В. Н. Салий, Неассоциативные системы, связанные с $\mathfrak{L}$-преобразованиями,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 86–95

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 519.40

В. Н. Салий

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С $\mathfrak{L}$-ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Пусть A — некоторое множество, $\mathfrak{L}$ — произвольная полная решетка с операциями $\curlyvee$ и $\curlywedge$, наибольшим элементом 1 и наименьшим 0. Бинарным $\mathfrak{L}$-отношением [4], определенным на множестве A, называется всякое полное отображение f: $A \times A \to \mathfrak{L}$. Совокупность всех бинарных $\mathfrak{L}$-отношений, определенных на A, обозначается $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$, а значение $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ на паре (a_1, a_2) — через $f(a_1, a_2)$. Если $\mathfrak{L} = \{0, 1\}$, т. е. является двухэлементной булевой алгеброй, то бинарные $\mathfrak{L}$-отношения совпадают с индикаторами обычных бинарных отношений. В $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ вводятся естественным образом операции: умножения $f_2 \circ f_1(a_1, a_2) = \bigvee\limits_{a \in A} (f_1(a_1, a) \curlywedge f_2(a, a_2))$ и обращения $\overset{-1}{f}(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$.

Если A конечно и имеет n элементов, то $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ есть совокупность всех $n \times n$-матриц с элементами из $\mathfrak{L}$, причем $\circ$ и $^{-1}$ означают обычное умножение и транспонирование таких матриц. Известно, что $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ является полугруппой при любом A, если в решетке $\mathfrak{L}$ выполняется бесконечно дистрибутивный закон: $l \curlywedge \curlyvee_{i \in I} l_i = \curlyvee_{i \in I} (l \curlywedge l_i)$.

Пусть $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ есть некоторое бинарное $\mathfrak{L}$-отношение, определенное на множестве A. Тогда f называется: 1) однозначным бинарным $\mathfrak{L}$-отношением или $\mathfrak{L}$-преобразованием множества A, если $f(a, a_1) \curlywedge f(a, a_2) = 0$ для любого a и различных a_1, a_2; 2) 1-полным, если $\curlyvee_{\bar{a} \in A} f(a, \bar{a}) = 1$ для всякого a; 3) взаимно однозначным $\mathfrak{L}$-преобразованием, если f и $\overset{-1}{f}$ однозначны; 4) полным, если f и $\overset{-1}{f}$ 1-полны.

Если $\mathfrak{L} = \{0, 1\}$, то эти понятия совпадают с соответствующими понятиями теории бинарных отношений.

В [4] было доказано, что в случае бесконечной дистрибутивности решетки $\mathfrak{L}$ совокупность $\mathfrak{K}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ всех взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований множества A образует обобщенную группу Вагнера относительно операции умножения $\mathfrak{L}$-преобразований, а если ограничиться рассмотрением полных взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований, то соответствующее множество $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ будет группой.

Уже рассмотрение простейших случаев показывает, что множество $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(A\times A)$ при недистрибутивных решетках $\mathfrak{L}$ может оказаться незамкнутым относительно умножения, а если оно и замкнуто, то умножение не обязательно ассоциативно. Возникает естественная задача исследования свойств указанной совокупности в этом последнем случае. В настоящей работе $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(A\times A)$ изучается для простейшей пятиэлементной недистрибутивной решетки $\mathfrak{L}$, в которой порядок определяется так, что $0<l_1<1$, $0<l_3<l_2<1$, а элементы l_1, l_2 и l_1, l_3 несравнимы. Оказывается, что получающийся в этом случае бинарный оператив $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(A\times A)$ всех полных взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований множества A является очень близким неассоциативным аналогом группы.

Изучение такого рода неассоциативных систем само по себе представляет интерес в силу их связи с $\mathfrak{L}$-преобразованиями — объектами, весьма близкими по своей природе к обычным преобразованиям. Но это изучение, кроме того, приводит к более общей задаче описания класса неассоциативных бинарных оперативов, допускающих изоморфное представление $\mathfrak{L}$-преобразованиями, когда соответствующие решетки берутся недистрибутивными. Возможно, на этом пути удастся получить представления некоторых известных классов неассоциативных систем $\mathfrak{L}$-преобразованиями. Такие представления были бы удобным инструментом при исследовании указанных классов.

§ 1. Рассмотрим полные взаимно однозначные $\mathfrak{L}_0$-преобразования некоторого непустого множества A, причем в качестве $\mathfrak{L}_0$ берем известную пятиэлементную недистрибутивную решетку $\mathfrak{L}_0=\{0, l_1, l_2, l_3, 1\}$, такую, что $0<l_1<1$, $0<l_3<l_2<1$, а элементы l_1, l_2 и l_1, l_3 несравнимы [1].

Пусть $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}_0}(A\times A)$ есть совокупность всех полных взаимно однозначных $\mathfrak{L}_0$-преобразований множества A.

