V. M. Montlevich, On the submodularity of the profit function in a problem of transport planning,
Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2014, Issue 10, 48–54

УДК 519.8

В.М. Монтлевич[1]

О СУБМОДУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ ПРИБЫЛИ В ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПЕРЕВОЗОК

В статье исследуется возможность применения метода последовательных расчетов для решения транспортной задачи на максимум прибыли. Особенностью этой задачи является то, что множество потребителей заранее не определено и выбирается из более широкого множества возможных потребителей по критерию максимума прибыли. Прибыль рассчитывается на основе спроса потребителей и цен, которые определяются договором между потребителем и фирмой, выполняющей перевозки. Показано, что задача сводится к максимизации функции прибыли на булевой решетке всех подмножеств множества возможных потребителей. Доказана субмодулярность функции прибыли, чем обоснована применимость метода последовательных расчетов для решения задачи.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, частично упорядоченное множество, решетка, субмодулярность, супермодулярность, метод последовательных расчетов, задача размещения предприятий, транспортная задача.

Под супер- (суб) модулярностью понимается свойство функций, определенных на частично упорядоченных множествах, имеющих структуру решетки (любое двухэлементное подмножество имеет верхнюю и нижнюю грани) [1]. В частности, структуру решетки имеет множество 2^N, упорядоченное по включению, где N – конечное множество. Решетки такого типа называют булевыми.

Функция, определенная на 2^N, называется супер- (суб) модулярной, если для любых $x, y \in 2^N$ выполняется неравенство $f(x)+f(y) \leqslant f(x \bigcup y)+f(x \bigcap y)$, $(f(x)+ + f(y) \geqslant f(x \bigcup y)+f(x \bigcap y))$. Очевидно, супермодулярность *f(x)* эквивалентна субмодулярности *–f(x)*.

Супер- (суб) модулярные функции являются естественными моделями большого числа задач в различных областях математики: алгебре, теории графов, теории вероятностей, теории игр, дискретной оптимизации и т. д. Множество примеров таких задач приведено в [2, с. 238–241].

Систематическое изучение свойств супермодулярных функций позволило разработать эффективные методы решения экстремальных задач, в частности, метод последовательных расчетов [3; 4]. В последнее время изучаются экстремальные задачи с суб- и супермодулярными функциями на решетках, отличных от булевых [5–7]. Изучение этих классов задач привело к возникновению нового направления в дискретной оптимизации – супермодулярного программирования [8].

Монтлевич Владимир Михайлович (vlmont@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Широкий класс прикладных задач минимизации супермодулярных функций образуют задачи размещения предприятий, в которых супермодулярность целевой функции затрат определяется супермодулярностью транспортной подзадачи с переменным множеством источников [9–11].

В настоящей статье дается постановка транспортной задачи на максимум прибыли при нежестко заданном множестве потребителей и показывается, что она сводится к максимизации субмодулярной функции на множестве всех подмножеств множества возможных потребителей.

1. Постановка задачи

Пусть имеется m источников однородного товара с запасами $a_1, a_2, ..., a_m$ и n потенциальных потребителей, спрос которых равен $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц соответственно, все $a_i, b_j \geqslant 0$.

Далее, имеется посредник, который покупает товар в источниках, перевозит и продает его потребителям. Прибыль посредника c_{ij} зависит от цены покупки товара в источнике i, цены продажи потребителю j и затрат на перевозку единицы товара от i к j (транспортный тариф). Цель – определить множество потребителей и план перевозок, максимизирующие суммарную прибыль посредника, определяемую как разность между доходом от продажи товара потребителям и затратами на покупку и перевозку товара.

