В. А. Скворцов, Об одном примере двойного ряда Хаара,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 3, 343–353

https://www.mathnet.ru/mzm6428

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ДВОЙНОГО РЯДА ХААРА

В. А. Скворцов

Для однократного ряда Хаара справедлива следующая обобщенная теорема единственности (см. [1], [2]).

ТЕОРЕМА. *Пусть для каждой точки* $x \in [0, 1]$ *найдется (зависящая от точки) сходящаяся к нулю подпоследовательность* $S_{N_k(x)}(x)$ *частичных сумм ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, *коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$\lim_{n_k \to \infty} a_{n_k}/\chi_{n_k}(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in [0, 1], \tag{1}$$

где $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ *— все те номера* n, *при которых* $\chi_n(x) \neq 0$ *в рассматриваемой точке* x. *Тогда все коэффициенты ряда равны нулю.*

Здесь мы покажем, что соответствующее утверждение не имеет места в случае двойного ряда Хаара, суммируемого по прямоугольникам. При этом аналогом условия (1) в двумерном случае естественно считать (см. [3], [4]) условие

$$\lim_{n_k + m_l \to \infty} a_{n_k, m_l}/\chi_{n_k, m_l}(x, y) = 0, \tag{2}$$

где (n_k, m_l) пробегает все значения, для которых $\chi_{n,m}(x, y) \neq 0$ в точке (x, y).

Основным результатом является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Существует двойной ряд Хаара*

$$\sum_{n, m=1}^{\infty} a_{n, m} \chi_{n, m}(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} a_{n, m} \chi_n(x) \chi_m(y), \tag{3}$$

не все коэффициенты которого равны нулю, такой что *в каждой точке (x, y) единичного квадрата выполняется условие* (2) *и для каждой точки (x, y) найдутся (зависящие от точки) возрастающие последовательности натуральных чисел $\{N_\nu(x, y)\}$ и $\{M_\nu(x, y)\}$, для которых соответствующие прямоугольные частичные суммы $S_{N_\nu(x,y), M_\nu(x,y)}(x, y)$ ряда* (3) *стремятся к нулю при* $\nu \to \infty$.

Этой теоремой усиливается результат Мовсисяна (см. [5]), в примере которого соответствующие прямоугольные суммы стремятся к нулю всюду на единичном квадрате, за исключением точек счетного множества горизонтальных отрезков.

Введем ряд обозначений. Прямоугольник вида

$$((i-1)/2^k < x < i/2^k,\ (j-1)/2^l < y < j/2^l) \qquad (4)$$
$$(1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ 1 \leqslant j \leqslant 2^l;\ k, l = 0, 1, 2, \ldots)$$

будем называть прямоугольником ранга (k, l) и обозначать через $r_{i,j}^{(k,l)}$ или просто $r^{(k,l)}$.

Ясно, что прямоугольник вида (4) есть декартово произведение соответствующих одномерных двоично-рациональных интервалов. На оси x к двоично-иррациональной точке x_0 сходится единственная последовательность вложенных одномерных двоично-рациональных интервалов, а к двоично-рациональной точке x_0 сходятся две такие последовательности (левая и правая). Назовем эти последовательности *основными* для координаты x_0. То же можно повторить для координаты y_0 на оси y.

Пусть для каждой координаты точки (x_0, y_0) выбрана одна из основных последовательностей. Тогда всевозможные декартовы произведения интервалов из выбранных последовательностей назовем основной двумерной последовательностью прямоугольников для точки (x_0, y_0).

Заметим, что в соответствии с этим определением к точке (x, y), обе координаты которой двоично-иррациональны, стягивается при $(k, l) \to \infty$ единственная основная двумерная последовательность, для каждого прямоугольника которой точка (x, y) является внутренней. Если же одна или обе координаты точки (x, y) являются двоично-рациональными, то к (x, y) стягиваются две или четыре основные последовательности, для каждого прямоугольника которых точка (x, y) является или внутренней или граничной. В каждой основной последовательности содержится один и только один прямоугольник $r^{(k,l)}$ ранга (k, l).

Из определения функций Хаара следует, что каждому $r^{(k,\,l)}$ соответствует единственная функция $\chi_{n_k,\,m_l}(x,\,y)$ $(2^{k-1} < n_k \leqslant 2^k,\ 2^{l-1} < m_l \leqslant 2^l)$, для которой этот прямоугольник является прямоугольником постоянства и функция на нем равна $\pm 2^{(k+l-2)/2}$ (при $k,\,l > 0$). Этим функциям также будем приписывать ранг $(k,\,l)$. Заметим, что носителями функций ранга $(k,\,l)$ будут прямоугольники ранга $(k-1,\ l-1)$ (при $k,\,l > 0$).