Теорема 1. $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}_0}(A\times A)$ *замкнуто относительно умножения $\mathfrak{L}_0$-преобразований.*

Доказательство. Пусть $f_1, f_2\in\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}_0}(A\times A)$. Это означает, что $f_i(a, a_1)\wedge f_i(a, a_2)=0$ и $f_i(a_1, a)\wedge f_i(a_2, a)=0$ для всех a и различных a_1, a_2 и, кроме того, $\bigvee_{\overline{a}\in A} f_i(a, \overline{a})=1$ $(i=1, 2)$. Докажем сперва, что $f_2\circ f_1$ будет однозначным, т. е. при любом a и различных a_1 и a_2 будет $f_2\circ f_1(a, a_1)\wedge f_2\circ f_1(a, a_2)=0$. В самом деле, по определению произведения бинарных $\mathfrak{L}$-отношений, $f_2\circ f_1(a, a_1)= =\bigvee_{\overline{a}}(f_1(a, \overline{a})\wedge f_2(\overline{a}, a_1))$ и $f_2\circ f_1(a, a_2)=\bigvee_{\overline{\overline{a}}}(f_1(a, \overline{\overline{a}})\wedge f_2(\overline{\overline{a}}, a_2))$. Пусть $l=f_2\circ f_1(a, a_1)\wedge f_2\circ f_1(a, a_2)=\bigvee_{\overline{a}}(f_1(a, \overline{a})\wedge f_2(\overline{a}, a_1))\wedge$ $\wedge\bigvee_{\overline{\overline{a}}}(f_1(a, \overline{\overline{a}})\wedge f_2(\overline{\overline{a}}, a_2))$. Нам нужно доказать, что $l=0$. Для f_1 могут иметь место следующие случаи.

1) Найдется такое $\overline{a}_0$, что $f_1(a, \overline{a}_0)=1$. Тогда, в силу однозначности f_1, будет $f_1(a, \overline{a})=0$ для всех $\overline{a}\neq\overline{a}_0$. Значит, $l=f_2(\overline{a}_0, a_1)\wedge$ $\wedge f_2(\overline{a}_0, a_2)$. Но последнее выражение есть нуль вследствие взаимной однозначности f_2.

2) При некотором $\bar a_1$ будет $f_1(a, \bar a_1) = l_1$. Поскольку f_1 однозначно, найдется хотя бы один элемент $\bar a_2$ такой, что $l_1 \curlywedge f_1(a, \bar a_2) = 0$. При этом, в силу строения $\mathfrak{L}_0$, очевидно, $f_1(a, \bar a_2) \preccurlyeq l_2$.

Обозначим $f_1(a, \bar a_2) = l_0$. Тогда $l = ((l_1 \curlywedge f_2(\bar a_1, a_1)) \curlyvee (l_0 \curlywedge f_2(\bar a_2, a_1))) \curlywedge ((l_1 \curlywedge f_2(\bar a_1, a_2)) \curlyvee (l_0 \curlywedge f_2(\bar a_2, a_2)))$. Но ввиду взаимной однозначности f_2 мы имеем $f_2(\bar a_1, a_1) \curlywedge f_2(\bar a_2, a_1) = 0$ и $f_2(\bar a_2, a_1) \curlywedge f_2(\bar a_2, a_2) = 0$. Значит, в каждой паре $l_1 \curlywedge f_2(\bar a_1, a_1)$, $l_1 \curlywedge f_2(\bar a_1, a_2)$ и $l_0 \curlywedge f_2(\bar a_2, a_1)$, $l_0 \curlywedge f_2(\bar a_2, a_2)$ по крайней мере один из элементов равен нулю. Отсюда и следует, что $l = 0$. Поскольку случаи 1) и 2) исчерпывают все возможности для строения f_1, мы показали, что $f_2 \circ f_1$ однозначно. Но поскольку $\overset{-1}{\overline{f_2 \circ f_1}} = \overset{-1}{f_1} \circ \overset{-1}{f_2}$, а $\overset{-1}{f_1}$ и $\overset{-1}{f_2}$ однозначны вместе с f_1 и f_2, то и $\overset{-1}{\overline{f_2 \circ f_1}}$ однозначно, а значит $f_2 \circ f_1 \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$, т. е. является взаимно однозначным $\mathfrak{L}_0$-преобразованием множества A.

Теперь докажем полноту произведения $f_2 \circ f_1$, т. е. что $\bigvee_{\bar a} f_2 \circ f_1(a, \bar a) = 1$ для всякого $a \in A$. Обозначим $l = \bigvee_{\bar a} f_2 \circ f_1(a, \bar a) = \bigvee_{\bar a} \bigvee_{\bar{\bar a}} (f_1(a, \bar{\bar a}) \curlywedge f_2(\bar{\bar a}, \bar a))$ и рассмотрим для f_1 уже упоминавшиеся случаи.

1) Найдется $\bar{\bar a}_0$ такое, что $f_1(a, \bar{\bar a}_0) = 1$. Тогда, в силу полноты f_2,

$$1 = \bigvee_{\bar a} f_2(\bar{\bar a}_0, \bar a) \preccurlyeq \bigvee_{\bar a} \Big(\bigvee_{\bar{\bar a} \neq \bar{\bar a}_0} (f_1(a, \bar{\bar a}) \curlywedge f_2(\bar{\bar a}, \bar a)) \curlyvee f_2(\bar{\bar a}_0, \bar a) \Big) =$$

$$= \bigvee_{\bar a} \bigvee_{\bar{\bar a}} (f_1(a, \bar{\bar a}) \curlywedge f_2(\bar{\bar a}, \bar a)) = \bigvee_{\bar a} f_2 \circ f_1(a, \bar a), \text{ т. е. } \bigvee_{\bar a} f_2 \circ f_1(a, \bar a) = 1.$$

2) Для некоторого $\bar{\bar a}_1$ будет $f_1(a, \bar{\bar a}_1) = l_1$. Тогда, вследствие полноты f_1, найдется $\bar{\bar a}_2$ такой, что $l_3 \preccurlyeq f_1(a, \bar{\bar a}_2)$, а так как и f_2 полно, то существуют $\bar a_1$ и $\bar a_2$, при которых $l_1 \preccurlyeq f_2(\bar{\bar a}_1, \bar a_1)$ и $l_3 \preccurlyeq f_2(\bar{\bar a}_2, \bar a_2)$.

