Г. Г. Ильюта, Характеризация простых диаграмм Кокстера–Дынкина, *Функц. анализ и его прил.*, 1995, том 29, выпуск 3, 72–75

УДК 513.836

Характеризация простых диаграмм Кокстера–Дынкина

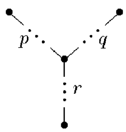
 Г. Г. Ильюта[1]

Известна система соотношений, выделяющая из графов с целочисленными весами на ребрах простые диаграммы Кокстера–Дынкина. А именно, веса должны быть неположительными, а соответствующая квадратичная форма (Киллинга) должна быть положительно определенной [4]. Последнее условие можно записать как систему неравенств (положительность угловых миноров в матрице квадратичной формы). В заметке приводится другая система уравнений и неравенств, также выделяющая диаграммы A_n, D_n, E_6, E_7, E_8. Ключевым моментом является использование формул для следов первой и второй степеней оператора Кокстера. Графами с целочисленными весами на ребрах являются диаграммы Кокстера–Дынкина особенностей, и мы надеемся, что приведенные соотношения послужат прототипом для решения в положительной модальности следующей интересной задачи: определить стандартную диаграмму Кокстера–Дынкина особенности (или класс стандартных диаграмм). Претенденты в модальности 1, 2 построены в [6–8] (они «растут» из обсуждаемых ниже диаграмм T_{pqr}). Для особенностей функций двух переменных хорошими кандидатами являются вещественные диаграммы Кокстера–Дынкина [5] (для них справедливо равенство (1) из приведенной ниже теоремы с заменой квадрата на куб).

Рассмотрим связный граф с упорядоченными вершинами и целочисленными весами на ребрах (отсутствие ребра равносильно нулевому значению веса). По графу построим верхнетреугольную матрицу S (форма Зейферта в отмеченном базисе [1]) с -1 на диагонали. Строки и столбцы матрицы S отвечают вершинам графа с теми же номерами. Элемент на месте ij $(i < j)$ матрицы S равен весу ребра, соединяющего вершины i и j. Матрица упомянутой в начале квадратичной формы графа равна $-S - S^t$. Через $C = -S^t S^{-1}$ обозначим оператор Кокстера, а n — число вершин графа.

Хорошо известно, что следующее соотношение выделяет A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 из графов T_{pqr}:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1, \qquad T_{pqr}:$$



Теорема. *Следующие соотношения* (1)–(3) *выделяют из графов с целочисленными весами на ребрах графы T_{pqr} с весами ± 1.*

$$(S+1)^2 = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{tr} C = -1, \tag{2}$$

$$\operatorname{tr} C^2 = \pm 1. \tag{3}$$

[1]Исследование частично поддержано фондом Дж. Сороса, грант M91000.

Приведем мотивировки из теории особенностей.

Равенство (1) означает, что у простой особенности существует морсовизация с двумя критическими значениями [3], (2) справедливо для всех особенностей функций нечетного числа переменных [2], (3) объясняется следующей формулой, которая доказана в [8] и является следствием леммы Морса и теоремы Делиня [2] (через $c(f)$ обозначим коранг особенности f):

$$\operatorname{tr} C^2 = (-1)^{c(f)}.$$

В [3] показано, что соотношения (1), (2) выделяют из всех графов деревья с весами ± 1. В оставшейся части статьи мы докажем, что (3) выделяет из деревьев с весами ± 1 графы T_{pqr}. Тем самым будет доказана и вся теорема.

Лемма 1. *Для произвольного дерева с весами* ± 1 *на ребрах все миноры матрицы формы Зейферта* S *равны* 0, 1, -1.

Доказательство. Достаточно показать, что в полном разложении минора не более чем одно слагаемое отлично от нуля (и тогда по предположению о весах оно равно ± 1 и самому минору).