Введем обозначения. Пусть $I = \{1, 2, ..., m\}$ — множество источников, $J = \{1, 2, ..., n\}$ — множество потенциальных потребителей товара, $\omega \subseteq J$.
Для заданного подмножества потребителей ω определим функцию прибыли

$$F(\omega) = \max \sum_{i \in I} \sum_{j \in \omega} c_{ij} x_{ij}, \tag{1}$$

$$\sum_{j \in \omega} x_{ij} \leqslant a_i, \quad \text{при} \quad i \in I, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = b_j, \quad \text{при} \quad j \in \omega, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{4}$$

где $F(\omega) = 0$, если условия (1)–(2) несовместны, $F(\emptyset) = 0$.
Теперь задача максимизации прибыли от перевозки товара может быть сформулирована следующим образом:

$$F(\omega) \to \max, \tag{5}$$

$$\omega \in \Omega = 2^J, \tag{6}$$

где ω – подмножество потребителей, выбранных для обслуживания.

Особенностью функции $F(\omega)$ является то, что она, в отличие от аналогичных функций, встречающихся в задачах размещения предприятий, определена на множестве всех подмножеств множества потребителей, а не на множестве всех подмножеств множества источников.

Покажем, что функция $F(\omega)$ является субмодулярной на Ω.

Перейдем в (1)–(3) к двойственной задаче. Тогда

$$F(\omega) = \min \left\{ \sum_{i \in I} a_i u_i + \sum_{j \in \omega} b_j v_j \right\}, \tag{7}$$

где min берется при условиях:

$$u_i + v_j \geqslant c_{ij}, \ \ u_i \geqslant 0, \ i \in I, \ j \in \omega. \tag{8}$$

Запишем условия (8) в виде:

$$u_i \geqslant c_{ij} - v_j, \ \ u_i \geqslant 0, \tag{9}$$

т. к. они выполняются для всех $i \in I$, $j \in \omega$, то можно записать их в виде неравенств

$$u_i \geqslant \max_{j \in \omega} \{c_{ij} - v_j, 0\}, \ \ i \in I, \ j \in \omega, \tag{10}$$

т. е. $F(\omega) = \min \left\{ \sum\limits_{i \in I} a_i u_i + \sum\limits_{j \in \omega} b_j v_j \right\}$,
при условиях

$$u_i \geqslant \max_{j \in \omega} \{c_{ij} - v_j, 0\}, \ \ i \in I, \ j \in \omega.$$

Так как $a_i \geqslant 0$, то u_i в оптимальном плане принимают минимальные возможные значения:

$$u_i = \max_{j \in \omega} \{c_{ij} - v_j, 0\}, \ i \in I.$$

Тогда можно записать

$$F(\omega) = \min \varphi(\omega, v), \ \omega \in \Omega, \ v \in R^n,$$

где

$$\varphi(\omega, v) = \sum_{i \in I} a_i \max_{j \in \omega} (c_{ij} - v_j, 0) + \sum_{j \in \omega} b_j v_j,$$

и min берется по всем v_j, $j \in \omega$.

Пусть δ, $\gamma \in \Omega$, $\varepsilon = \delta \bigcap \gamma$ и $\sigma = \delta \bigcup \gamma$. Покажем, что для всех δ, $\gamma \in \Omega$ выполняется неравенство

$$F(\delta) + F(\gamma) - F(\sigma) - F(\varepsilon) \geqslant 0. \tag{11}$$

Пусть $\bar{v}$ и $\bar{\bar{v}}$ – оптимальные планы соответственно для $F(\delta)$ и $F(\gamma)$, т. е. $F(\delta) = \varphi(\delta, \bar{v})$, $F(\gamma) = \varphi(\gamma, \bar{\bar{v}})$. Определим допустимые планы $\tilde{v}$ и $\tilde{\tilde{v}}$ для $\varepsilon = \delta \bigcap \gamma$ и $\sigma = \delta \bigcup \gamma$ соответственно:

$$\tilde{v}_j = \max(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j), j \in \varepsilon,$$

$$\tilde{\tilde{v}}_j = \begin{cases} \bar{v}_j, & j \in \delta \backslash \varepsilon, \\ \bar{\bar{v}}_j, & j \in \gamma \backslash \varepsilon, \\ \min(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j), & j \in \varepsilon = \delta \bigcap \gamma. \end{cases} \tag{12}$$

Ясно, что значения переменных:

$$\tilde{v}_j, \tilde{\tilde{v}}_j, \tilde{u}_i = \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{v}_j, 0), \tilde{\tilde{u}}_i = \max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0)$$

являются допустимыми планами двойственной задачи для множеств $\varepsilon = \delta \bigcap \gamma$ и $\sigma = \delta \bigcup \gamma$ соответственно.