Из этих условий сразу следует $1 = l_1 \curlyvee l_3 = (l_1 \curlywedge l_1) \curlyvee (l_3 \curlywedge l_3) \preccurlyeq (f_1(a, \bar{\bar a}_1) \curlywedge f_2(\bar{\bar a}_1, \bar a_1)) \curlyvee (f_1(a, \bar{\bar a}_2) \curlywedge f_2(\bar{\bar a}_2, \bar a_2)) \preccurlyeq \bigvee_{\bar a} \bigvee_{\bar{\bar a}} (f_1(a, \bar{\bar a}) \curlywedge f_2(\bar{\bar a}, \bar a)) = \bigvee_{\bar a} f_2 \circ f_1(a, \bar a)$. Этим и завершается доказательство 1-полноты $f_2 \circ f_1$. Проводя аналогичные рассуждения для $\overset{-1}{f_2}$ и $\overset{-1}{f_1}$, получим, что $\overset{-1}{\overline{f_2 \circ f_1}}$ будет полным. Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве взаимной однозначности мы не пользовались полнотой, и, обратно, в доказательстве полноты $f_2 \circ f_1$ на f_1 и f_2 не накладывались условия однозначности. Таким образом, нами доказано больше, чем было сформулировано в условии теоремы, а именно: произведение $\mathfrak{L}_0$-преобразований будет снова $\mathfrak{L}_0$-преобразованием и произведение 1-полных бинарных $\mathfrak{L}_0$-отношений 1-полно.

Пусть $f_1, f_2 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ — некоторые бинарные $\mathfrak{L}$-отношения, определенные на множестве A. Объединением f_1 и f_2 называется бинарное $\mathfrak{L}$-отношение f, обозначаемое $f_1 \curlyvee f_2$, такое, что $f(a_1, a_2) = f_1(a_1, a_2) \curlyvee f_2(a_1, a_2)$ для всех $a_1, a_2 \in A$. Легко видеть, что объединение двух $\mathfrak{L}$-преобразований уже не обязательно будет однозначным. Подобная ситуация имеет место и для обычных преобразований, и отношение определенности частичной операции объединения преобразований называется отношением их объединимости [2] (полусовместности [3]). Легко видеть, что если два преобразования некоторого множества 1-полны и объединимы, то они просто совпадают, и, следовательно, отношение объединимости в полугруппах 1-полных преобразований (а тем более в группах полных взаимно однозначных преобразований) будет тождественным отношением. Аналогично обстоит дело и для полугрупп 1-полных $\mathfrak{L}$-преобразований при всех дистрибутивных решетках $\mathfrak{L}$. Сначала выведем одно условие объединимости $\mathfrak{L}$-преобразований для дистрибутивных решеток и решетки $\mathfrak{L}_0$.

Предложение 1. *В дистрибутивных решетках и решетке $\mathfrak{L}_0$ $\mathfrak{L}$-преобразования f_1, f_2 объединимы тогда и только тогда, когда $f_2 \circ \overset{-1}{f_1} \lesssim \Delta$ (и $f_1 \circ \overset{-1}{f_2} \lesssim \Delta$), где*

$$\Delta(a_1, a_2) = \begin{cases} 1, & \textit{если } a_1 = a_2; \\ 0, & \textit{если } a_1 \neq a_2 \end{cases}$$

($f_1 \lesssim f_2$ по определению означает, что $f_1(a_1, a_2) \lesssim f_2(a_1, a_2)$ для всех a_1, a_2).

Доказательство. Необходимость. Пусть f_1 и f_2 объединимы, но $f_2 \circ \overset{-1}{f_1}$ не включается в Δ. Значит, найдутся $a_1 \neq a_2$ такие, что $0 \neq f_2 \circ \overset{-1}{f_1}(a_1, a_2) = \curlyvee_a (\overset{-1}{f_1}(a_1, a) \curlywedge f_2(a, a_2)) = \curlyvee_a (f_1(a, a_1) \curlywedge f_2(a, a_2))$, т. е. найдется a такое, что $f_1(a, a_1) \curlywedge f_2(a, a_2) \neq 0$. Но тогда $(f_1 \curlyvee f_2)(a, a_1) \curlywedge (f_1 \curlyvee f_2)(a, a_2) \gtrsim f_1(a, a_1) \curlywedge f_2(a, a_2) \neq 0$, т. е. $f_1 \curlyvee f_2$ неоднозначно, что невозможно в силу объединимости f_1 и f_2.

Достаточность. Пусть $f_2 \circ \overset{-1}{f_1} \lesssim \Delta$. Тогда $\overset{-1}{\overline{f_2 \circ \overset{-1}{f_1}}} \lesssim \Delta$, т. е. $f_1 \circ \overset{-1}{f_2} \lesssim \Delta$. В силу однозначности f_1 и f_2, будут выполняться соотношения $f_1 \circ \overset{-1}{f_1} \lesssim \Delta$ и $f_2 \circ \overset{-1}{f_2} \lesssim \Delta$ [4]. Но тогда, если решетка $\mathfrak{L}$ дистрибутивна, то $(f_1 \curlyvee f_2) \circ \overset{-1}{\overline{(f_1 \curlyvee f_2)}} = f_1 \circ \overset{-1}{f_1} \curlyvee f_1 \circ \overset{-1}{f_2} \curlyvee f_2 \circ \overset{-1}{f_1} \curlyvee f_2 \circ \overset{-1}{f_2} \lesssim \Delta$, т. е. $f_1 \curlyvee f_2$ однозначно. Рассмотрим решетку $\mathfrak{L}_0$. Пусть $f_2 \circ \overset{-1}{f_1} \lesssim \Delta$. Тогда для любого $a \in A$ и различных a_1, a_2 должно быть $f_1(a, a_1) \curlywedge f_2(a, a_2) = 0$. Покажем тогда, что $(f_1 \curlyvee f_2)(a, a_1) \curlywedge (f_1 \curlyvee f_2)(a, a_2) = 0$, т. е. $f_1 \curlyvee f_2$ однозначно. Обозначим $(f_1 \curlyvee f_2)(a, a_1) \curlywedge (f_1 \curlyvee f_2)(a, a_2) = l$. Тогда $l = (f_1(a, a_1) \curlyvee f_2(a, a_1)) \curlywedge (f_1(a, a_2) \curlyvee f_2(a, a_2))$.