Каждой основной для точки $(x,\,y)$ последовательности прямоугольников $\{r^{(k,\,l)}\}$ соответствует последовательность функций $\{\chi_{n_k,\,m_l}(x,\,y)\}$ $(2^{k-1} < n_k \leqslant 2^k,$ $2^{l-1} < m_l \leqslant 2^l)$ с носителями на прямоугольниках $r^{(k-1,\,l-1)}$. Эту последовательность функций также назовем основной для точки $(x,\,y)$. Ясно, что в данной точке $(x,\,y)$ отличны от нуля лишь функции Хаара, входящие в основные последовательности для этой точки. Поэтому условие (2) можно заменить условием

$$\lim_{k+l\to\infty} a_{n_k,\,m_l}/\chi_{n_k,\,m_l}(x,\,y) = 0 \tag{2'}$$

(где $(k,\,l)$ — ранг функции $\chi_{n_k,m_l}(x,\,y)$) для каждой основной последовательности точки $(x,\,y)$.

Прямоугольники $r^{(k,\,l)}$ являются также интервалами постоянства частичной суммы

$$S_{2^k,\,2^l}(x,\,y) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=1}^{2^l} a_{n,\,m}\chi_{n,\,m}(x,\,y)$$

ранга $(k,\,l)$.

Введем специальное обозначение для постоянного значения, принимаемого суммой $S_{2^k,\,2^l}$ на прямоугольнике $r_{i,\,j}^{(k,\,l)}$, положив

$$S_{2^k,\,2^l}(r_{i,\,j}^{(k,\,l)}) = s_{i,\,j}^{(k,\,l)} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ \ 1 \leqslant j \leqslant 2^l). \tag{5}$$

Заметим, что коэффициент $a_{n_k,\,m_l}$ ряда (3) при функции $\chi_{n_k,\,m_l}$ ранга $(k,\,l)$ может рассматриваться в качестве коэффициента Фурье функции $S_{2^k,\,2^l}(x,\,y)$. Поэтому если носителем функции $\chi_{n_k,\,m_l}(x,\,y)$ $(k,\,l > 0)$ служит прямоугольник $r_{i,\,j}^{(k-1,\,l-1)}$, то в обозначениях (5) справедлива формула

$$a_{n_k, m_l} = \int_{r_{i,j}^{(k-1, l-1)}} S_{2^k, 2^l}(x, y)\, \chi_{n_k, m_l}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= (s_{2i-1, 2j-1}^{(k, l)} + s_{2i, 2j}^{(k, l)} - s_{2i-1, 2j}^{(k, l)} - s_{2i, 2j-1}^{(k, l)})\, 2^{(k+l-2)/2} \left| r_{2i, 2j}^{(k, l)} \right|, \qquad (6)$$

откуда для $x \in r_{i,j}^{(k-1, l-1)}$ и $k, l > 0$ получаем (см. (4)), что

$$\left| \frac{a_{n_k, m_l}}{\chi_{n_k, m_l}(x, y)} \right| =$$

$$= \frac{\left| s_{2i-1, 2j-1}^{(k, l)} + s_{2i, 2j}^{(k, l)} - s_{2i-1, 2j}^{(k, l)} - s_{2i, 2j-1}^{(k, l)} \right|}{2^{k+l}}. \qquad (7)$$

При $k = 0$, $l > 0$ справедлива формула

$$| a_{1, m_l} / \chi_{1, m_l}(x, y) | = | s_{1, 2j-1}^{(0, l)} - s_{1, 2j}^{(0, l)} | / 2^l, \qquad (8)$$

а при $l = 0$, $k > 0$ — формула

$$| a_{n_k, 1} / \chi_{n_k, 1}(x, y) | = | s_{2i-1, 1}^{(k, 0)} - s_{2i, 1}^{(k, 0)} | / 2^k. \qquad (9)$$

Приступим к построению примера ряда (3), доказывающего утверждение теоремы.

