована как двулистное разветвленное в точках  $\{e_j\}$  накрытие римановой сферы  $\widehat{\mathbb{C}}$  таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему  $\Delta_j^+$  и нижнему  $\Delta_j^-$  берегам отрезков  $\Delta_j$ . Тем самым, над каждой точкой  $\widehat{\mathbb{C}}$ , за исключением точек ветвления  $\{e_j\}$ , лежат ровно две точки римановой поверхности, а каждому отрезку  $\Delta_j$  соответствует на  $\mathfrak{R}$  замкнутая аналитическая (в комплексной структуре  $\mathfrak{R}$ ) кривая  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, g+1$ , – цикл на  $\mathfrak{R}$ ; положим  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$ . Будем считать, что в  $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$  выбрана ветвь квадратного корня, удовлетворяющая условию  $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ . Функция  $w: w^2 = h(z)$  однозначна на  $\mathfrak{R}$ . Первым (открытым) листом  $D^{(1)}$  поверхности  $\mathfrak{R}$  будем считать тот, на котором  $w = \sqrt{h(z)}$ . На втором листе  $D^{(2)}$  имеем  $w = -\sqrt{h(z)}$ . Для точек римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  будем использовать обозначение  $\mathbf{z} = (z, w)$ , где  $w = \pm\sqrt{h(z)}$ ; при этом для точек первого листа  $z^{(1)} = (z, \sqrt{h(z)})$ , а для точек второго  $z^{(2)} = (z, -\sqrt{h(z)})$ . Область  $D^{(1)}$  будем, как правило, отождествлять с “физической” областью  $D$ . Для  $\mathbf{z} = z^{(1)}$  будем часто писать просто  $w(z)$  вместо  $w(\mathbf{z})$ ; тем самым, приобретает смысл и запись  $w^+(x) = \sqrt{h(x+i0)}$ ,  $x \in S$  (см. (101)). Каноническая проекция  $\text{pr}: \mathfrak{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  определяется соотношением  $\text{pr } \mathbf{z} = z$ , в частности  $\text{pr } D^{(1)} = \text{pr } D^{(2)} = D$ ,  $\text{pr } \Gamma = S$ .

Приведем некоторые стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, которые понадобятся нам в этом параграфе. В обозначениях и терминологии мы здесь придерживаемся в основном [19] (см. также [21], [22]).

Ориентируем кривые  $\Gamma_j$  так, что при обходе по  $\Gamma_j$  область  $D^{(1)}$  остается слева, а область  $D^{(2)}$  – справа. Примем ориентированные кривые  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, g$ , за  $a$ -циклы  $\mathbf{a}_j$  на  $\mathfrak{R}$  и стандартным образом [19] дополним их  $b$ -циклами  $\mathbf{b}_j$  до базиса гомологий  $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1, \dots, g}$  на  $\mathfrak{R}$ . Пусть  $\{d\Omega_k\}$  – соответствующий  $a$ -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов:

$$\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Матрица  $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1, \dots, g}$ , где  $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k$  –  $b$ -периоды базисных дифференциалов, является матрицей Римана: она симметрична,  $B_{kj} = B_{jk}$ , а ее мнимая часть положительно определена,  $\|\operatorname{Im} B_{jk}\| > 0$  (отметим, что в рассматриваемом здесь случае все  $B_{jk} \in i\mathbb{R}$ ). Функции

$$\Omega_k(\mathbf{z}) = \int_{e_{2g+1}}^{\mathbf{z}} d\Omega_k$$

определены на  $\mathfrak{R}$  однозначно по модулю их  $a$ - и  $b$ -периодов. Так как  $\Omega'_k(z) = p_k(z)/w(z)$ , где  $p_k$  – полином степени  $g - 1$ , то имеет смысл обозначение  $d\Omega_k^+(x) = p_k(x) dx/w^+(x)$  при  $x \in S$ .