1) Один из входящих элементов равен 1. Не нарушая общности, считаем $f_1(a, a_1) = 1$. Тогда $f_1(a, a_2) = f_2(a, a_2) = 0$, и, значит, $l = 0$. 2) Один из входящих в l элементов равен l_1. Пусть $f_1(a, a_1) = l_1$. Тогда $f_1(a, a_2) \lesssim l_2$ и $f_2(a, a_2) \lesssim l_2$, и, значит, $f_2(a, a_1) \lesssim l_1$. Итак, $f_1(a, a_1) \curlyvee f_2(a, a_1) \lesssim l_1$ и $f_1(a, a_2) \curlyvee f_2(a, a_2) \lesssim l_2$, т. е. $l = 0$. Остальные случаи либо тривиальны, либо сводятся к рассмотренным.

Замечание. Необходимость условия предложения 1 доказана для произвольных решеток.

При рассмотрении взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований условие предложения 1 уже недостаточно для того, чтобы объединение двух взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований было снова взаимно однозначным (хотя оно, конечно, будет однозначным). Поэтому необходимо потребовать, чтобы и обратные $\mathfrak{L}$-преобразования были объединимы. Тогда мы получаем для дистрибутивных решеток и решетки $\mathfrak{L}_0$

Предложение 2. *Для того чтобы взаимно однозначные $\mathfrak{L}$-преобразования f_1 и f_2 были объединимы, необходимо и достаточно, чтобы $f_2 \circ \overset{-1}{f_1} \lessdot \Delta$ и $\overset{-1}{f_1} \circ f_2 \lessdot \Delta$.*

Естественно, при рассмотрении полных взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований в приведенных соотношениях должны выполняться равенства, означающие, очевидно, что $\overset{-1}{f_1}$ и f_2 являются обратными друг для друга $\mathfrak{L}$-преобразованиями (это справедливо, конечно, и для f_1 и $\overset{-1}{f_2}$).

Пусть теперь решетка $\mathfrak{L}$ дистрибутивна, а $\mathfrak{L}$-преобразования f_1 и f_2 1-полны и объединимы. Тогда $f_2 \circ \overset{-1}{f_1} \lessdot \Delta$, т. е. для всякого a и различных a_1, a_2 будет $f_1(a, a_1) \curlywedge f_2(a, a_2) = 0$. Так как f_1 1-полно, то $1 = \underset{\bar{a} \neq a_2}{\curlyvee} (f_1(a, \bar{a}) \curlywedge f_1(a, a_2))$, откуда $f_2(a, a_2) = 1 \curlywedge f_2(a, a_2) = f_1(a, a_2) \curlywedge f_2(a, a_2)$, т. е. $f_2(a, a_2) \lessdot f_1(a, a_2)$ при любых a, a_2. Используя 1-полноту f_2, получим, что и $f_1(a, a_2) \lessdot f_2(a, a_2)$ для всех a, a_2. Таким образом $f_1 = f_2$. При недистрибутивной решетке $\mathfrak{L}$ 1-полные объединимые $\mathfrak{L}$-преобразования уже не обязаны совпадать. Это доказывает следующий пример. В качестве f_1 и f_2 возьмем 2×2-матрицы с элементами из решетки $\mathfrak{L}_0$ такие, что их элементы, стоящие на главной диагонали, все равны l_1, на побочной диагонали f_1 стоят l_2, а на побочной диагонали f_2 оба элемента равны l_3. Очевидно, f_1 и f_2 взаимно однозначны, полны и объединимы, ибо $f_1 \curlyvee \curlyvee f_2 = f_1$, но в то же время они не совпадают. Таким образом, отношение объединимости в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$ не будет тождественным. Оно будет играть важную роль в наших рассмотрениях. Выясним некоторые свойства этого отношения.

Предложение 3. *f_1 и f_2 объединимы тогда и только тогда, когда для любых a_1, a_2 из $f_1(a_1, a_2) \neq f_2(a_1, a_2)$ следует $f_1(a_1, a_2) \curlywedge \curlywedge f_2(a_1, a_2) = l_3$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим $l = f_1(a_1, a_2) \curlywedge f_2(a_1, a_2)$. 1) $l = 1$. Тогда, конечно, $f_1(a_1, a_2) = f_2(a_1, a_2)$ ($= 1$), что невозможно. 2) $l = l_1$. Тогда $f_1(a_1, a_2) = l_1$ и $f_2(a_1, a_2) = 1$ (или наоборот). Но в силу полноты f_1 существует $\bar{a}_2$ такое, что $f_1(a_1, \bar{a}_2) \neq 0$, а тогда $f_1(a_1, \bar{a}_2) \curlywedge f_2(a_1, a_2) \neq 0$, т. е. f_1 и f_2 не объединимы, что противоречит условию. 3) $l = l_2$. Доказывается аналогично предыдущему. 4) $l = 0$. Пусть $f_1(a_1, a_2) \neq 0$. Тогда, в силу объединимости f_1 и f_2, будет $f_1(a_1, a_2) \curlywedge f_2(a_1, a_2) = 0$ при всех a. В силу строения $\mathfrak{L}_0$, это означает, что $f_1(a_1, a_2) \curlywedge \underset{a}{\curlyvee} f_2(a_1, a) = 0$. Но $\underset{a}{\curlyvee} f_2(a_1, a) = 1$, так как f_2 полно. Полученное противоречие доказывает, что $l \neq 0$. Итак, для $l = f_1(a_1, a_2) \curlywedge f_2(a_1, a_2)$ остается единственная возможность $l = l_3$, и при этом $f_1(a_1, a_2) = l_2$ и $f_2(a_1, a_2) = l_3$ или наоборот.

