

Общероссийский математический портал

А. В. Фаворская, И. Б. Петров, Расчет сеточно-характеристическим методом разрушения многоэтажных зданий, *Матем. моделирование*, 2020, том 32, номер 3, 102–114

DOI: 10.20948/mm-2020-03-06

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

25 марта 2025 г., 08:35:30



РАСЧЕТ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ РАЗРУШЕНИЯ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ

© 2020 г. *А.В. Фаворская*^{1,2,3}, *И.Б. Петров*^{1,2}

¹Московский физико-технический институт aleanera@yandex.ru

²Научно-исследовательский институт системных исследований РАН

³Негосударственное образовательное учреждение «Учебно-научно-производственный комплекс Московского физико-технического института»

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00526.

DOI: 10.20948/mm-2020-03-06

В наши дни многие объекты подвержены рискам сейсмической активности либо естественной, в ходе землетрясений, природы, либо техногенной. Так, например, в зону повышенной сейсмической активности входят восточные регионы России, находящиеся в зоне так называемого Огненного Кольца, береговой зоны материков Евразия, Северная Америка, Южная Америка и Австралия, а также островов, опоясывающей Тихий океан. С учетом развития высокопроизводительных вычислительных систем, исследование возможностей использования более прецизионных методов расчета сейсмостойкости сооружений в результате природных и техногенных воздействий является актуальной фундаментальной научной проблемой, которой посвящена данная работа. Для расчета использовался сеточно-характеристический метод. С его помощью вычислялись волновые поля вектора скорости и тензора напряжений Коши. Затем с использованием критерия по главному напряжению вычислялись области разрушения многоэтажных бетонных конструкций. Разрушенные области в дальнейшем рассматривались как свободные границы внутри области интегрирования. В работе рассмотрены различные типы задания начального сейсмического воздействия, выполнено их сравнение по влиянию на локализацию областей разрушения и затрате вычислительных ресурсов. Также выполнено сравнение локализации рассчитанных областей разрушения многоэтажных зданий при уменьшении шага расчетной сетки по координатам и шага интегрирования по времени. Проанализирована зависимость локализации рассчитанных областей разрушения в зависимости от типа задания сейсмического воздействия, типа сейсмической волны, количества этажей в здании. Приведены данные о затрате вычислительных ресурсов для различных постановок задач: оперативной памяти, памяти на жестком диске, времени вычисления.

Ключевые слова: суперкомпьютерное моделирование, сеточно-характеристический метод, сейсмостойкость, многоэтажные здания.

GRID-CHARACTERISTIC CALCULATION OF MULTISTOREY BUILDINGS DESTRUCTION

A.V. Favorskaya^{1,2,3}, *I.B. Petrov*^{1,2}

¹Moscow Institute of Physics and Technology

²Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences

³Non-state Educational Institution "Educational Scientific and Experimental Center of Moscow Institute of Physics and Technology"

Nowadays, many objects are subject to the risks of seismic activity, both during earthquakes, and due to man-made impacts. For example, the zone of increased seismic activity includes the eastern regions of Russia, located in the zone of the so-called Ring of Fire, the coastal zone of the continents of Eurasia, North America, South America and Australia, as well as the islands surrounding the Pacific Ocean. Given the development of high-performance computing systems, the study of the possibilities of using more precision methods for calculating the earthquake resistance of structures as a result of natural and man-made impacts is an actual fundamental scientific problem, which this work is devoted to. The grid-characteristic method was used for the calculation. The wave fields of the velocity vector and the Cauchy stress tensor were calculated using this method. Then, the fracture areas of multi-storey concrete buildings were calculated using the destruction criterion of main stress. Destroyed areas were subsequently considered as free boundaries within the integration domain. In this work various types of assignment of the initial seismic impact are considered. Their comparison is made on the impact on the localization of the fracture areas and the cost of computing resources. A comparison was also made of the localization of the calculated areas of destruction of multi-storey buildings with a decrease in the step of the computational grid in coordinates and the step of integration over time. The dependence of the localization of the calculated fracture areas is analyzed depending on the type of seismic impact assignment, type of seismic wave, number of floors in the building. The paper presents data on the consumption of computing resources for various problem statements: random access memory, hard disk memory, and computation time.

Key words: supercomputer simulation, grid-characteristic method, earthquake resistance, high-rise buildings.

1. Введение

Повышение надежности сооружений при их эксплуатации является одним из направлений обеспечения безопасности населения. Развитие высокопроизводительных вычислительных систем делает возможным активное использование имитационного моделирования в этой области, что в свою очередь требует разработки и реализации новых численных методов.

При численном решении задач сейсмологии используют конечно-разностные схемы [1–3], разрывный метод Галеркина [4,5], псевдоспектральный метод [6,7] и метод спектральных элементов [8,9]. Используется и сеточно-

характеристический метод [10,11], сравнение которого с другими методами и точными решениями можно найти в [11,12].

В основном, для оценки сейсмостойкости зданий современными коммерческими программными комплексами (Abaqus, ANSYS) проводят анализ собственных частот здания. Для этого используют метод конечных элементов [13,14] и его модификации, например, специально разработанный XFEM (Extended finite element method), расширенный метод конечных элементов, позволяющий моделировать разрушения различных материалов [15]. В данной работе используется расчет распространения упругих волн в конструкции здания сеточно-характеристическим методом [10,11], который успешно применяется для расчета волновых явлений в гетерогенных средах [11], в том числе для оценки сейсмостойкости различных сооружений [16, 17] и моделирования поведения сейсмической изоляции при интенсивных сейсмических воздействиях [18,19].

2. Постановки задач

Для моделирования бетонных конструкций и окружающего геологического массива решалась система уравнений, описывающая распространение упругих волн в сплошной среде:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = (\rho c_P^2 - 2\rho c_S^2)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \rho c_S^2 \left(\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right). \quad (2)$$

Здесь и далее ρ – плотность, \mathbf{v} – локальная скорость движения среды, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, c_P , c_S – скорости продольных и поперечных волн в среде, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ – тензорное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i b^j$, ∇ – вектор-градиент.