Если в  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$  задана функция  $F(\mathbf{z})$ , то под  $F(\mathbf{x}+)$  понимаются ее предельные значения при  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ , если они существуют; аналогичный смысл придается и  $F(\mathbf{x}-)$  при  $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ ,  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ .

Фиксируем стандартный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g$  в  $\mathbb{R}^g$ :  $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$ . Тогда векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$  и образуют базис в  $\mathbb{C}^g$ . Факторпространство  $\mathbb{C}^g/\{N + \mathbf{B}\mathbf{M}\}$  по целочисленной решетке,  $N, M \in \mathbb{Z}^g$ , является  $2g$ -мерным вещественным тором  $\mathbb{T}^{2g}$  и называется многообразием Якоби  $\text{Jac}\mathfrak{R}$  римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ . Любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$  однозначно представим в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + N + \mathbf{B}\mathbf{M} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \pmod{\text{периодов}}$ ,  $0 \leq (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$ ,  $N, M \in \mathbb{Z}^g$ ; иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов дифференциалов  $\{d\Omega_k\}$  мы будем опускать и писать просто  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$ .

Неупорядоченные наборы точек  $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g)$ ,  $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$ , образуют  $g$ -ю симметрическую степень  $S^g\mathfrak{R}$  римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ .

Пусть  $\mathbf{z}_0$  – некоторая фиксированная точка<sup>13</sup>  $\mathfrak{R}$ . Вектор-функция  $A(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = (A_1, \dots, A_g)$  с координатами

$$A_k = A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \equiv \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

определяет отображение Абеля  $A: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$ . Если задан вектор  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_g) \in \text{Jac } \mathfrak{R}$ , то задача нахождения неупорядоченного набора точек  $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g \mathfrak{R}$ , для которого

$$A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = v_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g,$$

называется проблемой обращения Якоби. Проблема обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом. В дальнейшем неупорядоченный набор точек  $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g \mathfrak{R}$  будем называть дивизором и обозначать  $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ .

Для любых двух различных точек  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$  римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на  $\mathfrak{R}$ , за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно 1 и  $-1$ ; такой дифференциал называется нормальным. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его  $a$ -периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал  $a$ -нормированным абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать  $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ . Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Для таких дифференциалов будем использовать обозначение  $dG(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ , предполагая при этом, что вычеты в точках  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$  равны соответственно  $-1$  и 1. К подобным дифференциалам относится дифференциал комплексной функции Грина  $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + ig_D^*(z, \infty)$  (здесь  $g_D^*(z, \infty)$  – функция, гармонически сопряженная к функции Грина  $g_D(z, \infty)$ ) многосвязной области  $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ . Функция  $G_D(z, \infty)$  многозначна в  $D$  и

$$G_D(z, \infty) = \int_{e_{2g+1}}^z \frac{P_g(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D,$$

<sup>13</sup>В дальнейшем мы выбираем  $\mathbf{z}_0 = e_{2g+1}$ .

где  $P_g(z) = P_g(z; h) = z^g + \dots$  – вещественный полином, все нули которого лежат в лакунах  $(e_{2j}, e_{2j+1})$ ,  $j = 1, \dots, g$ . Дифференциал  $dG = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = P_g(z) dz/w(\mathbf{z})$  определен на всей римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ , имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  и  $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$  с вычетами соответственно  $-1$  и  $1$ .

Через  $\omega_k(z; D) = \omega(z; \Delta_k, D)$  будем обозначать гармоническую меру (в точке  $z \in D$ ) отрезка  $\Delta_k$  относительно области  $D$ .

**3.** Следуя предложенной в § 2 схеме изложения, обсудим сначала случай  $f = \widehat{\rho}$ , где

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{w^+(x)}, \quad (102)$$

компакт  $S$  состоит из нескольких отрезков, а весовая функция  $\rho$  голоморфна на  $S$  и удовлетворяет условию (101).

Зафиксируем произвольное  $n \in \mathbb{N}$  и рассмотрим на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  следующую краевую задачу Римана.