Достаточность. Пусть из $f_1(a_1, a_2) \neq f_2(a_1, a_2)$ следует $f_1(a_1, a_2) \curlywedge f_2(a_1, a_2) = l_3$. Рассмотрим выражение $l = f_1(a_1, a_2) \curlywedge \curlywedge f_2(a_1, \bar{a}_2)$ для $\bar{a}_2 \neq a_2$. Если $f_2(a_1, \bar{a}_2) = f_1(a_1, \bar{a}_2)$, то $l = 0$. Если же $f_2(a_1, \bar{a}_2) \neq f_1(a_1, \bar{a}_2)$, то $f_2(a_1, \bar{a}_2) = l_2$ и $f_1(a_1, \bar{a}_2) = l_3$ (или наоборот). Тогда все равно $l = 0$, так как в $\mathfrak{L}_0$ $l_0 \curlywedge l_2 = 0$ влечет $l_0 \curlywedge l_3 = 0$, и наоборот. Итак, всегда при $a_1 \neq a_2$ будет $f_1(a, a_1) \curlywedge f_2(a, a_2) = 0$, т. е. f_1 и f_2 объединимы.

Предложение 4. *Отношение объединимости в* $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$ *есть отношение конгруэнтности.*

Доказательство. То, что это отношение является эквивалентностью, следует из предложения 3. Пусть теперь f_1 объединимо с f_2, а $\bar f_1$ объединимо с $\bar f_2$. Покажем, что $\bar f_1 \circ f_1$ объединимо с $\bar f_2 \circ f_2$. Из предложения 3 следует, что если $(f_i)_{i \in I}$ все объединимы с f, то и $\underset{i \in I}{\curlyvee} f_i$ объединимо с f. Значит, в множестве всех объединимых с f $\mathfrak{L}_0$-преобразований из $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$ имеется наибольший в смысле включения элемент. Обозначим его f^*. Очевидно, f^* нигде не может равняться l_3. При этом если зафиксировать $a \in A$, то не более, чем при одном a_0 будет для любого $i \in I$ $f_i(a, a_0) \neq f^*, (a, a_0)$, т. е. $f_i(a, a_0) = l_3$ и ${}^*(a, a_0) = l_2$. Применим это к нашему случаю, обозначая через f^* и $\bar f^*$ наибольшие элементы классов отношения объединимости, содержащих f_1, f_2 и $\bar f_1$, $\bar f_2$ соответственно. Зафиксируем a_1, $a_2 \in A$. Тогда не более чем при одном a_0 будет

$$f_1(a_1, a_0) \neq f^*(a_1, a_0) \tag{1}$$

и не более чем при одном $\bar a_0$ будет

$$\bar f_1(\bar a_0, a_2) \neq f^*(\bar a_0, a_2). \tag{2}$$

(Последнее следует из того факта, что $\overset{-1}{f^*}$ будет наибольшим среди всех, объединимых с $\overset{-1}{f_1}$.)

Тогда $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) = \underset{a \neq a_0,\, \bar a_0}{\curlyvee} (f_1(a_1, a) \curlywedge \bar f_1(a, a_2)) \curlyvee (f_1(a_1, a_0) \curlywedge \bar f_1(a_0, a_2)) \curlyvee (f_1(a_1, \bar a_0) \curlywedge \bar f_1(\bar a_0, a_2)) = \underset{a \neq a_0,\, \bar a_0}{\curlyvee} (f^*(a_1, a) \curlywedge \bar f^*(a, a_2)) \curlyvee$ $\curlyvee (f_1(a_1, a_0) \curlywedge \bar f_1(a_0, a_2)) \curlyvee (f_1(a_1, \bar a_0) \curlywedge \bar f_1(\bar a_0, a_2))$. В силу однозначности f_1 и $\bar f_1$ и условий (1) и (2), будет $f_1(a, a_0) = l_3$ и $\bar f_1(\bar a_0, a_2) = l_3$, и при этом $f_1(a_1, \bar a_0) = 0$ или $f_1(a_1, \bar a_0) = l_1$; $\bar f_1(a_0, a_2) = 0$ или $\bar f_1(a_0, a_2) = l_1$. Значит,

$$(f_1(a_1, a_0) \curlywedge \bar f_1(a_0, a_2)) \curlyvee (f_1(a_1, \bar a_0) \curlywedge \bar f_1(\bar a_0, a_2)) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_0 \neq \bar a_0; \\ l_3, & \text{если } a_0 = \bar a_0. \end{cases}$$

Но так как $f^*(a, a_0) = l_2$ и $\bar f^*(\bar a_0, a_2) = l_2$, то

$$(f^*(a_1, a_0) \curlywedge \bar f^*(a_0, a_2)) \curlyvee (f^*(a_1, \bar a_0) \curlywedge \bar f^*(\bar a_0, a_2)) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_0 \neq \bar a_0; \\ l_2, & \text{если } a_0 = \bar a_0. \end{cases}$$