Рассматривались три способа задания падающей на нижнюю границу здания волны:

- в области грунта вокруг здания с движением фронта продольной (P-) или поперечной (S-) волны строго вверх (рис.1а);
- в области грунта вокруг здания с движением фронта P- или S-волны под углом 60° к поверхности Земли (рис.1б);
- с заданной вертикальной (имитация P-волны) или горизонтальной (имитация S-волны) скоростью движения нижней границы здания:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}. \quad (3)$$

Для всех постановок рассматривались плоские волны с максимальной

амплитудой 0.25 м/с и нормальным распределением амплитуды вдоль фронта волны со среднеквадратичным отклонением, равным 7.071 м в геологической среде.

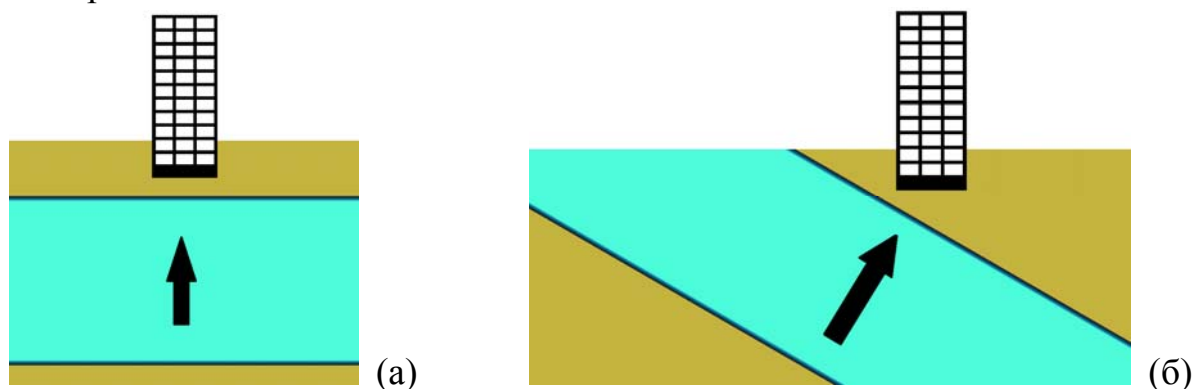


Рис.1. Постановки задач. Первый (а) и второй (б) способы задания падающей на нижнюю границу здания волны, стрелкой отмечено направление движения волны.

Упругие параметры бетона и геологического массива приведены в табл.1. Толщина бетонных стенок и крыши бралась равной 1 м, а толщина фундамента – 4 м.

Таблица 1. Упругие параметры бетона и геологического массива.

| Упругая среда | Скорость Р-волн, м/с | Скорость S-волн, м/с | Плотность, кг/м ³ |
|---------------|----------------------|----------------------|------------------------------|
| Бетон | 4 250 | 2 125 | 2 300 |
| Грунт | 1 000 | 500 | 1 800 |

Длительность расчетов по времени составляла 0.47 с. Бралась различные шаги расчетной сетки по координате от 0.01 м до 0.2 м и пропорциональные им шаги по времени от $2.35 \cdot 10^{-6}$ с до $4.7 \cdot 10^{-5}$ с. Шаги расчетных сеток по времени, координатам и количество ячеек расчетной сетки поперек стены зданий приведены в табл.2.

Таблица 2. Используемые параметры расчетных сеток.

| Шаг по координатам, м | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
|---------------------------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|
| Шаг по времени, с | $4.7 \cdot 10^{-5}$ | $2.35 \cdot 10^{-5}$ | $1.175 \cdot 10^{-6}$ | $4.7 \cdot 10^{-6}$ | $2.35 \cdot 10^{-6}$ |
| Количество ячеек поперек стены здания | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |

На границах между грунтом и бетоном, а также на границах между бетонными блоками ставилось контактное условие полного сцепления:

$$v^1 = v^2, \tag{4}$$

$$\sigma^1 \cdot n = \sigma^2 \cdot n. \tag{5}$$

В выражениях (4), (5) верхний индекс 1, 2 соответствует разным контактирующим подобластям интегрирования, n – внешняя нормаль к границе первой подобласти интегрирования.

На границе геологической среды и бетона с воздухом ставилось условие свободной границы:

$$\sigma \cdot n = 0, \quad n - \text{внешняя нормаль к границе.} \quad (6)$$

3. Численный метод

Использовался сеточно-характеристический численный метод на структурированных сетках, подробно описанный в [10,11]. Метод основан на переходе к инвариантам Римана и последующем решении уравнений переноса, соответствующих различным характеристикам. Для решения данных уравнений переноса использовалась схема Русанова [20].

Для расчета разрушений рассматриваемых бетонных конструкций были использованы критерий разрушения по главному напряжению и модель трещин [17]. Когда одно из главных напряжений достигает значения σ_{MAX} (характеристика материала, взятая равной 1Мпа для бетона), считается, что в узле появилась трещина. Причем плоскость трещины перпендикулярна направлению главного напряжения. В каждом узле, содержащем трещину, нормальная и касательная (с учетом направления разрыва) компоненты тензора напряжений берутся равными нулю, т.е. на трещине используется условие свободной границы с нормалью, перпендикулярной к берегу трещины.

4. Результаты численных экспериментов

На рис.2–9 белым цветом отмечены разрушения в многоэтажных зданиях для различной степени дискретизации расчетной сетки, различных типов волн и способов их задания.