**ЗАДАЧА ( $\mathcal{R}'_1$ ).** При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq g$ , найти функцию  $\Psi = \Psi_n$  такую, что:

- 1°.  $\Psi$  (кусочно) мероморфна на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$ ;
- 2°. дивизор  $(\Psi) = (n-g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g - n\infty^{(1)}$ ;
- 3°. на  $\Gamma$  выполнено краевое условие:  $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$ .

В п. 2° точки  $\mathbf{z}_j$  – “свободные” нули  $\Psi$ -функции – зависят от  $n$ , под  $\Psi(\mathbf{x}+)$  в п. 3° понимаются предельные значения функции  $\Psi(\mathbf{z})$  при  $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ , аналогичный смысл придается и  $\Psi(\mathbf{x}-)$ . Функция  $\Psi$ , решающая задачу ( $\mathcal{R}'_1$ ), всегда существует, при этом так как род  $g = p - 1$  поверхности  $\mathfrak{R}$  положителен, то нули и полюсы  $\Psi$  на  $\mathfrak{R}$  оказываются связанными определенными соотношениями, аналогичными соотношениям Абеля для произвольной мероморфной функции на  $\mathfrak{R}$ , а дивизор  $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$  является решением определенной проблемы обращения Якоби. Анализ данных этой проблемы показывает, что при оговоренном выше условии (101) на вес  $\rho$  ее решение всегда таково, что  $z_j = \text{pr } \mathbf{z}_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ , т.е. в каждой замкнутой лакуне между отрезками  $\{\Delta_j\}$  лежит ровно по одной точке  $\text{pr } \mathbf{z}_j \in \mathbb{R}$ . Значит, дивизор  $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$  неспециальный,

а следовательно, такая проблема обращения Якоби имеет единственное решение. Отсюда вытекает, что  $\Psi$ -функция, решающая задачу  $(\mathcal{R}'_1)$ , единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  полюс в точности  $n$ -го порядка. Нетрудно видеть, что для любого  $z \in \mathbb{C} \setminus S$  выполняется соотношение  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ , где  $\text{const} \neq 0$ . В дальнейшем мы будем придерживаться следующей нормировки<sup>14</sup>  $\Psi$ -функции:  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ . Нетрудно найти и явный вид этой функции. При  $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$  и в предположении, что  $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$ , имеем (ср. с (21)):

$$\Psi(z^{(1)}) = \Phi(z)^{n-g} e^{A(z;\rho)} \mathcal{F}_n(z), \quad (103)$$

где  $\Phi(z) = e^{G_D(z, \infty)}$  – (многозначная) отображающая функция,

$$A(z; \rho) = w(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x)}{x - z} \frac{dx}{w^+(x)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \lambda_k \int_{\Delta_k} \frac{1}{x - z} \frac{dx}{w^+(x)} \right),$$

$\lambda_k = 2 \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x)$  (при  $g = 0$   $A(z; \rho)$  – функция Серё),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(z) &= \exp \left( \sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(1)}) + \frac{1}{2} c_g + \sum_{k=1}^g \theta_k \Omega_k(z^{(1)}) \right) \\ &= \exp(\varphi_n(z)), \end{aligned} \quad (104)$$

величины  $\theta_k = \theta_k(n) = \{n\omega_k(\infty)\} - g$  (здесь и ниже в (105)  $\{\cdot\}$  обозначает дробную часть соответствующего числа), дивизор  $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ , где  $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n)$ , является (единственным) решением проблемы обращения Якоби

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) &= \sum_{s=1}^g \left\{ \left( n - \frac{1}{2} \right) \omega_s(\infty; D) \right\} B_{ks} + \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x), \\ &k = 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (105)$$

величина  $c_g = c_g(n) = \prod_{j=1}^g (e_{2g+1} - z_j)$ .

<sup>14</sup>Как уже отмечалось выше, таким условием  $\Psi$ -функция определяется однозначно с точностью до знака  $\pm$ .