Из условий

$$\begin{aligned} &F(\delta) = \varphi(\delta, \bar{v}),\\ &F(\gamma) = \varphi(\gamma, \bar{\bar{v}}),\\ &F(\sigma) \leqslant \varphi(\sigma, \tilde{\tilde{v}}),\\ &F(\varepsilon) \leqslant \varphi(\varepsilon, \tilde{v}) \end{aligned}$$

получаем неравенство:

$$F(\delta) + F(\gamma) - F(\sigma) - F(\varepsilon) \geqslant \varphi(\delta, \bar{v}) + \varphi(\gamma, \bar{\bar{v}}) - \varphi(\sigma, \tilde{\tilde{v}}) - \varphi(\varepsilon, \tilde{v}). \tag{13}$$

Оценим значение правой части неравенства (13):

$$\varphi(\delta, \bar{v}) + \varphi(\gamma, \bar{\bar{v}}) - \varphi(\sigma, \tilde{\tilde{v}}) - \varphi(\varepsilon, \tilde{v}) = \sum_{i\in I} a_i \max_{j\in\delta}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0) + \sum_{j\in\delta} b_j \bar{v}_j +$$

$$+ \sum_{i\in I} a_i \max_{j\in\gamma}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0) + \sum_{j\in\gamma} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{i\in I} a_i \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{v}_j, 0) - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \tilde{v}_j -$$

$$- \sum_{i\in I} a_i \max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0) - \sum_{j\in\sigma} b_j \tilde{\tilde{v}}_j = \sum_{i\in I} a_i \Big[\max_{j\in\delta}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0) + \max_{j\in\gamma}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0) -$$

$$- \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{v}_j, 0) - \max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0)\Big] + \sum_{j\in\delta} b_j \bar{v}_j + \sum_{j\in\gamma} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \tilde{v}_j -$$

$$- \sum_{j\in\sigma} b_j \tilde{\tilde{v}}_j = A + B,$$

где $A = \sum\limits_{i\in I} a_i A_i$.

$$\begin{aligned} A_i = \max_{j\in\delta}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0) + \max_{j\in\gamma}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0) - \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{v}_j, 0) - \max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0),\\ B = \sum_{j\in\delta} b_j \bar{v}_j + \sum_{j\in\gamma} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \tilde{v}_j - \sum_{j\in\sigma} b_j \tilde{\tilde{v}}_j\ . \end{aligned} \tag{14}$$

Представим $\delta = (\delta\backslash\varepsilon) \bigcup \varepsilon$, $\gamma = (\gamma\backslash\varepsilon) \bigcup \varepsilon$, $\sigma = \delta \bigcup \gamma = (\delta\backslash\varepsilon) \bigcup (\gamma\backslash\varepsilon) \bigcup \varepsilon$, причем все подмножества в объединениях попарно не пересекаются. Тогда

$$B = \sum_{j\in\delta} b_j \bar{v}_j + \sum_{j\in\gamma} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \tilde{v}_j - \sum_{j\in\sigma} b_j \tilde{\tilde{v}}_j =$$

$$= \sum_{j\in\delta\backslash\varepsilon} b_j \bar{v}_j + \sum_{j\in\varepsilon} b_j \bar{v}_j + \sum_{j\in\gamma\backslash\varepsilon} b_j \bar{\bar{v}}_j + \sum_{j\in\varepsilon} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \max(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j) - \sum_{j\in\delta\backslash\varepsilon} b_j \bar{v}_j -$$

$$- \sum_{j\in\gamma\backslash\varepsilon} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \min(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j) = \sum_{j\in\varepsilon} b_j \bar{v}_j + \sum_{j\in\varepsilon} b_j \bar{\bar{v}}_j - \sum_{j\in\varepsilon} b_j \max(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j) -$$

$$-\sum_{j\in\varepsilon} b_j \min(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j) = \sum_{j\in\varepsilon} b_j(\bar{v}_j + \bar{\bar{v}}_j - \max(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j) - \min(\bar{v}_j, \bar{\bar{v}}_j)) = 0$$

(так как $\min\{a,b\} + \max\{a,b\} = a + b$ для всех a, b).