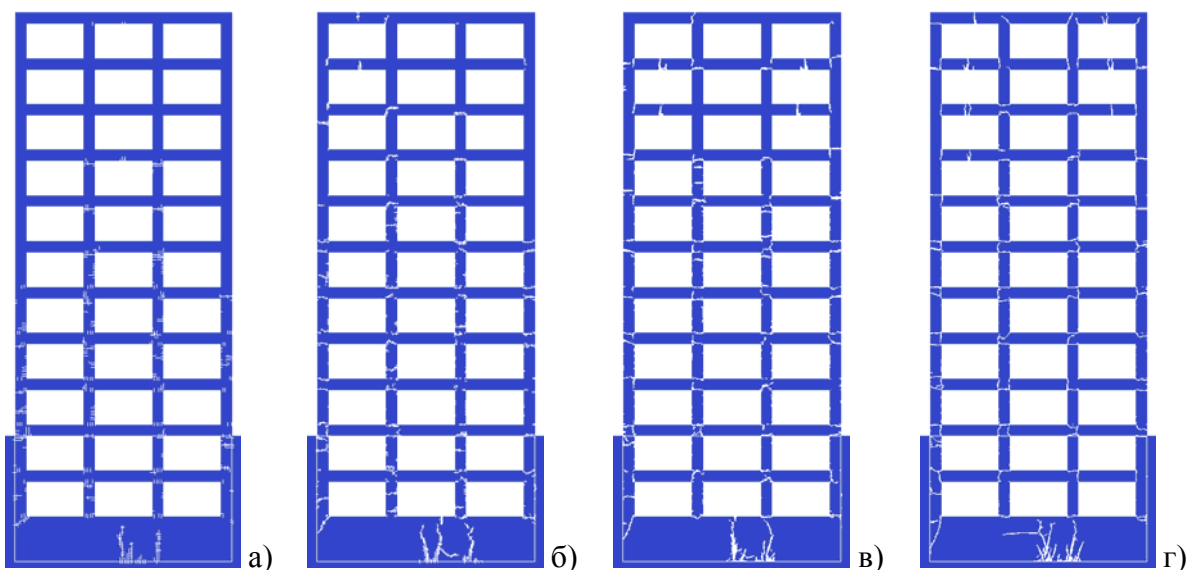


Рис.2. Области разрушений для движущейся вверх Р-волны с различным шагом по координатам, 11-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м.

И на рис.2, и на рис.4 видно, что по мере сгущения расчетной сетки добавляются дополнительные разрушения в области крыши. В случае падения Р-волны под углом к поверхности Земли (рис.4) крупная трещина в фундаменте формируется при дискретизации сетки от 0.1м и мельче, в одном месте. В то время как на рис.2 крупная трещина в фундаменте присутствует и для дискретизации в 0.2 м в том же месте, что и при более мелком шаге расчетной сетки.

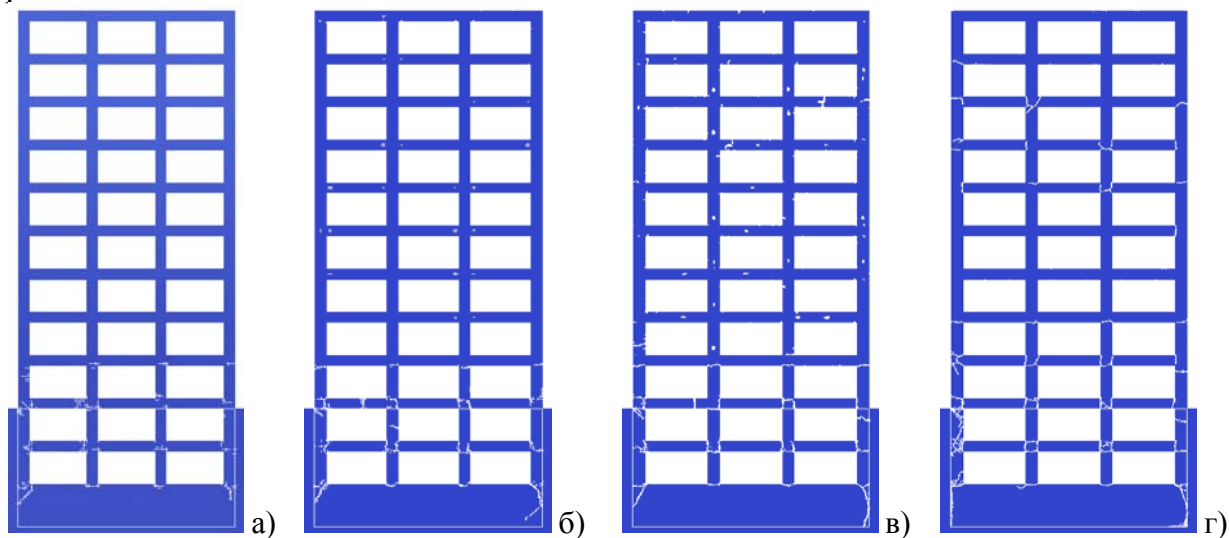


Рис.3. Области разрушений для движущейся вверх S-волны с различным шагом по координатам, 11-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м.

