В. А. Файзиев, Псевдохарактеры на свободных произведениях полугрупп, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 86–87

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 86—87

УДК 519.46

ПСЕВДОХАРАКТЕРЫ НА СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПОЛУГРУПП

В. А. Файзиев

Основной результат настоящей статьи связан с теорией отображений алгебраических структур, «близких» к гомоморфизмам, т. е. отображений S множеств M с бинарной операцией в семейство эндоморфизмов некоторого топологизированного объекта, для которых разность $S(g_1g_2) - S(g_1)S(g_2)$, $g_1, g_2 \in M$, остается в ограниченном или в некотором смысле малом множестве. С 1941 г., когда в [1] было установлено, что отображение одного банахова пространства в другое, «близкое» к линейному, является ограниченным возмущением линейного отображения, в этой теории появился ряд существенных результатов — как о неограниченных отображениях групп, «близких» к представлениям [2], так и о непрерывных отображениях компактных групп, «близких» к представлениям [3]. Результаты этих работ носили сходный характер: отображение, «близкое» к представлению, оказывалось либо представлением, либо его малым возмущением. В статье [4] повторен (другими методами) один из основных результатов статьи [3] и приведен пример матричнозначного отображения, «близкого» к представлению, но не являющегося малым возмущением представления группы. В той же статье [4] утверждается, что отображение аменабельной группы, «близкое» к представлению, является малым возмущением представления, но в доказательстве (а именно, в лемме 2 статьи [4]) инвариантное среднее от ограниченной непрерывной функции двух переменных, взятое по одному из переменных, рассматривается как непрерывная функция второго переменного (что не обязательно так даже для непрерывных функций, почти-периодических по каждому из переменных).

Оказывается, существование отображений, «близких» к представлениям, но не являющихся их малыми возмущениями, имеет алгебраическую природу. А именно, в докладе А. И. Штерна «Устойчивость представлений и псевдохарактеры» на Ломоносовских чтениях в МГУ в 1983 г. был введен новый алгебраический объект: псевдохарактером на полугруппе S называется вещественная функция φ на S, удовлетворяющая следующим условиям:

1) множество $\{\varphi(xy) - \varphi(x) - \varphi(y),\ x, y \in S\}$ ограничено;
2) $\varphi(x^n) = n\varphi(x)$ для любого натурального n и любого x из S;
3) $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для любых x, y из S.

В настоящей статье мы даем полное описание векторного пространства псевдохарактеров на свободных произведениях полугрупп.

Обозначим через F свободную полугруппу, и пусть X — некоторое множество ее свободных образующих. Два элемента v и w из F назовем сопряженными, если существуют такие $a, b \in F$, что $v = ab$ и $w = ba$. Отношение сопряженности есть отношение эквивалентности; обозначим его $\sim$. Пусть $v = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X$; тогда длиной элемента v назовем число $l(v) = n$.

Элемент $v \in F$ назовем простым, если он не является степенью другого элемента. Пусть $\mathscr{P}$ — множество простых элементов полугруппы F. Определим множества $H(v)$ «начал» v и $K(v)$ «концов» v следующим образом: если $l(v) = 1$, то $H(v) = K(v) = \varnothing$; если же $v = x_{i_1}\ldots x_{i_n}$ и $n > 1$, то

$$H(v) = \{x_{i_1}, x_{i_1}x_{i_2}, \ldots, x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}\}$$

и

$$K(v) = \{x_{i_2}\ldots x_{i_n}, x_{i_3}\ldots x_{i_n}, \ldots, x_{n-1}x_n, x_n\}.$$

Л е м м а 1. *Пусть $v \in \mathscr{P}$. Тогда существует такой элемент $w \in \mathscr{P}$, что $w \sim v$ и $H(w) \cap K(w) = \varnothing$.*

Множество $\mathscr{P}$ распадается на классы сопряженных элементов. Через P обозначим такое множество представителей этих классов, что $H(w) \cap K(w) = \varnothing$ для всех $w \in P$.

Л е м м а 2. *Всякому $w \in P$ соответствует псевдохарактер e_w, причем:* 1) $|e_w(xy) - e_w(x) - e_w(y)| \leqslant 2$ *для всех x, y из F;* 2) *если $l(x) < l(w)$, то $e_w(x) = 0$;* 3) *если $l(x) = l(w)$ и $x \nsim w$, то $e_w(x) = 0$; если $x \sim w$, то $e_w(x) = 1$.*

Пусть $v \in F$; положим $\overline{K}(v) = K(v) \cup \{v\}$, $\overline{H}(v) = H(v) \cup \{v\}$. Для каждой пары элементов u, v из F определим на P меры $\mu_{u,v}$; $\mu_{u,v,u}$ и $\nu_{u,v}$ следующим образом. Пусть $\mu_{u,v}(w) = 1$, если существуют такие a и b, что $a \in \overline{K}(u)$, $b \in \overline{H}(v)$ и $w = ab$; в противном случае $\mu_{u,v}(w) = 0$. Пусть $\mu_{u,v,u}(w) = 1$, если существуют такие c и d, что $c \in \overline{K}(u)$, $d \in \overline{H}(u)$ и $w = cvd$; во всех остальных случаях $\mu_{u,v,u}(w) = 0$. Пусть, наконец, $\nu_{u,v}(w) = \mu_{u,v}(w) + \mu_{v,u}(w) + \mu_{u,v,u}(w) + \mu_{v,u,v}(w) - \mu_{u,u}(w) - \mu_{v,v}(w)$; $w \in P$.