Предположим, что есть два ненулевых слагаемых. Если эти два слагаемых имеют общий множитель (элемент матрицы S), то вычеркнем из минора отвечающие этому множителю строку и столбец. Проделаем это со всеми общими элементами двух рассматриваемых слагаемых. В результате получим минор, имеющий в полном разложении два ненулевых слагаемых без общих элементов. Пусть p — размерность этого минора, а q — число диагональных элементов матрицы S в нем. Ему отвечают $2p - q$ вершин графа (веса ребер, соединяющих эти вершины, являются элементами минора). Из того, что два слагаемых в полном разложении минора не равны 0 и не имеют общих множителей, вытекает, что подграф нашего дерева с $2p-q$ вершинами имеет по крайней мере $2p-q$ ребер. Для дерева это невозможно.

Далее мы выведем формулы для коэффициентов характеристического многочлена оператора Кокстера дерева. Известно, что класс сопряженности оператора Кокстера дерева не зависит от нумерации вершин. Выберем нумерацию, которая получается, если разбить вершины на два множества, в каждом из которых вершины не соединены ребрами. Нумеруются сначала вершины одного из множеств, затем другого. В таком базисе матрица формы Зейферта будет иметь вид

$$S = \begin{pmatrix} -E & A \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

Для вершины графа с номером i обозначим через m_i число ребер, инцидентных этой вершине. Через β_i обозначим количество выборок по i различных ребер графа, веса которых лежат в разных столбцах и строках матрицы S, $\det(\lambda E - C) = \sum \alpha_{n-i}\lambda^i$.

Лемма 2. *Для дерева с описанной выше нумерацией вершин справедливы формулы*

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_{n-2i}^{k-i} \beta_i, \qquad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = n-1, \quad \beta_2 = C_{n-1}^2 - \sum C_{m_i}^2,$$

$$\alpha_2 = 2(n-1) - \frac{1}{2}\sum m_i^2 .$$

Доказательство. Имеем

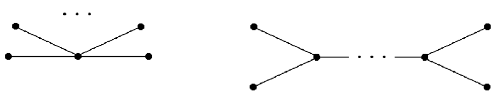
$$C=\begin{pmatrix} E & 0 \\ A^t & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -E & A \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

Поэтому $(-1)^k\alpha_k$ равно сумме квадратов миноров порядка k матрицы S со знаками, равными четности числа диагональных элементов матрицы S в соответствующем миноре. Согласно лемме 1, квадраты ненулевых миноров равны 1, и поэтому достаточно подсчитать их количество. Для фиксированного количества диагональных элементов $k-i$ количество ненулевых миноров равно $C_{n-2i}^{k-i}\beta_i$. Формула для β_2 очевидна — берем все выборки по два ребра и выбрасываем выборки с весами из одной строки или столбца матрицы S. Последняя формула вытекает из предыдущих и очевидного факта, что $\sum m_i = 2n-2$. Учитывая лемму 2 и равенство $\alpha_2=\frac{1}{2}(\operatorname{tr}C^2-(\operatorname{tr}C)^2)$, равенство (3) для деревьев с весами ±1 можно переписать в следующем виде:

$$2n-2-\frac{1}{2}\sum m_i^2 = 0 \text{ или } 1. \tag{4}$$

Лемма 3. *Соотношение* (4) *выделяет из деревьев с весами* ±1 *на ребрах графы* T_{pqr}.

Доказательство. Для дерева с не более чем двумя вершинами утверждение очевидно. Предположим, что дерево имеет более двух вершин, и возьмем вершину с номером i, для которой $m_i=1$. Пусть ей инцидентна вершина j. Поскольку дерево связно и число вершин >2, то $m_j>1$. Если удалить из дерева вершину i, то левая часть соотношения (4) увеличится на m_j-2. Достаточно доказать, что дерево не содержит подграфов следующего вида (в первом число вершин >3):



Но для этих графов левая часть соотношения (4) отрицательна и поэтому для содержащих их деревьев она также отрицательна. Доказательство закончено.