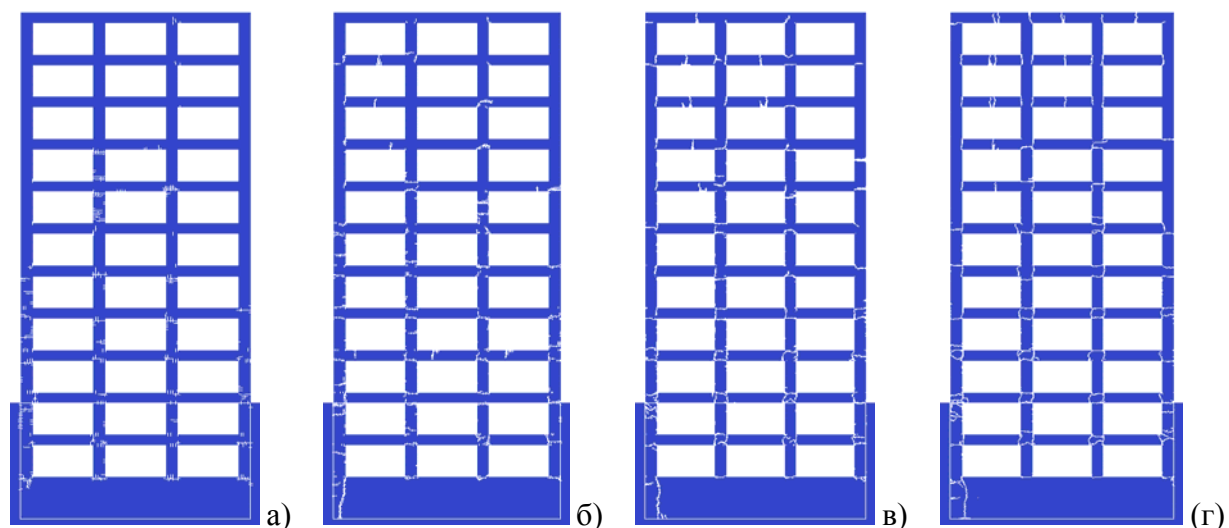


Рис.4. Области разрушений для движущейся под углом к поверхности Земли Р-волны с различным шагом по координатам, 11-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05м, г) 0.02 м.

На рис.3, начиная с шага дискретизации 0.1 м, происходит углубление трещин в фундаменте. При падении S-волны под углом к поверхности Земли (рис.5) локализация разрушений в фундаменте одинакова для всех использованных шагов дискретизации. При шаге дискретизации 0.1 и 0.05 м характерны внутренние повреждения стен и перегородок между этажами.

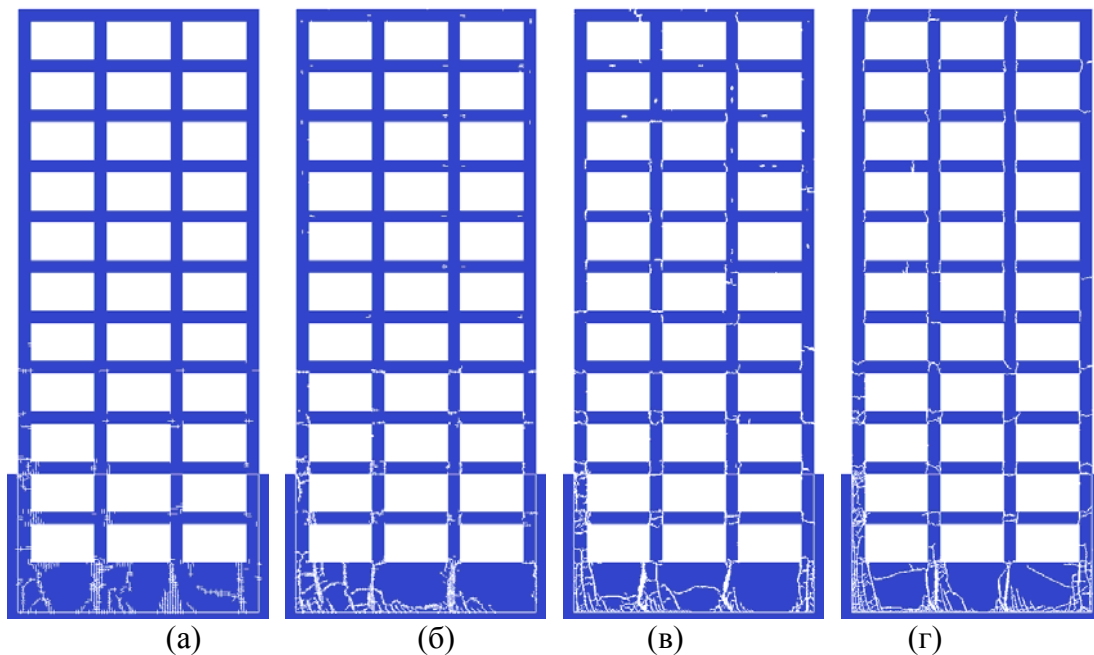


Рис.5. Области разрушений для движущейся под углом к поверхности Земли S-волны с различным шагом по координатам, 11-ти-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м.

На рис.6, 8 можно видеть, что для шага по координатам 0.2 м отсутствуют боковые разрушения фундамента, а для шага 0.01 м – присутствуют дополнительные боковые разрушения фундамента. На рис.6 начиная с шага 0.05 м можно видеть дополнительные разрушения в области крыши и перегородок между этажами. А для 40-этажного дома на рис.8 – начиная с шага 0.1 м. На рис.6 ряд дополнительных разрушений в перегородках между этажами присутствует также при шагах дискретизации 0.02 м и 0.01 м. На рис.8 на некоторых этажах эти дополнительные разрушения возникают уже при шаге 0.05 м.

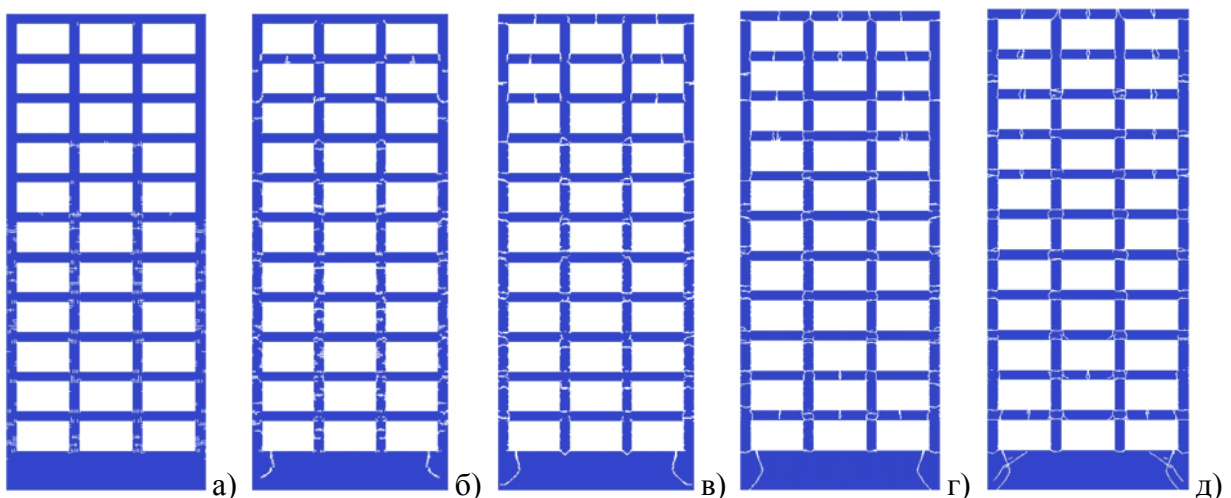


Рис.6. Области разрушений для заданной вертикальной скорости движения нижней границы с различным шагом по координатам, 11-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м, д) 0.01 м.