Искомый ряд мы построим, задав множество значений $s_{i,j}^{(k,l)}$ при всех k, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $1 \leqslant j \leqslant 2^l$. Легко проверить, что для того чтобы эти значения действительно задавали некоторый двойной ряд вида (3), необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\begin{aligned} 2s_{i,j}^{(k-1, l)} &= s_{2i-1, j}^{(k, l)} + s_{2i, j}^{(k, l)} \qquad (k > 0,\ l \geqslant 0), \\ 2s_{i,j}^{(k, l-1)} &= s_{i, 2j-1}^{(k, l)} + s_{i, 2j}^{(k, l)} \qquad (k \geqslant 0,\ l > 0) \end{aligned} \qquad (10)$$

для всех k и l и соответствующих i и j.

Зададим сначала числа $s_{p,q}^{(k, 2k)}$ для любого $k \geqslant 1$ и всех p, q в пределах $1 \leqslant p \leqslant 2^k$, $1 \leqslant q \leqslant 2^{2k}$. Тогда с помощью (10) мы получим значение сумм $s_{i,j}^{(k,l)}$ любого ранга (k, l).

Матрицу $(s_{p,q}^{(k, 2k)})$ порядка $2k \times 2^{2k}$, $k \geqslant 1$, зададим следующим образом. Номер строки q, $1 \leqslant q \leqslant 2^{2k}$ будем записывать в виде

$$q = 1 + \sum_{s=1}^{2k} \varepsilon_s 2^{2k-s}, \qquad \text{где} \quad \varepsilon_s = 0 \quad \text{или } 1 \cdot \qquad (11)$$

Положим при $q = 2j$

$$s_{p,\,2j}^{(k,\,2k)} = 0 \text{ при всех } p,\, j,\ 1 \leqslant p \leqslant 2^k,\ 1 \leqslant j \leqslant 2^{2k-1}. \quad (12)$$

Далее при фиксированном k для каждого $q = 2j - 1$ образуем множество чисел

$$I_k\,(2j-1) = I_k\,(q) = \\ = \{2^{k-1} \pm \varepsilon_2 2^{k-2} \pm \ldots \pm \varepsilon_{2\nu} 2^{k-1-\nu} \pm \ldots \pm \varepsilon_{2k-2}\}, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{2\nu}$ взяты из разложения (11). Очевидно, что все числа в множестве $I_k\,(q)$ положительны и не превосходят 2^k-1. Отметим ряд свойств множеств $I_k\,(q)$.

1) Если $i \in I_k\,(q)$, то $i+1 \notin I_k\,(q)$, т. е. множества $I_k\,(q)$ и $I_k\,(q)+1$ не пересекаются.

2) $I_k\,(8j-7) = I_k\,(8j-5) = 2I_{k-1}\,(2j-1)$.

Тем самым, в частности, $I_k\,(8j-7)$ состоит из четных чисел. Это равенство непосредственно проверяется, исходя из (11) и (13).

3) Расстояние между соседними точками $I_k\,(8j-7) = I_k\,(8j-5)$ не меньше 4. Это следует из того, что в разложении (11) для $8j-7$ (и $8j-5$) имеем $\varepsilon_{2k-2} = 0$.

4) $I_k\,(8j-3) = I_k\,(8j-1) = \\ = \{I_k\,(8j-7)-1)\} \cup \{I_k\,(8j-7)+1\}$.

В частности, отсюда видно, что $I_k\,(8j-3)$ состоит из нечетных чисел. Это равенство следует из того, что в разложении (12) для чисел $8j-3$ и $8j-1$ имеем $\varepsilon_{2k-2} = 1$, а значения $\varepsilon_{2\nu}$ при $\nu < k-1$ для этих чисел те же, что и для $8j-7$.

Положим теперь для $q = 2j - 1$

$$s_{p,\,q}^{(k,\,2k)} = -s_{p+1,\,q}^{(k,\,2k)} = 2^{2k-1-\sum_{\nu=1}^{k-1} \varepsilon_{2\nu}} \quad \text{при} \quad p \in I_k\,(q) \quad (14)$$

(в силу 1) определение корректно) и

$s_{p,\,q}^{(k,\,2k)} = 0$ при остальных p, т. е. при

$$p \notin I_k\,(q) \cup [I_k\,(q)+1]. \quad (15)$$

Установим ряд свойств чисел $s_{p,\,q}^{(k,\,2k)}$, из которых, в частности, будет следовать, что приведенное определение не противоречит равенствам (10).