Замечание. Из доказательства видно, что (4) можно ослабить — достаточно потребовать, чтобы левая часть была неотрицательна. Соотношение (4) выделяет T_{pqr} из всех графов, но для графов, не являющихся деревьями, оно не имеет естественного смысла в нашем контексте. Формулу для $\operatorname{tr}C$ в терминах диаграммы Кокстера–Дынкина см. в [9]. Формула для характеристического многочлена оператора Кокстера дерева приведена в [4, упр. 3в §6 гл. 5].

Я благодарен С. М. Гусейн-Заде за полезные обсуждения.

Литература

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений, т. II. Наука, М. (1984). **2.** *A'Campo N.* Comm. Math. Helv., **50**, 233–248 (1975). **3.** *A'Campo N.* In: Actes du Congrès Intern. Math. (Vancouver, 1974), Vol. 1, p. 19–41. **4.** *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Мир, М. (1972).

5. *Гусейн-Заде С. М.* Функц. анализ и его прил., **8**, вып. 4, 23–30 (1974). **6.** *Габриэлов А. М.* Функц. анализ и его прил., **8**, вып. 3, 1–6 (1974). **7.** *Ebeling W.* Enseign. Math., **29**, 263–280 (1983). **8.** *Ebeling W.* Intern. Geom. Colloquium, Moscow (1993). **9.** *Ильюта Г. Г.* УМН, **42**, вып. 2, 227–228 (1987).

Московский независимый
университет

Поступило в редакцию
6 апреля 1994 г.

УДК 517.984.5

Критерий дискретности спектра сингулярной канонической системы

© 1995. И. С. Кац[1]

1. В настоящей статье $t \mapsto \mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ — определенная на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ вещественная 2×2-матрица-функция, суммируемая на любом замкнутом промежутке $\Delta \subset I$ и такая, что $\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ для любого $t \in I$.

Рассматривается каноническое дифференциальное уравнение

$$J\,\frac{dx}{dt} = z\mathcal{H}(t)x, \qquad t\in I,\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в котором z — комплексный параметр. Не нарушая общности, будем считать, что $\operatorname{tr}\mathcal{H}(t) = 1$ для любого $t \in I$ (это достигается заменой независимой переменной в (1)). Вектор-функция $t \mapsto u(t) = (u_1(t)\ u_2(t))^\tau \in \mathbb{C}^2$ (здесь τ — символ транспонирования) считается решением дифференциального уравнения (1), если она локально абсолютно непрерывна на I и $Ju'(t) = z\mathcal{H}(t)u(t)$ при п.в. $t \in I$. Если $-\infty$ — левый ($+\infty$ — правый) конец интервала I, то этот конец будем называть сингулярным, а в противном случае — регулярным. Введем некоторые понятия, касающиеся поведения $\mathcal{H}(t)$. Впредь $B(t)$ — первообразная функции $b(t)$.

Определение 1. Промежуток $\Delta \subset I$ мы называем (следуя [1]) *$\mathcal{H}$-неделимым ($\mathcal{H}$-н.п.) типа* φ, если $\mathcal{H}(t) = \xi_\varphi^\tau \xi_\varphi$ при п.в. $t \in \Delta$, где $\xi_\varphi = (\cos\varphi\ \sin\varphi)$ — матрица-строка. $\mathcal{H}$-н.п. мы называем *максимальным*, если он не является правильной частью другого $\mathcal{H}$-н.п.

Определение 2. Если правый конец интервала I сингулярен, то $\mathfrak{A}_K^+(\mathcal{H})$ — это множество точек $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, для которых

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\left(\int_p^t c(s)e^{-2\lambda B(s)}ds \cdot \int_t^{+\infty} a(s)e^{2\lambda B(s)}ds\right) \leqslant \frac{K}{\lambda^2} \tag{2}$$

[1] Исследование, описанное в этой публикации, стало возможным частично благодаря гранту №UCZ000 Международного научного фонда (ISF).