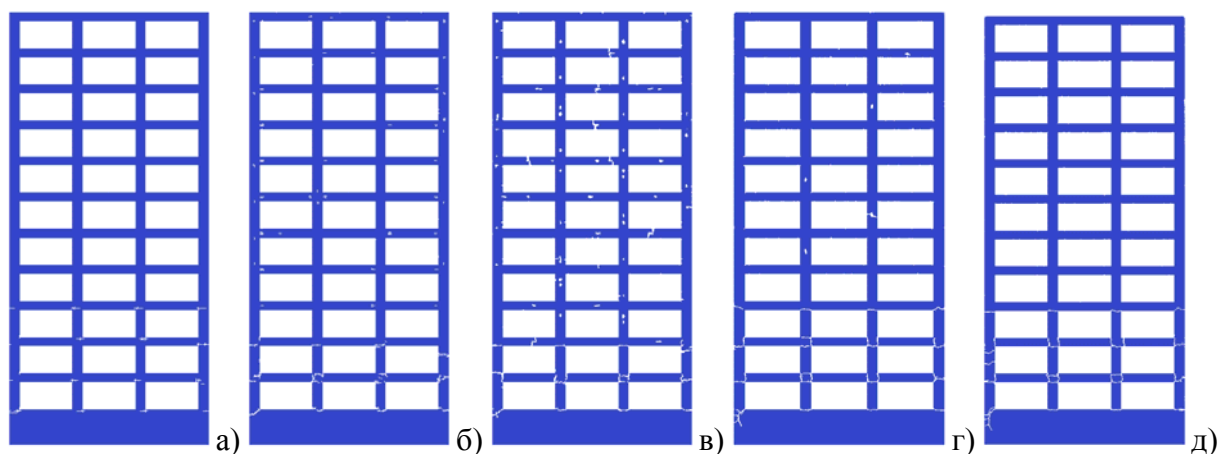


Рис.7. Области разрушений для заданной горизонтальной скорости движения нижней границы с различным шагом по координатам, 11-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м, д) 0.01 м.

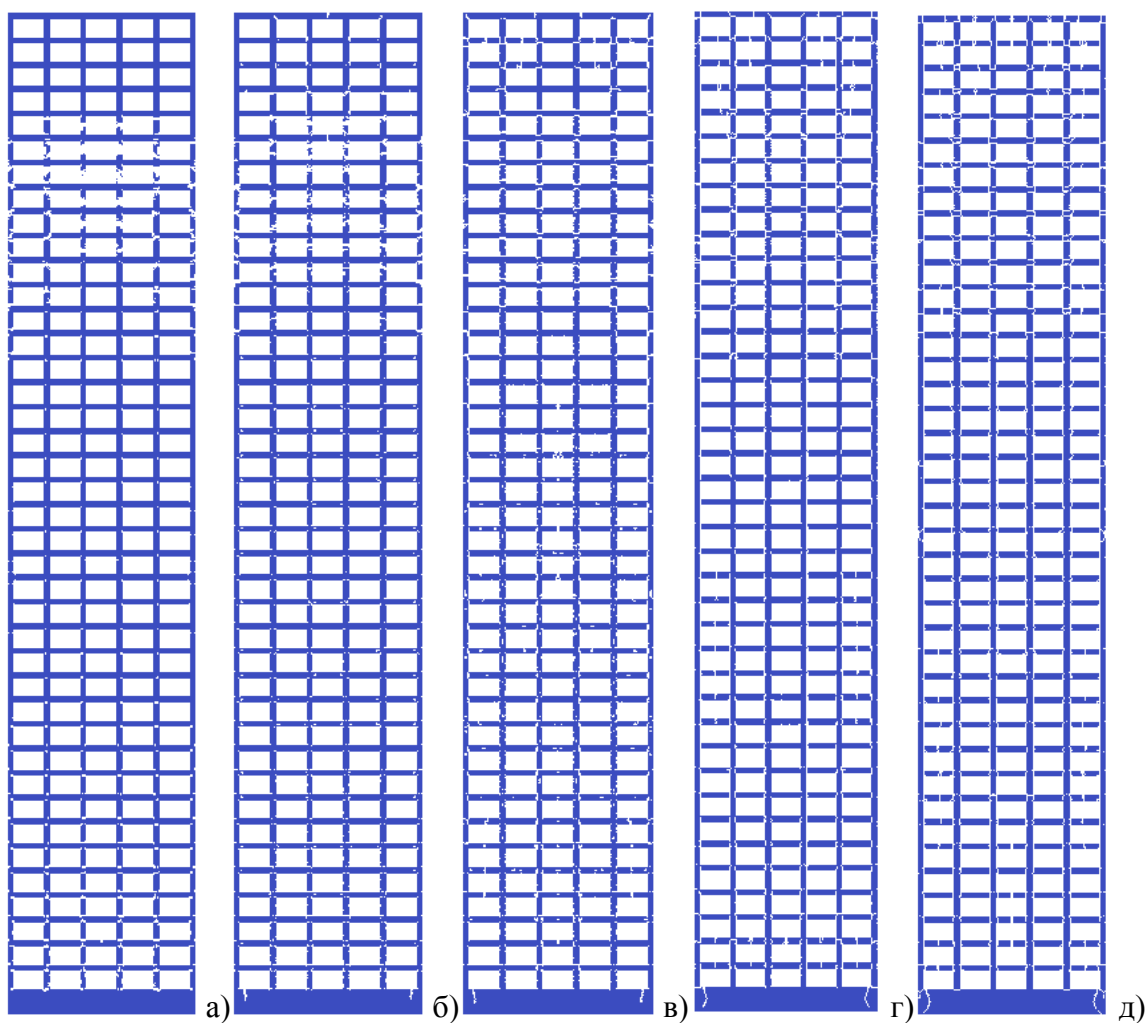


Рис.8. Области разрушений для заданной вертикальной скорости движения нижней границы с различным шагом по координатам, 40-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м, д) 0.01 м.