Сначала по матрице $(s_{p,\,q}^{(k,\,2k)})$ и по формулам (10) найдем матрицы $(s_{i,\,j}^{(k,\,2k-1)})$, $(s_{i,\,j}^{(k,2k-2)})$, $(s_{i,\,j}^{(k,\,2k-3)})$. Зафиксируем i

и j ($1 \leqslant i \leqslant 2^{k-1}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{2k-3}$), для которых мы хотим найти значения $s_{2i-1, j}^{(k, 2k-3)}$ и $s_{2i, j}^{(k, 2k-3)}$. Пусть

$$j = 1 + \sum\nolimits_{s=1}^{'2k-3} \varepsilon_s 2^{2k-3-s}.$$

Отсюда легко получить двоичное разложение вида (11) для чисел $8j-7$, $8j-6$, . . ., $8j$.

Отметим, что в силу (12)

$$s_{2i, 8j-6}^{(k, 2k)} = s_{2i-1, 8j-6}^{(k, 2k)} = s_{2i, 8j-4}^{(k, 2k)} = s_{2i-1, 8j-4}^{(k, 2k)} = s_{2i, 8j-2}^{(k, 2k)} = \\ = s_{2i-1, 8j-2}^{(k, 2k)} = s_{2i, 8j}^{(k, 2k)} = s_{2i-1, 8j}^{(k, 2k)} = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим далее три возможных случая

а) $\qquad 2i \in I_k(8j-7) = I_k(8j-5).$

В этом случае в соответствии с (14), учитывая, что для $8j-7$ и $8j-5$ $\varepsilon_{2k-2} = 0$, получаем

$$s_{2i, 8j-7}^{(k, 2k)} = s_{2i, 8j-5}^{(k, 2k)} = 2^{2k-1-\sum\nolimits_{\nu=1}^{'k-2} \varepsilon_{2\nu}} = s.$$

Из 3) следует, что $2i-1 \notin I_k(8j-7)$ и $2i-2 \notin I_k(8j-7)$. Значит, $2i-1 \notin I_k(8j-7) \cup [I_k(8j-7)+1]$ и поэтому в силу (15)

$$s_{2i-1, 8j-7}^{(k, 2k)} = s_{2i-1, 8j-5}^{(k, 2k)} = 0.$$

Далее, в силу 4) в рассматриваемом случае $2i-1 \in I_k(8j-3)$, но $2i \notin I_k(8j-3)$. Значит,

$$\left.\begin{aligned} s_{2i-1, 8j-3}^{(k, 2k)} = s_{2i-1, 8j-1}^{(k, 2k)} &= 2^{2k-1-\sum\nolimits_{\nu=1}^{'k-2} \varepsilon_{2\nu-1}} = s/2, \\ s_{2i, 8j-3}^{(k, 2k)} = s_{2i, 8j-1}^{(k, 2k)} &= -s/2. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

В результате, с учетом (16) и (10) получаем, что в данном случае

$$s_{2i-1, 4j-3}^{(k, 2k-1)} = s_{2i-1, 4j-2}^{(k, 2k-1)} = 0,$$
$$s_{2i, 4j-3}^{(k, 2k-1)} = s_{2i, 4j-2}^{(k, 2k-1)} = s/2,$$
$$s_{2i-1, 4j-1}^{(k, 2k-1)} = s_{2i-1, 4j}^{(k, 2k-1)} = s/4,$$
$$s_{2i, 4j-1}^{(k, 2k-1)} = s_{2j, 4i}^{(k, 2k-1)} = -s/4.$$

Далее,

$$s_{2i-1, 2j-1}^{(k, 2k-2)} = 0, \qquad s_{2i, 2j-1}^{(k, 2k-2)} = s/2, \quad (18)$$
$$s_{2i-1, 2j}^{(k, 2k-2)} = s/4, \qquad s_{2i, 2j}^{(k, 2k-2)} = -s/4, \quad (19)$$
$$s_{2i-1, j}^{(k, 2k-3)} = s/8, \qquad s_{2i, j}^{(k, 2k-3)} = s/8. \quad (20)$$

b) $2i \notin I_k(8j-7)$; $\quad 2i-2 \in I_k(8j-7)$.