Итак, если $a_0 \neq \bar a_0$, то $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) = \bar f^* \circ f^*(a_1, a_2)$. Пусть $a_0 = \bar a_0$. Обозначая $l = \underset{a \neq a_0}{\curlyvee} (f^*(a_1, a) \curlywedge \bar f^*(a, a_2))$, имеем $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) = l \curlyvee l_3$ и $\bar f^* \circ f^*(a_1, a_2) = l \curlyvee l_2$. Очевидно, l, в силу взаимной однозначности f_1, $\bar f_1, f^*, \bar f^*$, не может равняться l_2 или l_3. Значит, $l = l_1$ или $l = 0$. В первом случае $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) = \bar f^* \circ f^*(a_1, a_2) = 1$, во втором $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) = l_3$, $\bar f^* \circ f^*(a_1, a_2) = l_2$. Итак, для любых a_1, $a_2 \in A$, если $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) \neq \bar f^* \circ f^*(a_1, a_2)$, то $\bar f_1 \circ f_1(a_1, a_2) \curlywedge \bar f^* \circ$

$\circ\ f^*(a_1, a_2) = l_3$, т. е. $\overline{f}_1 \circ f_1$ и $\overline{f^*} \circ f^*$ объединимы. Рассуждая аналогично, получим объединимость $\overline{f}_2 \circ f_2$ и $\overline{f^*} \circ f^*$. Это и докажет предложение 4.

Следующая теорема устанавливает важнейшие свойства оператива $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$.

Т е о р е м а 2. *Справедливо следующее*: 1) *в* $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$ *имеется единица*; 2) *каждый элемент имеет обратный*; 3) $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ *и* $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ *имеют по крайней мере один общий обратный элемент*; 4) *если два элемента имеют общий обратный, то все их обратные будут общими*; 5) *для любых* f_1, f_2 *найдутся такие* $\overline{f}_2$ *и* $\overline{\overline{f}}_2$, *каждый из которых имеет общий обратный с* f_2, *что уравнения* $x \circ f_1 = \overline{\overline{f}}_2$ *и* $f_1 \circ y = \overline{\overline{f}}_2$ *разрешимы*; 6) $(\overline{\overline{f}} \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))) \circ \overline{f} = \Delta$ *тогда и только тогда, когда* $(\overline{\overline{f}} \circ ((f_3 \circ f_2) \circ f_1)) \circ \overline{f} = \Delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Роль единицы играет, как обычно, тождественное $\mathfrak{L}_0$-преобразование Δ. 2) Обратным элементом для f будет обратное $\mathfrak{L}_0$-преобразование $\overset{-1}{f}$. 3) В силу стабильности отношения объединимости в $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}_0}(A \times A)$ $\mathfrak{L}_0$-преобразования $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ и $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ объединимы с $f_3^* \circ (f_2^* \circ f_1^*)$ и $(f_3^* \circ f_2^*) \circ f_1^*$ соответственно. Но $f_3^* \circ (f_2^* \circ f_1^*) = (f_3^* \circ f_2^*) \circ f_1^*$, ибо эти $\mathfrak{L}_0$-преобразования можно рассматривать как $(\mathfrak{L}_0 \setminus \{l_3\})$-преобразования, а решетка $\mathfrak{L}_0 \setminus \{l_3\}$ дистрибутивна, и операция умножения бинарных $(\mathfrak{L}_0 \setminus \{l_3\})$-отношений будет ассоциативной. Значит, $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ и $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ объединимы. Но тогда в силу предложения 2 они будут иметь общий обратный, например, $\overset{-1}{\overline{f_3 \circ (f_2 \circ f_1)}}$. 4) Из предложения 2 следует, что если f_1 и f_2 имеют общий обратный, то они объединимы, и обратно. 5) Пусть f_1^* и f_2^* суть наибольшие из $\mathfrak{L}_0$-преобразований, объединимых соответственно с f_1 и f_2. Тогда в силу 3) $\overline{f}_2 = (f_2^* \circ \overset{-1}{f_1^*}) \circ f_1$ и $\overline{\overline{f}}_2 = f_1 \circ (\overset{-1}{f_1^*} \circ f_2^*)$ объединимы с f_2. 6) Согласно предложению 4 $(\overline{\overline{f}} \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))) \circ \overline{f} = \Delta$ и $(\overline{\overline{f}} \circ (f_3^* \circ (f_2^* \circ f_1^*))) \circ \overline{f}$ объединимы. Но поскольку Δ объединимо лишь с собой, $(\overline{\overline{f}} \circ (f_3^* \circ (f_2^* \circ f_1^*))) \circ \overline{f} = \Delta$. Но так как $f_3^* \circ (f_2^* \circ f_1^*) = (f_3^* \circ f_2^*) \circ f_1^*$, то и $(\overline{\overline{f}} \circ ((f_3^* \circ f_2^*) \circ f_1^*)) \circ \overline{f} = \Delta$, откуда получаем равенство $(\overline{\overline{f}} \circ ((f_3 \circ f_2) \circ f_1)) \circ \overline{f} = \Delta$. Теорема доказана.

Впоследствии выяснится, что свойства 1), 2), 6) дают возможность вывести все остальные.

§ 2. Теперь мы определим некоторый класс неассоциативных бинарных оперативов, являющихся близким аналогом групп.

Ассоциацией называется множество $\mathfrak{G}$ с определенной на нем бинарной операцией (умножение), обладающей следующими свойствами: 1) существует единица, т. е. элемент $e \in \mathfrak{G}$ такой, что $eg = ge = g$ для всякого $g \in \mathfrak{G}$; 2) всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ имеет левый обратный элемент $\overline{g}$ такой, что $\overline{g}g = e$; 3) для любых g_1, g_2, g_3, g_4, $g_5 \in \mathfrak{G}$ $g_1(((g_2g_3)g_4)g_5) = e$ тогда и только тогда, когда $g_1((g_2(g_3g_4))g_5) = e$.