Представление для  $\Psi(z^{(2)})$  при  $z^{(2)} \in D^{(2)}$  следует непосредственно из (103) и соотношения  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$  при  $z \in D$ . Так как функция  $\rho$  голоморфна и отлична от нуля на  $S$ , то правая часть представления (103) имеет смысл и при  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$  для дивизора  $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ , удовлетворяющего системе уравнений (105). Тем самым, под функцией  $\Psi(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$ , естественно понимать правую часть представления (105). Аналогичного соглашения будем придерживаться и для функции  $\Psi(\mathbf{z})$  при  $\mathbf{z} \in D^{(2)} \sqcup \Gamma$ .

При подходящей нормировке полиномов  $Q_n(z; \hat{\rho})$  – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции  $f = \hat{\rho}$  – их сильная асимптотика внутри области  $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$  и на компакте  $S$  описывается в терминах  $\Psi$ -функции, решающей задачу  $(\mathcal{R}'_1)$ , следующим образом.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1'.** Пусть голоморфная на  $S$  функция  $\rho$  удовлетворяет условию (101),  $\Psi$  – решение задачи  $(\mathcal{R}'_1)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при подходящей нормировке полиномов  $Q_n(z; \hat{\rho})$  имеем:

- 1°.  $Q_n(z; \hat{\rho}) = \Psi(z)(1 + o(1))$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно внутри  $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ ;
- 2°.  $Q_n(x; \hat{\rho}) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $S$ .

Здесь  $\Psi(z) = \Psi(z^{(1)})$ , под  $\Psi^+(x)$  ( $\Psi^-(x)$ ) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения  $\Psi(z)$  на  $S$ ; величина  $o(1) = o(\delta^n)$ , где  $\delta < 1$ . Функция  $\Psi$ , решающая задачу  $(\mathcal{R}'_1)$ , имеет в точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  полюс в точности  $n$ -го порядка. Так как  $\deg Q_n = n$  при всех  $n$  и  $\Psi(z^{(1)})/z^n \rightarrow \varkappa_n \neq 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , где  $\varkappa_n \in \mathbb{R}$ , то естественно нормировать  $Q_n$  условием  $Q_n(z) = \varkappa_n z^n + \dots$ . С помощью представления (103) величину  $\varkappa_n$  нетрудно найти и в явном виде, при этом, так как  $\varkappa_n \in \mathbb{R}$ , можно считать, что  $\varkappa_n > 0$ ; таким выбором знака у  $\varkappa_n$  однозначно определяется и сама  $\Psi$ -функция.

Отметим, что сильная асимптотика полиномов  $Q_n$  в лакунах между отрезками нам здесь не понадобится, хотя она также может быть описана в терминах, связанных с римановой поверхностью  $\mathfrak{R}$  (так как асимптотическое поведение нулей  $Q_n$ , расположенных в лакунах между отрезками, подчиняется определенной динамической системе; см. [17] и [20]).

4. Перейдем теперь к общему случаю  $f = \widehat{\rho} + r$ , где функция  $\rho$  удовлетворяет условию (101) и голоморфна на  $S$ , а функция  $r \in \mathbb{R}(z)$  и не имеет полюсов на  $\Delta$  – выпуклой оболочке  $S$ . Пусть  $a_1, \dots, a_\ell$  – полюсы  $f$  в  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ ,  $m_1, \dots, m_\ell$  – их кратности.

Рассмотрим на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА  $(\mathcal{R}'_2)$ . При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq g$ , найти функцию  $\Psi = \Psi_n$  такую, что:

- 1°.  $\Psi$  (кусочно) мероморфна на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$ ;
- 2°. дивизор  $(\Psi) = (n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g + m_1 a_1^{(1)} + \dots + m_\ell a_\ell^{(1)} - m_1 a_1^{(2)} - \dots - m_\ell a_\ell^{(2)} - n\infty^{(1)}$ ;
- 3°. на  $\Gamma$  выполнено краевое условие:  $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$ .