В этом случае в силу (14) и с учетом 1)

$$s_{2i-1,\,8j-7}^{(k,\,2k)} = s_{2i-1,\,8j-5}^{(k,\,2k)} = -s,$$
$$s_{2i,\,8j-7}^{(k,\,2k)} = s_{2i,\,8j-5}^{(k,\,2k)} = 0.$$

В силу 4) $2i-1 \in I_k(8j-3)$, но $2i \notin I_k(8j-3)$, и поэтому снова справедливы формулы (17). Учитывая (16), получаем в этом случае

$$s_{2i-1,\,4j-3}^{(k,\,2k-1)} = s_{2i-1,\,4j-2}^{(k,\,2k-1)} = -s/2,$$
$$s_{2i,\,4j-3}^{(k,\,2k-1)} = s_{2i,\,4j-2}^{(k,\,2k-1)} = 0,$$
$$s_{2i-1,\,4j-1}^{(k,\,2k-1)} = s_{2i-1,\,4j}^{(k,\,2k-1)} = s/4,$$
$$s_{2i,\,4j-1}^{(k,\,2k-1)} = s_{2i,\,4j}^{(k,\,2k-1)} = -s/4.$$

Далее,

$$s_{2i-1,\,2j-1}^{(k,\,2k-2)} = -s/2, \quad s_{2i,\,2j-1}^{(k,\,2k-2)} = 0, \tag{21}$$
$$s_{2i-1,\,2j}^{(k,\,2k-2)} = s/4, \quad s_{2i,\,2j}^{(k,\,2k-2)} = -s/4, \tag{22}$$
$$s_{2i-1,\,j}^{(k,\,2k-3)} = -s/8, \quad s_{2i,\,j}^{(k,\,2k-3)} = -s/8. \tag{23}$$

c) $\quad 2i \notin I_k(8j-7)$; $\quad 2i-2 \notin I_k(8j-7)$.

Заметим, что в этом случае также $2i-1 \notin I_k(8j-7)$ и $2i+1 \notin I_k(8j-7)$ (см. 2)). Тогда в силу 4) $2i-1 \notin I_k(8j-3)$, а также $2i \notin I_k(8j-3)$ и $2i-2 \notin I_k(8j-3)$. Отсюда следует, что в данном случае в силу (15) все рассматриваемые $s^{(k,\,2k)}$ равны нулю.

Отметим, что в каждом из трех возможных случаев (см. (20), (23) и случай c)) выполнено равенство

$$s_{2i-1,\,j}^{(k,\,2k-3)} = s_{2i,\,j}^{(k,\,2k-3)}. \tag{24}$$

Кроме того, из проведенных рассмотрений вытекает, что

$$\max_{p,\,q} |s_{p,\,q}^{(k,\,2k)}| = 2^{2k-1}, \quad \max_{p,\,q} |s_{p,\,q}^{(k,\,2k-1)}| = \max_{p,\,q} |s_{p,\,q}^{(k,\,2k-2)}| = 2^{2k-2}. \tag{25}$$

Покажем, что переход от матрицы $(s_{p,\,q}^{(k,\,2k)})$ к матрице $(s_{p,\,q}^{(k-1,\,2(k-1))})$ согласуется с равенством (10).

Прежде всего, если q, $1 \leqslant q \leqslant 2^{2(k-1)}$ четно, т. е. $q = 2j$, то по (12) $s_{i,\,2j}^{(k-1,\,2(k-1))} = 0$. Тот же результат мы получим, если для вычисления $s_{i,\,2j}^{(k-1,\,2(k-1))}$ воспользуемся формулой (10), и равенством (19) — в случае a), (22) — в случае в) и равенством всех соответствующих $s^{(k,\,2k)}$ нулю в случае c).

Пусть теперь $q = 2j - 1$.

Если $i \in I_{k-1}(2j-1)$ и, значит, в соответствии с (14) $s_{i,\,2j-1}^{(k-1,\,2(k-1))} = 2^{2k-3-\sum_{\nu=1}^{k-2}\varepsilon_{2\nu}}$, то в силу 2) $2i \in I_k(8j-7)$. Поэтому имеет место случай a). Тогда по (10) и (18) получим

$$s_{i,\,2j-1}^{(k-1,\,2(k-1))} = \frac{s}{4} = 2^{2k-3-\sum_{\nu=1}^{k-2}\varepsilon_{2\nu}},$$

что совпадает с полученным выше значением.

Если $i \in I_{k-1}(2j-1)+1$, то в силу (14)

$$s_{i,\,2j-1}^{(k-1,\,2(k-1))} = -\,2^{2k-3-\sum_{\nu-1}^{k-2}\varepsilon_{2\nu}}.$$

Это же значение мы получим по формулам (10) и (21), так как в этом случае в силу 2) $2i-2 \in 2I_{k-1}(2j-1) = I_k(8j-7)$, но $2i \notin I_k(8j-7)$ (см. 3) и, значит, имеет место случай b).