Из теоремы 2, § 1 немедленно следует

Т е о р е м а 1. *Совокупность полных взаимно однозначных* $\mathfrak{L}_0$-*преобразований, замкнутая относительно умножения и содержа-*

щая вместе со всяким своим элементом хотя бы один из его обратных, образует ассоциацию.

Рассмотрим некоторые простейшие свойства ассоциаций.

Предложение 1. *Если $\bar{g}g = e$, то $g\bar{g} = e$, т. е. всякий левый обратный элемент является также правым обратным.*

Доказательство. Пусть $\bar{\bar{g}}$ есть левый обратный для $\bar{g}$, а $\tilde{g}$ — левый обратный для произведения $g\bar{g}$. Тогда, используя 3), получаем

$$e = \tilde{g}(g\bar{g}) = \tilde{g}(e(g\bar{g})) = \tilde{g}((\bar{\bar{g}}\bar{g})(g\bar{g})) = \tilde{g}(((\bar{\bar{g}}\bar{g})(g\bar{g}))e) =$$

$$= \tilde{g}((((\bar{\bar{g}}\bar{g})g)\bar{g})e) = \tilde{g}(((\bar{\bar{g}}\bar{g})g)\bar{g}) = \tilde{g}((\bar{\bar{g}}(\bar{g}g))\bar{g}) = \tilde{g}((\bar{\bar{g}}e)\bar{g}) =$$

$$= \tilde{g}(\bar{\bar{g}}\bar{g}) = \tilde{g}e = \tilde{g},$$

т. е. $\tilde{g} = e$. Но тогда $e = \tilde{g}(g\bar{g}) = e(g\bar{g}) = g\bar{g}$, т. е. $\bar{g}$ будет правым обратным для g.

Предложение 2. $(g_1((g_2g_3)g_4))g_5 = e$ *тогда и только тогда, когда* $(g_1(g_2(g_3g_4)))g_5 = e$.

Доказательство. Используется 3): $e = (g_1((g_2g_3)g_4))g_5 = e(((g_1((g_2g_3)g_4))g_5)e) = e((g_1(((g_2g_3)g_4)g_5))e) = g_1(((g_2g_3)g_4)g_5) = g_1((g_2(g_3g_4))g_5) = e((g_1((g_2(g_3g_4))g_5))e) = e(((g_1(g_2(g_3g_4)))g_5)e) = (g_1(g_2(g_3g_4)))g_5$.

Предложение 3. *Если g_1 и g_2 имеют общий обратный $\bar{g}$, то все их обратные будут общими.*

Доказательство. Пусть $\bar{g}g_1 = \bar{g}g_2 = \bar{\bar{g}}g_1 = e$. Покажем, что $\bar{\bar{g}}g_2 = e$. В самом деле, обозначая через $\tilde{g}$ обратный для $\bar{\bar{g}}g_2$, получаем

$$e = \tilde{g}(\bar{\bar{g}}g_2) = \tilde{g}((\bar{g}g_1)(\bar{\bar{g}}g_2)) = \tilde{g}(((\bar{g}g_1)\bar{\bar{g}})g_2) = \tilde{g}((\bar{g}(g_1\bar{\bar{g}}))g_2) =$$

$$= \tilde{g}(\bar{g}g_2) = \tilde{g},$$

т. е. $\tilde{g} = e$, откуда $\bar{\bar{g}}g_2 = e$.

Предложение 4. *Для любых g_1, g_2 найдутся $\bar{g}_2$ и $\bar{\bar{g}}_2$, имеющие общие обратные с g_2, такие, что уравнения $g_1x = \bar{g}_2$ и $yg_1 = \bar{\bar{g}}_2$ разрешимы.*

Доказательство. Покажем, что элементы $\bar{g}_2 = g_1(\bar{g}_1g_2)$ и $\bar{\bar{g}}_2 = (g_2\bar{g}_1)g_1$, где $\bar{g}_1$ — некоторый обратный для g_1, будут иметь общие обратные с g_2. В самом деле, пусть, например, $\tilde{g}$ — обратный для $\bar{g}_2$. Тогда $e = \tilde{g}\bar{g}_2 = \tilde{g}(g_1(\bar{g}_1g_2)) = \tilde{g}((g_1\bar{g}_1)g_2) = \tilde{g}g_2$.

На множестве $\mathfrak{G}$ введем бинарное отношение ε, полагая $(g_1, g_2) \in \varepsilon$ тогда и только тогда, когда g_1 и g_2 имеют общие обратные. Обозначим для удобства множество всех обратных для элемента g через I_g.

Теорема 2. *ε есть отношение конгруэнтности, фактор по которому является группой.*

Доказательство. То, что ε есть отношение эквивалентности, сразу следует из его определения. Пусть $(g_1, g_2) \in \varepsilon$ и $(g_3, g_4) \in \varepsilon$. Покажем, что $(g_1g_3, g_2g_4) \in \varepsilon$. Очевидно, достаточно обнаружить хотя бы один элемент, обратный для g_1g_3 и g_2g_4, и затем воспользоваться предложением 3. Пусть $\bar{g}\in I_{g_1}\cap I_{g_2}$, $\bar{\bar{g}}\in I_{g_3}\cap I_{g_4}$. Покажем, что $\bar{\bar{g}}\bar{g}\in I_{g_1g_3}\cap I_{g_2g_4}$. В самом деле, из 3) следует, если положить в этой аксиоме $g_5=e$, что $I_{(g_1g_2)g_3}=I_{g_1(g_2g_3)}$. Тогда, используя 3), имеем $\{e\}=I_e=I_{g_1\bar{g}}=I_{(g_1(g_3\bar{\bar{g}}))\bar{g}}=I_{((g_1g_3)\bar{\bar{g}})\bar{g}}=I_{(g_1g_3(\bar{\bar{g}}\bar{g})}$, т. е. $(g_1g_3)(\bar{\bar{g}}\bar{g})=e$, что и доказывает стабильность ε, ибо, очевидно, и $(g_2g_4)(\bar{\bar{g}}\bar{g})=e$. Второе утверждение теоремы следует из стабильности ε и равенства $I_{(g_1g_2)g_3}=I_{g_1(g_2g_3)}$. Доказательство закончено.