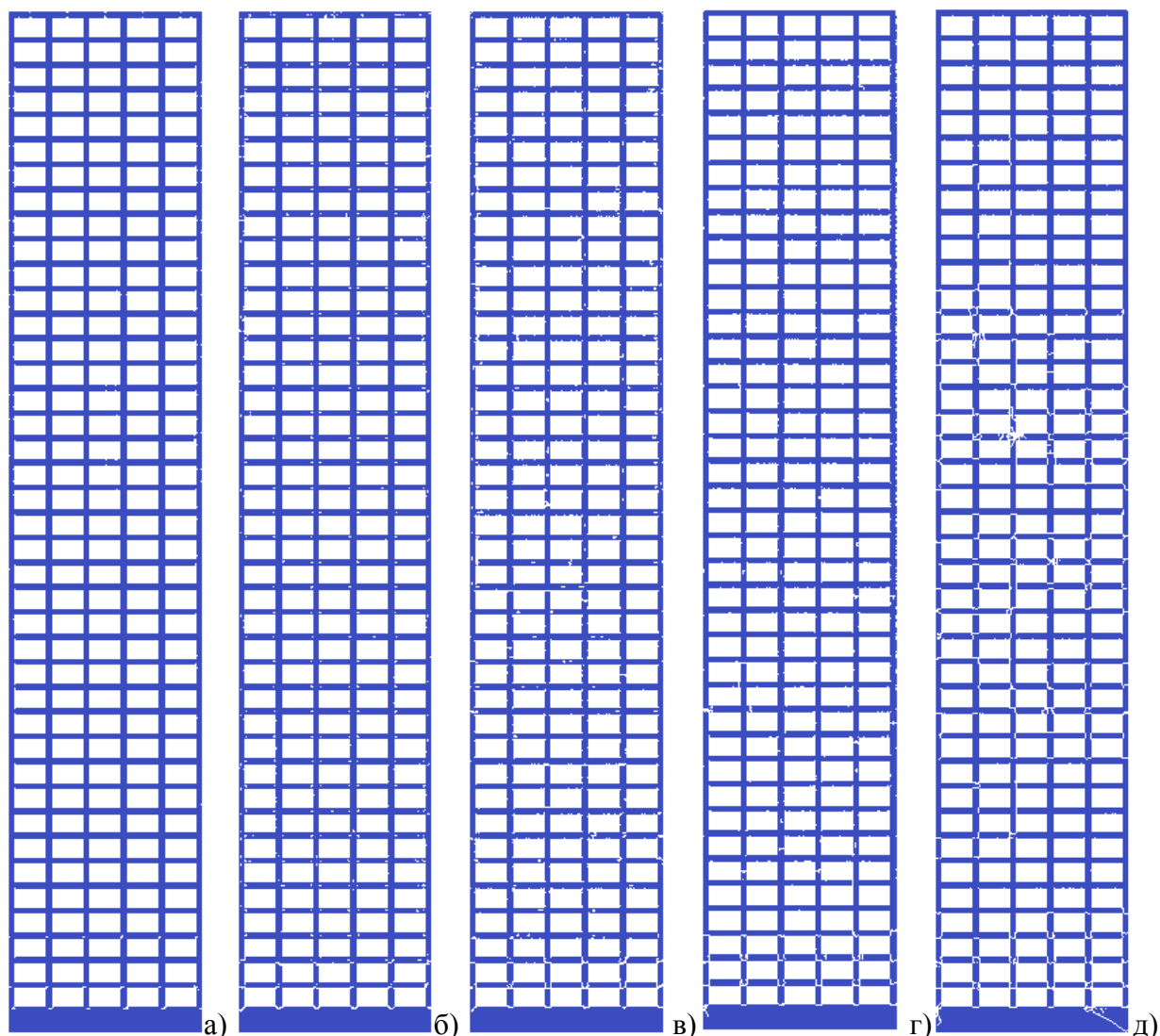


Рис.9. Области разрушений для заданной горизонтальной скорости движения нижней границы с различным шагом по координатам, 40-этажное здание: а) 0.2 м, б) 0.1 м, в) 0.05 м, г) 0.02 м, д) 0.01 м.

На рис.7, 9 видны дополнительные разрушения внутри стен и перегородок между этажами начиная с шага дискретизации 0.1 м. Начиная с шага 0.05 м, добавляются разрушения перегородок между этажами, а для шагов 0.02 м и 0.01 м характерны разрушения вблизи границ и более глубокое разрушение фундамента, особенно для падающей S-волны. В целом, можно сделать вывод о том, что увеличение количества этажей отчасти влияет на изменение областей локализации разрушений при измельчении шага сетки. При этом данное влияние сильнее выражено в случае Р-волны.

Для задания падающей на границу со зданием волны во вмещающем геологическом массиве характерны более существенные повреждения фундамента, чем для заданной скорости движения нижней границы здания. Отметим, что заданная скорость движения нижней границы здания соответствует тестированию на виброплатформе.

5. Затраты вычислительных ресурсов

Данный раздел содержит данные по затрате вычислительных ресурсов для различных способов задания сейсмического возмущения, различного количества этажей и различной дискретизации расчетной сетки.