Наконец, если $i \notin I_{k-1}(2j-1) \cup [I_{k-1}(2j-1)+1]$, то $s_{i,\,2j-1}^{(k-1,\,2(k-1))} = 0$ как в силу (15), так и по формулам (10), так как с учетом 2) получаем, что $2i \notin I_k(8j-7)$ и $2i-2 \notin I_k(8j-7)$, т. е. имеет место случай c).

Итак, последовательность матриц $(s_{p,\,q}^{(k,\,2k)})$ согласуется с (10) и, значит, действительно задает некоторый двойной ряд по системе Хаара.

Проверим выполнение условия (2) (или (2′)) для построенного ряда, воспользовавшись равенствами (7)—(9).

Заметим, что из (24) следует

$$s_{2i-1,\,q}^{(k,\,2k-t)} = s_{2i,\,q}^{(k,\,2k-t)} \quad (t \geqslant 3,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^{k-1},\ 1 \leqslant q \leqslant 2^{2k-t}).$$

Отсюда, в силу (7) и (9)

$$a_{n_k,\,m_l}/\chi_{n_k,\,m_l}(x,\,y) = 0 \quad \text{при } l \leqslant 2k-3. \tag{26}$$

Кроме того, из (25) и (7)

$$\left|\frac{a_{n_k,\,m_l}}{\chi_{n_k,\,m_l}(x,\,y)}\right| \leqslant \frac{4\cdot 2^{2k-1}}{2^{k+2k-2}} = \frac{1}{2^{k-3}} \quad \text{при} \quad 2k-2 \leqslant l \leqslant 2k. \tag{27}$$

Далее, из (14), (15), (12) и (10) следует, что при $t \geqslant 0$

$$\frac{|s_{p,q}^{(k-t,\,2k)}|}{{}_{-t+2k}} \leqslant \frac{2^{2k-1-\sum_{\nu=1}^{k-1}\varepsilon_{2\nu}}}{2^{3k-t}\cdot 2^t} \leqslant \frac{1}{2^k},$$

$$|s_{p,q}^{(k-t,\,2k-1)}|/2^{k-t+2k-1} \leqslant 1/2^k.$$

Отсюда и из (7) и (8) следует, что при $r \leqslant k$

$$|a_{n_r,\,m_{2k}}/\chi_{n_r,\,m_{2k}}(x,\,y)| \leqslant 1/2^{k-2}, \tag{28}$$

$$|a_{n_r,\,m_{2k-1}}/\chi_{n_r,\,m_{2k-1}}(x,\,y)| \leqslant 1/2^{k-2}. \tag{29}$$

Из (26)—(29) легко следует, что

$$\lim_{r+l\to\infty} a_{n_r,\,m_l}/\chi_{n_r,m_l}(x,\,y)=0,$$

т. е. имеет место (2′).

Укажем теперь, как для каждой точки $(x,\,y)$ найти возрастающие последовательности номеров $\{N_\nu(x,\,y)\}$ и $\{M_\nu(x,\,y)\}$, по которым суммы $S_{N_\nu(x,\,y),\,M_\nu(x,\,y)}(x,\,y)$ стремятся к нулю при $\nu\to\infty$.

Пусть y двоично-иррационально с двоичным разложением

$$y=0,\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots \tag{30}$$

Положив

$$q_k=1+\sum_{s=1}^{2k}\varepsilon_s 2^{2k-s}, \tag{31}$$

получим при любом k

$$(q_k-1)/2^{2k}<y<q_k/2^{2k},$$

т. е. при любом x и при данном y точка $(x,\,y)$ лежит в прямоугольнике $r_{p,\,q_k}^{(k,\,2k)}$ (см. (4)) при любом k и при некотором p. Пусть сначала в разложении (30) $\varepsilon_{2k_\nu}=1$ для бесконечного числа номеров $k_\nu=k_\nu(y)$ $(k_\nu<k_{\nu+1})$. Тогда q_{k_ν} четные и в силу (12) $s_{p,\,q_{k_\nu}}^{(k_\nu,\,2k_\nu)}=0$ при всех ν и $1\leqslant p\leqslant 2^{k_\nu}$. Значит, при таких y и при любых x