Элемент $g\in\mathfrak{G}$ называется ассоциатором, если всякая тройка, в которую входит g, ассоциативна.

Теорема 3. *В $\mathfrak{G}$ существует подгруппа, содержащая все ассоциаторы.*

Доказательство. Если g — ассоциатор и $\bar{g},\bar{\bar{g}}$ — обратные для него элементы, то $\bar{g}=\bar{g}e=\bar{g}(g\bar{\bar{g}})=(\bar{g}g)\bar{\bar{g}}=e\bar{\bar{g}}=\bar{\bar{g}}$, т. е. все ассоциаторы однозначно обратимы. Пусть $\bar{g}$ — обратный для ассоциатора элемент. Если $\bar{\bar{g}}$ обратный для $\bar{g}$, то доказывается, как это было сделано выше, что $\bar{\bar{g}}=g$, т. е. элемент, обратный для ассоциатора, однозначно обратим. Очевидно, произведение ассоциаторов есть снова ассоциатор, так что совокупность всех ассоциаторов есть подполугруппа $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим множество всех выражений вида $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}$, где g_i суть ассоциаторы или элементы, обратные ассоциаторам; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — некоторые неотрицательные целые числа, причем считается, что в каждом таком выражении как-то расставлены скобки. Пусть элемент x есть один из обратных для $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}$ элементов, т. е. выполняются равенства $e=x(g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n})=(g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n})x$. В силу аксиомы 3) в написанных равенствах скобки можно расставлять как угодно, в частности, $e=(xg_1^{\alpha_1})(g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n})$. Докажем, что $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}$ имеет единственный обратный элемент. Применяя индукцию по n, замечаем, что при $n=1$ наше утверждение справедливо, как это было доказано в начале теоремы. Пусть указанное свойство выполняется для всех выражений нашего вида, имеющих „длину", меньшую n. Тогда $g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}$ однозначно обратим. Если g есть обратный элемент для $g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}$, то из отмеченного ранее равенства $(xg_1^{\alpha_1})(g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n})=e$ следует, что $xg_1^{\alpha_1}=g$. Так как g_1 или $\bar{g}_1$ является ассоциатором, то $x=x(g_1^{\alpha_1}\bar{g}_1^{\alpha_1})=(xg_1^{\alpha_1})\bar{g}_1^{\alpha_1}=g\bar{g}_1^{\alpha_1}$. Значит, $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}$ однозначно обратимо.

Итак, множество $\mathfrak{G}_0$ всех выражений упомянутого вида, замкнутое, очевидно, относительно умножения в $\mathfrak{G}$, вместе с каждым своим элементом содержит его (единственный) обратный, т. е. $\mathfrak{G}_0$ является подассоциацией ассоциации $\mathfrak{G}$. Но ε тождественно на $\mathfrak{G}_0$, а тогда в силу теоремы 2 $\mathfrak{G}_0$ есть группа. Теорема доказана.

Уже перечисление простейших свойств ассоциаций показывает, что изучение этих оперативов с абстрактно алгебраической точки зрения является довольно естественным ввиду простоты их аксиоматики и близости к группам. Но основным оправданием такого изучения представляется, как мы уже отмечали, все-таки тот факт, что эти образования получаются не путем формального ослабления аксиом группы, а возникают как совокупности объектов, близких по своим свойствам к обратимым преобразованиям. В связи с этим интересно получить условия, при которых абстрактная ассоциация изоморфна некоторой ассоциации полных взаимно однозначных $\mathfrak{L}_0$-преобразований.

г. Саратов

Поступило
16 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория структур. М., ИИЛ, 1952, с. 22.
2. Вагнер В. В. Представление упорядоченных полугрупп. Матем. сб., т. 38 (80) : 2, 1956, с. 203—240.
3. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб.: Теория полугрупп и ее приложения. Изд. Саратовск. ун-та, 1965, с. 3—178.
4. Салий В. Н. Бинарные $\mathfrak{L}$-отношения. Изв. вузов, Матем., 1965, № 1, с. 133—145.

М. Г. СКВОРЦОВА. МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ КЛАССОВ ОРЛИЧА

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Известно, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1}$$

принадлежит классу P, если он является рядом Фурье некоторой функции f класса P. Пусть P и Q — два класса. Если последовательность чисел $\ldots\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1 \ldots$, такова, что из принадлежности ряда (1) классу P следует принадлежность ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n c_n e^{inx} \tag{2}$$

классу Q, то последовательность $\{\lambda_n\}$ называют мультипликатором класса (P, Q) и пишут $\{\lambda_n\} \in (P, Q)$.

В проблеме мультипликаторов постановка основного вопроса такова: каким условиям должна удовлетворять последовательность $\{\lambda_n\}$, чтобы быть мультипликатором класса (P, Q) при тех или иных P и Q? Систематическая разработка вопроса о мультипликаторах была начата Фекете. Впоследствии этим вопросом занимались Зигмунд, Бохнер, Качмаж, Верблюнский, Конюшков, Штейн и др. Нами изучается проблема мультипликаторов для класса Орлича. Изложены новые результаты о мультипликаторах классов (L_Φ, K) и (K, L_Φ), где K — некоторые классы функций. Кроме того, как следствие из теорем о мультипликаторах, получены новые признаки принадлежности ряда (1) определенному классу. (Работа поступила в журнал „Математика“ 20.X.1967.)