В табл.3 приведены затраты оперативной памяти в мегабайтах. В табл.4 – затраты времени на выполнение вычислений. В табл.5 – затраты памяти на жестком диске в мегабайтах для хранения волновых полей модуля скорости и областей разрушения, рассчитанных для двух шагов по времени (сохранение информации во время расчета проводилось не каждый шаг по времени). В первой строке табл.3–5 указан шаг по координатам в м, а в первом столбце способ задания сейсмического возмущения. В последних столбцах табл.3, 5 указано количество этажей.

Таблица 3. Затраты оперативной памяти, МБ.

| Шаг по координатам, м | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | Кол-во этажей |
|---|-----|-----|------|-------|------|---------------|
| Геологический массив, Р-волна, движущаяся вверх | 30 | 115 | 410 | 2 460 | 9700 | 11 |
| Геологический массив, S-волна, движущаяся вверх | 30 | 116 | 410 | 2 460 | 9700 | 11 |
| Геологический массив, Р-волна под углом к поверхности Земли | 30 | 115 | 410 | 2 460 | 9700 | 11 |
| Геологический массив, S-волна под углом к поверхности Земли | 30 | 115 | 410 | 2 460 | 9700 | 11 |
| Заданная вертикальная скорость нижней границы здания | – | 8 | 20 | 80 | 330 | 11 |
| Заданная горизонтальная скорость нижней границы | – | 8 | 20 | 80 | 350 | 11 |
| Заданная вертикальная скорость нижней границы здания | 8 | 20 | 100 | 440 | 1600 | 40 |
| Заданная горизонтальная скорость нижней границы | 8 | 20 | 100 | 430 | 1600 | 40 |

По полученным данным можно видеть некоторые отклонения от теоретической оценки затрат, однако общая тенденция остается пропорциональной измельчению шага по сетке. В частности, затраты для одинаковой геометрии расчета и одинаковых расчетных сеток и шагов по времени, но для разного типа волн, отличаются. Данные различия обусловлены большим количеством границ и контактными границ в здании, а также добавлением в динамике областей разрушения, которые на последующих шагах по времени требуют коррекции решения в соответствии с наличием соответствующей свободной границы.

Таблица 4. Затраты времени на проведение расчета.

| Шаг по координатам, м | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
|---|---------------|----------------|--------------------|-------------------------|--------------------------|
| Геологический массив, Р-волна, движущаяся вверх, 11 этажей | 6 мин 5 с | 45 мин 8 с | 5 ч 28 мин 43 с | 5 д 1 ч 12 мин 16 с | – |
| Геологический массив, S-волна, движущаяся вверх, 11 этажей | 5 мин 55 с | 48 мин 9 с | 8 ч 32 мин 25 с | 4 д 12 ч 48 мин 38 с | – |
| Геологический массив, Р-волна под углом к поверхности Земли, 11 эт. | 5 мин 30 с | 44 мин 8 с | 5 ч 25 мин 44 с | 4 д 12 ч 40 мин 23 с | – |
| Геологический массив, S-волна под углом к поверхности Земли, 11 эт. | 5 мин 41 с | 43 мин 39 с | 6 ч 23 мин 40 с | 5 д 1 ч 34 мин 39 с | – |
| Заданная вертикальная скорость нижней границы здания, 11 этажей | 44 с | 3 мин 59 с | 27 мин 1 с | 7 ч 50 мин 35 с | 2 д 20 мин 58 с |
| Заданная горизонтальная скорость нижней границы здания, 11 этажей | 40 с | 4 мин 18 с | 39 мин 32 с | 6 ч 27 мин 51 с | 2 д 10 ч 32 мин |
| Заданная вертикальная скорость нижней границы здания, 11 этажей | 3 мин 49 с | 26 мин 49 с | 2 ч 33 мин 6 с | 1 д 13 ч 47 мин 51 с | 11 д 1 ч 55 мин 29 с |
| Заданная горизонтальная скорость нижней границы, здания, 11 этажей | 3 мин 54 с | 28 мин 21 с | 2 ч 55 мин 5 с | 1 д 11 ч 36 с | 10 д 23 ч 25 мин 10 с |

Таблица 5. Затраты памяти на жестком диске для хранения волнового поля скорости и областей разрушения за два шага по времени, МБ.

| Шаг по координатам, м | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | Кол-во этажей |
|---|------|------|------|-------|-------|---------------|
| Геологический массив, Р-волна, движущаяся вверх | 5 | 20.6 | 78.9 | 491.7 | – | 11 |
| Геологический массив, S-волна, движущаяся вверх | 5 | 19.8 | 78.8 | 491.3 | – | 11 |
| Геологический массив, Р-волна под углом к поверхности Земли | 5 | 20.6 | 78.9 | 491.5 | – | 11 |
| Геологический массив, S-волна под углом к поверхности Земли | 5 | 19.8 | 79 | 492.1 | – | 11 |
| Заданная вертикальная скорость нижней границы здания | 0.18 | 0.61 | 1.7 | 9.4 | 35.9 | 11 |
| Заданная горизонтальная скорость нижней границы | 0.14 | 0.6 | 1.5 | 8.8 | 35 | 11 |
| Заданная вертикальная скорость нижней границы здания | 0.97 | 3.0 | 8.3 | 48.7 | 178.3 | 40 |
| Заданная горизонтальная скорость нижней границы | 0.77 | 2.6 | 9.9 | 48.5 | 176.5 | 40 |

6. Заключение

Анализ результатов использования различных моделей задания падающей на границу со зданием сейсмической волны, различной дискретизации расчетной сетки и различных типов волн позволил выявить имеющиеся различия в областях разрушения.

Были получена более значительная степень разрушения фундамента при учете вмещающего здание геологического массива по сравнению с заданием скорости движения нижней границы здания, особенно для случая

поперечных волн. Данный результат демонстрирует важность учета вмещающего геологического массива. Однако, использование заданной скорости движения границы здания позволяет существенно экономить вычислительные ресурсы: затраты оперативной памяти и времени вычисления.