Пусть P_n есть множество $\{w \mid w \in P,\ l(w) = n\}$.

Лемма 3. *Всякая ограниченная функция τ на P_n, $n \geqslant 2$, продолжается до псевдохарактера φ_τ на F, причем $\varphi_\tau(w) = 0$ для всех $w \in \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$.*

Пусть $PX(S)$ — линейное пространство псевдохарактеров полугруппы S, $X(S)$ — подпространство, состоящее из обычных аддитивных характеров и $BPX(F)$ — подпространство в $PX(F)$, состоящее из псевдохарактеров, равных нулю на X. Ясно, что $PX(F) = X(F) \dotplus BPX(F)$.

Теорема 1. *Пространство $BPX(F)$ изоморфно пространству функций f на P, нулевых на P_1, ограниченных на каждом P_i, $i \geqslant 2$, для каждой из которых существует такое $\varepsilon > 0$, что $\left|\int f d\nu_{u,v}\right| \leqslant \varepsilon$ для всех u, v из F.*

Пусть A, B — полугруппы, и $A * B$ — их свободное произведение.

Лемма 4. *Любой псевдохарактер φ полугруппы A можно продолжить до такого псевдохарактера $\widetilde{\varphi}$ полугруппы $A * B$, что $\widetilde{\varphi}(b) = 0$ для всех $b \in B$.*

Пусть D — подполугруппа $A * B$, состоящая из элементов вида $a_1b_1 \ldots a_kb_k$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1, \ldots, k$. Ясно, что D — свободная полугруппа с множеством свободных образующих $M = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Лемма 5. *Пусть $\varphi \in BPX(D)$. Тогда φ можно продолжить до псевдохарактера $\widetilde{\varphi}$ полугруппы $A * B$ так, что $\widetilde{\varphi}(v) = 0$ для всех $v \in A \cup B$.*

Теорема 2. $PX(A * B) \cong PX(A) \dotplus PX(B) \dotplus BPX(D)$.

Псевдохарактером полугруппы с инволюцией $(S, *)$ назовем такой элемент $\varphi \in PX(S)$, что $\varphi(x^*) = -\varphi(x)$ для всех $x \in S$. Пусть $PX(S, *)$ — пространство псевдохарактеров на $(S, *)$. Пространство псевдохарактеров полугруппы с инволюцией $(F, *)$, нулевых на X, где $*$ — инволюция в F, переводящая произведение элементов из X в их произведение в обратном порядке, обозначим $BPX(F, *)$. Заметим, что множество P можно выбрать так, чтобы $P = P^*$.

Следствие 1. Пространство $BPX(F, *)$ изоморфно пространству функций f на P, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f = 0$ на P_1; 2) f ограничена на всех P_i, $i \geqslant 2$; 3) $f(w^*) = -f(w)$ для всех $w \in P$; 4) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\left|\int f d\nu_{u,v}\right| \leqslant \varepsilon$ для всех $u, v \in F$.

Если A и B — полугруппы с инволюциями $*_A$ и $*_B$ соответственно, то на $A * B$ существует единственная инволюция $*$, продолжающая $*_A$ и $*_B$. Эта инволюция индуцирует на D отображение γ:

$$\gamma(a_1b_1 \ldots a_kb_k) = a_k^{*_A} b_{k-1}^{*_B} \ldots a_2^{*_A} b_1^{*_B} a_1^{*_A} b_k^{*_B}.$$

Пусть $BPX(D, \gamma)$ — подпространство таких функций $f \in BPX(D)$, что $f(v^\gamma) = -f(v)$ для всех $v \in D$.

Следствие 2. $PX(A * B, *) \cong PX(A, *_A) \dotplus PX(B, *_B) \dotplus BPX(D, \gamma)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hyers D. H.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1941. V. 27, № 2.— P. 222—224. 2. *Штерн А. И.* // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1982. № 3.— С. 29—32. 3. *Harpe P., Karoubi M.* // Manuscr. Math.— 1977. V. 22, № 3.— P. 293—310. 4. *Kazhdan D.* // Israel Journ. Math.— 1982. V. 43, № 4.— P. 315—323.

Математический институт
с ВЦ АН ТаджССР

Поступило в редакцию
3 июля 1984 г.