Покажем теперь, что $A_i \geqslant 0$ для всех $i \in I$. Пусть $\bar{A}_i = \max\limits_{j\in\delta}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0)$, $\bar{\bar{A}}_i = \max\limits_{j\in\gamma}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0)$. Т. к. $\tilde{v}_j \geqslant \bar{v}_j$ и $\tilde{v}_j \geqslant \bar{\bar{v}}_j$ для $j\in\varepsilon$, то $c_{ij} - \tilde{v}_j \leqslant c_{ij} - \bar{v}_j$ и $c_{ij} - \tilde{v}_j \leqslant c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j$ для $j\in\varepsilon$, откуда $\max\limits_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{v}_j, 0) \leqslant \min(\bar{A}_i, \bar{\bar{A}}_i)$. Тогда

$$A_i = \max_{j\in\delta}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0) + \max_{j\in\gamma}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0) - \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{v}_j, 0) - \max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0) \geqslant$$

$$\geqslant \bar{A}_i + \bar{\bar{A}}_i - \min(\bar{A}_i, \bar{\bar{A}}_i) - \max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0). \tag{15}$$

Рассмотрим выражение

$$\max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0) = \max\{\max_{j\in\delta\setminus\varepsilon}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0),\ \max_{j\in\gamma\setminus\varepsilon}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0),\ \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0)\}.$$

Из выражения (12) видно, что

$$c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j = c_{ij} - \bar{v} \quad \text{или} \quad c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j = c_{ij} - \bar{\bar{v}}$$

для всех $j \in \sigma$, откуда

$$\max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0) = \max\{\max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \bar{v}, 0), \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}, 0)\}.$$

Тогда

$$\max_{j\in\sigma}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0) = \max\{\max_{j\in\delta\setminus\varepsilon}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0), \max_{j\in\gamma\setminus\varepsilon}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0), \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \tilde{\tilde{v}}_j, 0)\} =$$

$$= \max\{\max_{j\in\delta\setminus\varepsilon}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0), \max_{j\in\gamma\setminus\varepsilon}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0), \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \bar{v}, 0), \max_{j\in\varepsilon}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}, 0)\} =$$

$$= \max\{\max_{j\in\delta}(c_{ij} - \bar{v}_j, 0), \max_{j\in\gamma}(c_{ij} - \bar{\bar{v}}_j, 0)\} = \max(\bar{A}_i, \bar{\bar{A}}_i). \tag{16}$$

Окончательно из (15) и (16) получаем

$$A_i \geqslant \bar{A}_i + \bar{\bar{A}}_i - \min(\bar{A}_i, \bar{\bar{A}}_i) - \max_{j\in\sigma}(\bar{A}_i, \bar{\bar{A}}) = 0.$$

Так как все $a_i > 0$, то из (14) $A \geqslant 0$, откуда

$$\varphi(\delta, \bar{v}) + \varphi(\gamma, \bar{\bar{v}}) - \varphi(\sigma, \tilde{\tilde{v}}) - \varphi(\varepsilon, \tilde{v}) \geqslant 0.$$

Следовательно, правая часть в выражении (13) неотрицательна, и неравенство (11) доказано, откуда следует, что $F(\omega)$ является субмодулярной функцией на Ω. Тем самым обосновывается применимость метода последовательных расчетов для решения задачи (5)–(6).

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

[2] Lovasz L. Submodular functions and convexity. Mathematical programming: the state of the art. Bonn, 1982. P. 235–257.

[3] Хачатуров В.Р. Математические методы регионального программирования. М.: Наука, 1989.

[4] Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности / В.Р. Хачатуров [и др.]. М.: Наука, 2000. 354 с.

[5] Хачатуров В.Р., Лорер В.Э. Исследование и минимизация супермодулярных функций на атомарных решетках. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 40 с.