Изменение локализации областей разрушения при измельчении шага расчетной сетки имеет незначительные отличия для различных моделей задания падающей волны, для различных типов волн, и для различного количества этажей в здании. Данное изменение локализации областей разрушения с уменьшением шага дискретизации обусловлено тем, что при моделировании распространения волн в многоэтажном здании с учетом затрат вычислительных ресурсов расчетных точек на толщину стены или перегородки здания приходится небольшое количество. А каждая вновь возникшая трещина к тому же делит стены и перегородки здания на отдельные подобласти интегрирования, число точек сетки в которых еще меньше. Также в перфорированной конструкции, которую представляет из себя здание, возникают резонирующие волны с малой длиной волны, которые переотражаются в стенах и перегородках и распространение которых существенно зависит от наличия повреждений. То есть возникновение повреждений с различной локализацией усиливается в ходе дальнейшего развития волновых явлений в здании.

Полученные результаты демонстрируют возможность решения задач сейсмостойкости зданий сеточно-характеристическим методом на достаточно подробных расчетных сетках, позволяющих адекватно описывать области разрушения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Moczo, J.O. Robertsson, L. Eisner.* The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation // *Advances in geophysics*, 2007, v.48, p.421-516.
2. *T. Wang, X. Tang.* Finite-difference modeling of elastic wave propagation: A nonsplitting perfectly matched layer approach // *Geophysics*, 2003, v.68, №5, p.1749-1755.
3. *R.W. Graves.* Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences // *Bull. of the Seismolog. Society of America*, 1996, v.86, №4, p.1091-1106.
4. *M. Dumbser, M. Käser.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes. I. The two-dimensional isotropic case with external source terms // *Geophysical Journal International*, 2006, v.166, №6, p.855-877.
5. *M. Dumbser, M. Käser.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes –II. The three-dimensional isotropic case // *Geophysical Journal International*, 2006, v.167, №6, p.319-336.
6. *E. Tessmer.* 3-D Seismic modeling of general material anisotropy in the presence of the free surface by Chebyshev spectral method // *Geophysical J. International*, 1995, v.59, p.464-473.
7. *H. Igel.* Wave propagation in three-dimensional spherical sections by Chebyshev spectral method // *Geophysical Journal International*, 1999, v.136, p.559-566.

8. *D. Komatitsch, J.P. Vilotte, R. Vai, J.M. Castillo-Covarrubias, F.J. Sanchez-Sesma.* The spectral element method for elastic wave equations-application to 2-D and 3-D seismic problems // International Journal for numerical methods in engineering, 1999, v.45, №9, p.1139-1164.
9. *G. Seriani.* 3-D large-scale wave propagation modeling by a spectral-element method on a Cray T3E multiprocessor // Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., 1998, v.164, p.235-247.
10. *A.V. Favorskaya, I.B. Petrov.* Grid-characteristic method // Innovations in Wave Processes Modelling and Decision Making, SIST Series, 2018, v.90, Springer Switzerland, Ch. 7, p.117-160.
11. *A.V. Favorskaya, M.S. Zhdanov, N.I. Khokhlov, I.B. Petrov.* Modeling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophysical Prospecting, 2018, v.66, №8, p.1485-1502.
12. *В.А. Бирюков, В.А. Миряха, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Моделирование распространения упругих волн в геологической среде: сравнение результатов трех численных методов // ЖВМ и МФ, 2016, т.56, №6, с.1104-1114;
англ. пер.: *V.A. Biryukov, V.A. Miryakha, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov.* Simulation of elastic wave propagation in geological media: Intercomparison of three numerical methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, v.56, №6, p.1086-1095.
13. *M.L. Yaghin, M.A. Hesari.* Dynamic analysis of the arch concrete dam under earthquake force with ABAQUS // Journal of Applied Sciences, 2008, v.8, №15, p.2648-2658.
14. *Y. Xunqiang, L. Jianbo, W. Chenglin, L. Gao.* ANSYS implementation of damping solvent stepwise extraction method for nonlinear seismic analysis of large 3-D structures // Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2013, v.44, p.139-152.
15. *Z. Nikolic, N. Zivaljic, H. Smoljanovic, I. Balic.* Numerical modelling of reinforced concrete structures under seismic loading based on the finite element method with discrete inter element cracks // Earthquake Eng.&Structural Dynamics. 2017, v. 46, № 1, p.159–178.
16. *A. Breus, A. Favorskaya, V. Golubev, A. Kozhemyachenko, I. Petrov.* Investigation of seismic stability of high-rising buildings using grid-characteristic method // Proc. Computer Science, 2019, v.154, p.305-310.
17. *A. Favorskaya, V. Golubev, D. Grigorievyyh.* Explanation the difference in destructed areas simulated using various failure criteria by the wave dynamics analysis // Procedia Computer Science, 2018, v.126, p.1091-1099.
18. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров.* Изучение сейсмической изоляции путём полноволнового численного моделирования // ДАН, 2018, т.481, №5, с.557-559;
англ. пер.: *A.V. Favorskaya, I.B. Petrov.* Study of seismic isolation by full-wave numerical modeling // Doklady Earth Sciences, 2018, v.481, №5, p.1070-1072.
19. *A.V. Favorskaya, A.V. Breus, B.V. Galitskii.* Application of the grid-characteristic method to the seismic isolation model // Smart Innovation, Syst.&Tech., 2019, v.133, p.167-181.
20. *А.С. Холодов, Я.А. Холодов.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // ЖВМ и МФ, 2006, т.46, №9, p.1638-1667;
англ. пер.: *К.М. Magomedov, A.S. Kholodov.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969, v.9, №2, p.158-176.

Поступила в редакцию 24.09.2019

После доработки 24.09.2019

Принята к публикации 25.11.2019