$$S_{2^{k_\nu},\,2^{2k_\nu}}(x,\,y)=0$$

для всех ν, т. е. в этом случае можно положить

$$N_\nu(x,\,y)=2^{k_\nu(y)},\qquad M_\nu(x,\,y)=2^{2k_\nu(y)}.$$

Пусть теперь $\varepsilon_{2k} = 0$ для всех $k \geqslant k_0 = k_0(y)$ (но y по-прежнему двоично-иррационально). Тогда все q_k (см. (31)) нечетны при $k \geqslant k_0$ и все множества $I_k(q_k)$ (см. (13)) при $k \geqslant k_0$ содержат одно и то же конечное число элементов, причем

$$E(y) = \bigcap_{k \geqslant k_0} \bigcup_{p \in I_k(q_k)} \{\bar{r}_{p, q_k}^{(k, 2k)} \cup \bar{r}_{p+1, q_k}^{(k, 2k)}\} =$$

$$= \left\{x:\ x = \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon_2}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{\varepsilon_{2k_0-2}}{2^{k_0}}\right\}. \qquad (32)$$

Из (14) и (15) (см. также обозначение (5)) следует, что в каждой точке (x, y) при рассматриваемом y и при $x \notin E(y)$ все $r_{p, q}^{(k, 2k)}$, при которых $(x, y) \in \bar{r}_{p, q}^{(k, 2k)}$, начиная с некоторого $k_1(x)$ таковы, что соответствующие $s_{p, q}^{(k, 2k)} = 0$. Если же $x \in E(y)$, то точка (x, y) при некотором $p \in I_k(q_k)$ принадлежит $\bar{r}_{p, q_k}^{(k, 2k)} \cap \bar{r}_{p+1, q_k}^{(k, 2k)}$ и в силу (14) в этой точке

$$S_{2^k, 2^{2k}}(x, y) = (s_{p, q_k}^{(k, 2k)} + s_{p+1, q_k}^{(k, 2k)})/2 = 0$$

(в точках разрыва одномерные функции Хаара считаем равными среднему арифметическому пределов слева и справа). Таким образом, в рассматриваемом случае при всех x $\lim\limits_{k \to \infty} S_{2^k, 2^{2k}}(x, y) = 0$ и, значит, можно считать, что $N_\nu(x, y) = 2^\nu$, $M_\nu(x, y) = 2^{2\nu}$.

Пусть, наконец, y двоично-рационально. Тогда, взяв для y конечное двоичное разложение (30), получим, что, начиная с некоторого k, $y = (q_k - 1)/2^{2k}$, причем $q_k - 1$ четно. Тогда при этих k и при всех p, $1 \leqslant p \leqslant 2^k$ в силу (12) $S_{2^k, 2^{2k}}(r_{p, q_k - 1}^{(k, 2k)}) = 0$. Отсюда при рассматриваемом y и при любом x для достаточно больших k

$$S_{2^k, 2^{2k}}(x, y - 0) = 0. \qquad (33)$$

В то же время в силу нечетности q_k и конечности множества $E(y)$ (см. (32)) рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем случае, дают

$$\lim_{k \to \infty} S_{2^k, 2^{2k}}(x, y + 0) = 0. \qquad (34)$$

Объединяя (34) и (35), получаем, что и в этом случае можно взять $N_\nu(x, y) = 2^\nu$, $M_\nu(x, y) = 2^{2\nu}$ (в случае $y = 0$ или $y = 1$ достаточно использовать одно из равенств (34) или (35)).

Итак, искомые последовательности $\{N_\nu(x, y)\}$ и $\{M_\nu(x, y)\}$ заданы для всех точек (x, y) на единичном квадрате. Теорема полностью доказана.

Автор благодарит А. А. Талаляна, обратившего внимание на рассмотренную здесь задачу.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
26.VI.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Скворцов В. А., О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм, Докл. АН СССР, **183**, № 4 (1968), 784—786.

[2] Талалян Ф. А., О единственности рядов по некоторым ортогональным системам, Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., 5, № 5 (1970), 401—418.

[3] Скворцов В. А., О множествах единственности для многомерных рядов Хаара, Матем. заметки, **14**, № 6 (1973), 789—798.

[4] Мовсисян Х. О., О единственности двойных рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., 9, № 1 (1974), 40—61.

[5] Мовсисян Х. О., О единственности повторно сходящихся двойных рядов Хаара, Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., **11**, № 4 (1976), 314—331.