Как и в задаче  $(\mathcal{R}'_1)$ , точки  $\mathbf{z}_j$  в п. 2° зависят от  $n$ . Смысл обозначений  $\Psi(\mathbf{x}+)$  и  $\Psi(\mathbf{x}-)$  – тот же, что и выше. При оговоренных выше условиях на  $\rho$  и  $r$  функция  $\Psi$ , решающая задачу  $(\mathcal{R}'_2)$ , всегда существует, при этом дивизор  $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$  оказывается единственным решением некоторой проблемы обращения Якоби, кроме того,  $z_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$  при  $j = 1, \dots, g$ , т.е. в каждой замкнутой лакуне между  $\{\Delta_j\}$  лежит ровно по одной точке  $z_j = \text{rg } \mathbf{z}_j$ . Функция, решающая задачу  $(\mathcal{R}'_2)$ , единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  полюс в точности  $n$ -го порядка. Для любого  $z \in \mathbb{C} \setminus S$  выполняется соотношение  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ , где  $\text{const} \neq 0$ . Как и ранее, мы придерживаемся следующей нормировки  $\Psi$ -функции:  $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ . Если условиться, что  $\Psi(z^{(1)})/z^n \rightarrow \varkappa_n > 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , то последним тождеством  $\Psi$ -функция определяется однозначно. По сравнению с задачей  $(\mathcal{R}'_1)$  явный вид этой функции претерпевает следующие изменения: в правую часть (103) надо добавить множитель

$$\Pi_m(z) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega(a_s^{(1)}, a_s^{(2)}; z^{(1)}) \right\}$$

(здесь  $m = \sum_{s=1}^{\ell} m_s$  – полное число полюсов  $f$  в  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ ), а в правую часть (105) – удвоенное слагаемое  $\sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega_k(a_s^{(1)})$ . В итоге получаем, что при  $z \in \mathbb{C} \setminus S$

$$\Psi(z^{(1)}) = \Phi(z)^{n-g} e^{A(z;\rho)} \mathcal{F}_n(z) \Pi_m(z),$$

где дивизор  $\mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$  является (единственным) решением следующей проблемы обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) = \sum_{s=1}^g \left\{ \left( n - \frac{1}{2} \right) \omega_s(\infty; D) \right\} B_{ks} + \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x) + 2 \sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega_k(a_s^{(1)}), \quad k = 1, \dots, g.$$

В терминах  $\Psi$ -функции, решающей задачу  $(\mathcal{R}'_2)$ , асимптотическое поведение полиномов  $Q_n(z; f)$ , нормированных условием  $Q_n(z; f) = z_n z^n + \dots$ , описывается так.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'.** Пусть  $f = \hat{\rho} + r$ , где голоморфная на  $S$  функция  $\rho$  удовлетворяет условию (101), вещественная рациональная функция  $r$  не имеет полюсов на  $\Delta$  и  $r(\infty) = 0$ . Если  $\Psi$  – решение задачи  $(\mathcal{R}_2)$  при  $n \in \mathbb{N}$ , то для полиномов  $Q_n(z; f)$  имеем:

$$1^\circ. Q_n(z; f) = \Psi(z)(1 + o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \tilde{D}', \quad (22'_1)$$

$$2^\circ. Q_n(x; f) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } S, \quad (22'_2)$$

где  $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ ,  $\tilde{D}' = \tilde{D} \setminus \{\text{полюсы функции } f\}$ , величина  $o(1) = o(\delta^n)$ ,  $\delta < 1$ .

Формула п. 2° сильной асимптотики для полиномов  $Q_n(x; f)$  на  $S$  лежит в основе доказательства следующего утверждения об асимптотическом поведении полюсов  $f_n$  в окрестности кратного полюса  $f$ .