[6] Хачатуров В.Р., Шахазизян А.Л. Исследование свойств и минимизация супермодулярных функций на решетке, являющейся прямым произведением цепей. М.: ВЦ АН СССР, 1985. 30 с.

[7] Хачатуров В.Р., Монтлевич В.М. Минимизация супермодулярных функций на дистрибутивных решетках. М.: ВЦ РАН, 1999. 48 с.

[8] Хачатуров В.Р., Хачатуров Роман В., Хачатуров Рубен В. Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 6. С. 999–1000

[9] Хачатуров В.Р. Модели и методы решения многоэкстремальных задач размещения с использованием свойств супермодулярных функций, заданных на булевых решетках // Алгоритмы и алгоритмические языки. Пакеты прикладных программ. Функциональное наполнение. М.: Наука, 1986, С. 63–98.

[10] Астахов Н.Д., Монтлевич В.М. О решении многоиндексных задач размещения алгоритмом последовательных расчетов // Изв. АН СССР. Сер.: Техническая кибернетика. 1988. № 3. С. 53–58.

[11] Монтлевич В.М. Задача размещения предприятий с типовыми мощностями и неделимыми потребителями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. № 10. С. 1491–1507.

References

[1] Birkhoff G. Lattice theory. M., Nauka, 1984, 566 p. [in Russian].

[2] Lovasz L. Submodular functions and convexity. Mathematical programming: the state of the art, Bonn, 1982, pp. 235–257.

[3] Khachaturov V.R. Mathematical methods of regional programming. M., Nauka, 1989, 302 p. [in Russian].

[4] V.R. Khachaturov [et al.] Combinatorial methods and algorithms for solving problems of discrete optimization with large dimensionality. M., Nauka, 2000, 354 p. [in Russian].

[5] Khachaturov V.R., Lorer V.E. Research and minimization supermodular functions on atomic lattices. M., VTs AN SSSR, 1987, 40 p. [in Russian].

[6] Khachaturov V.R., Shahazizyan A.L. Research of properties and minimization of supermodular functions on the lattice which is direct product of chains. M., VTs AN SSSR, 1985, 30 p. [in Russian].

[7] Khachaturov V.R., Montlevich V.M. Minimization of supermodular functions on distributive lattices. M., VTs AN SSSR, 1999, 48 p. [in Russian].

[8] Khachaturov V.R., Khachaturov Roman V., Khachaturov Ruben V. Optimization of supermodular function (supermodular Programming). *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz* [*Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*], 2012, Vol. 52, no. 6, pp. 999–1000 [in Russian].

[9] Khachaturov V.R. Models and methods of solution of multiextreme allocation problems using properties of supermodular functions defined on Boolean lattices. Algorithms and algorithmic languages. Packages of applied programs. Functional content. M., Nauka, 1986, pp. 63–98 [in Russian].

[10] Astakhov N.D., Montlevich V.M. About the solution of multiindex allocation problems by algorithm of consecutive calculations. *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika* [*Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics*], 1988, no. 3, pp. 53–58 [in Russian].

[11] Montlevich V.M. The allocation problem with standard production capacities and indivisible consumers. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz* [*Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*], 2000, Vol. 440, no. 10, pp. 1491–1507 [in Russian].

V.M. Montlevich[2]

ON THE SUBMODULARITY OF THE PROFIT FUNCTION IN A PROBLEM OF TRANSPORT PLANNING

In this paper the possibility of using the method of successive calculations to solve the transportation problem on the maximum profit is investigated. The feature of this problem is that a set of consumers isn't defined and gets out from wider set of possible consumers by the criterion of a maximum of profit. Profit is calculated on the basis of consumer demand and prices, which are determined by the contract between the consumer and the company carrying out transportation. It is shown that this problem is reduced to maximization of the profit function defined on the set of all subsets of consumers. The submodularity of profit function is proved, that justified application of method of successive calculations to solve this problem.

Key words: discrete optimization, partially ordered set, lattice, submodularity, supermodularity, method of consecutive calculations, plant location problem, transportation problem.

Статья поступила в редакцию 23/*IX*/2014.

The article received 23/*IX*/2014.

[2] *Montlevich Vladimir Mikhailovich* (vlmont@mail.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.