**ТЕОРЕМА 3'.** Пусть в условиях предложения 2' точка  $a_j \in D$  – полюс функции  $f$  кратности  $m_j \geq 1$ ,  $a_{j,\nu}(n)$ ,  $\nu = 1, \dots, m_j$ , – соответствующие точке  $a_j$  при  $n \rightarrow \infty$  полюсы  $f_n$ . Тогда

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1 + o(\delta^n)) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \nu = 1, \dots, m_j, \quad (22'_3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\ B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = e^{G(a_j)/m_j}, \quad |B_j| > 1, \\ C_j &= C_j(n) = e^{-2A(a_j;\rho)/m_j} \left( -\frac{2G'(a_j)r_{n,g}(a_j)}{A_j\alpha_j} \right)^{2/m_j} \\ &\quad \times e^{2gG(a_j)/m_j - 2\varphi_n(a_j)/m_j} \left( \frac{m_j!}{\prod_m^{(m_j)}(a_j)} \right)^{2/m_j}. \end{aligned}$$

Здесь функция  $r_{n,g}(z) = P_g(z)/\prod_{j=1}^g(z - z_j)$  и, тем самым, зависит от  $n$ , комплексные постоянные  $A_j = (f\omega_m)(a_j) \neq 0$ ,  $\alpha_j = \omega_m^{(m_j)}(a_j)/m_j! \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , зависят только от  $f$ , функция  $\varphi_n$  определена соотношением (104).

### Список литературы

- [1] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П., *Аппроксимации Паде*. — М.: Мир, 1986.
- [2] Чебышёв П. Л., “О непрерывных дробях” // *Ученые записки Имп. Академии Наук*, 1855, **III**, 636–664. (Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948, 103–126.)
- [3] Марков А. А., “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues” // *Acta Math.*, 1895, **19**, 93–104. (Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*. М.: Гостехиздат, 1948, 106–119.)
- [4] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **97 (139)**, 607–629.
- [5] Рахманов Е. А., “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов” // *Матем. сб.*, 1977, **103 (145)**, 237–252.
- [6] Рахманов Е. А., “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II” // *Матем. сб.*, 1982, **118 (160)**, 104–117.
- [7] Гончар А. А., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1982, **118 (160)**, 535–556.

- [8] Гончар А. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике” // *Математические структуры – вычислительная математика – математическое моделирование*. Т. 2. София, 1984, 29–35.
- [9] Бернштейн С. Н., *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*. — Харьков: ОНТИ, 1937.
- [10] Ахиезер Н. И., “Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах” // *Докл. АН СССР*, 1960, **134**(1), 9–12.
- [11] Ахиезер Н. И., Томчук Ю. Я., “К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах” // *Докл. АН СССР*, 1961, **138**(4), 743–746.
- [12] Ахиезер Н. И., “Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов” // *Докл. АН СССР*, 1961, **141**(2), 263–266.
- [13] Nuttall J., “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials” // *J. Approx. Theory*, 1984, **42**, 299–386.
- [14] Nuttall J., “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation” // *Constr. Approx.*, 1990, **6**(2), 157–166.
- [15] Суетин С. П., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций” // *Матем. сб.*, 2000, **191**(9), 81–114.
- [16] Суетин С. П., “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда” // *УМН*, 2002, **57**(1), 45–142.
- [17] Суетин С. П., “Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций” // *Матем. сб.*, 2002, **193**(12), 81–114.
- [18] Аптекарев А. И., “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций” // *Матем. сб.*, 2002, **193**(1), 3–72.
- [19] Зверович Э. И., “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях” // *УМН*, 1971, **26**(1), 113–180.
- [20] Рахманов Е. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1977, **104** (146), 271–291.
- [21] Форстер О., *Римановы поверхности*. — М.: Мир, 1980.
- [22] Дубровин Б. А., “Гэта-функции и нелинейные уравнения” // *УМН*, 1981, **36**(2), 11–80.

## Содержание

§ 1. Введение . . . . .	3
§ 2. Формулировка основных результатов . . . . .	15
§ 3. Доказательство предложения 1 . . . . .	24
§ 4. Доказательство теоремы 2 . . . . .	28
§ 5. Доказательство предложения 2 . . . . .	40
§ 6. Доказательство теоремы 3 . . . . .	48
§ 7. Случай нескольких отрезков . . . . .	55
Список литературы . . . . .	65