А. В. Мегрецкий, Квазинильпотентная оператор Ганкеля, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 4, 201–212

А.В.Мегрецкий

КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНЫЙ ОПЕРАТОР ГАНКЕЛЯ

Для операторов Ганкеля с лакунарным символом получены эффективные алгоритмы вычисления спектра и нормы. В частности, построен ненулевой квазинильпотентный оператор Ганкеля.

§ 1. Введение

Линейный ограниченный оператор Γ, действующий в пространстве Харди $H^2 = H^2(\mathbb{T})$, называется оператором Ганкеля, если его матрица в стандартном базисе $\{z^s\}_0^\infty$ имеет вид $\{h_{p+q}\}_0^\infty$, т.е. скалярное произведение $(z^p, \Gamma z^q) = h_{p+q}$ зависит только от суммы $p+q$. Пространство Харди H^2 состоит из функций $f(\xi)$, определенных в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{\xi \in \mathbb{C}^1 : |\xi| < 1\}$ сходящимися степенными рядами

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\xi^n : \ |f|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Хорошо известно, что такие функции имеют граничные значения

$$f(z) = \lim_{r \to 1-0} f(rz)$$

почти всюду относительно меры Лебега $dm(z)$ на единичной окружности $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. В этом смысле пространство H^2 может быть отождествлено с подпространством в $L^2 = L^2(\mathbb{T}, dm)$, состоящим из тех $f \in L^2(\mathbb{T})$, для которых

$$\hat{f}(k) \overset{\mathrm{def}}{=} (z^k, f) = \int f(z) z^{-k} dm(z) = 0, \quad \forall k < 0.$$

Операторы Ганкеля часто являются инструментом или объектом исследования во многих вопросах анализа и приложений, как то: спектральная теория, степенная проблема моментов, рациональная аппроксимация, интерполяционные задачи, теория стационарных случайных процессов, теория управления. Сведения об операторах Ганкеля и их приложениях можно найти, например, в [1-3].

Далека от своего решения задача Халмоша: описать все операторы, унитарно эквивалентные операторам Ганкеля. Легко проверяемые необходимые условия: $0 \in \sigma(\Gamma)$ и $\dim \operatorname{Ker} \Gamma \in \{0, \infty\}$. Дальнейшее продвижение возможно, в частности, на пути изучения спектральных свойств операторов Ганкеля. Известно (С.Р.Трейль, устное сообщение), что спектр оператора Ганкеля может быть любым компактным множеством, содержащим 0. Интересно выяснить более тонкие свойства операторов Ганкеля. Один из первых

Ключевые слова: оператор Ганкеля, лакунарный степенной ряд, квазинильпотентный оператор.

естественно возникающих при этом вопросов: существует ли ненулевой оператор Ганкеля с нулевым спектром? Именно в этом состоит задача Пауэра [4]. В [4] показано, что любой нильпотентный оператор Ганкеля равен нулю, и выдвинута гипотеза, что нетривиальных квазинильпотентных операторов Ганкеля не бывает.

Интересен также вопрос о вычислении спектра конкретных операторов Ганкеля [1-3]. Случаев, когда спектр удается вычислить эффективно (исключая операторы конечного ранга), не так уж много, и почти все они группируются вокруг так называемой матрицы Гильберта $\{h_{m+n}\}_0^\infty$, $h_s = (s+1)^{-1}$. Поэтому представляет интерес нахождение процедур эффективного вычисления спектра для новых классов операторов Ганкеля.

В настоящей работе рассмотрены операторы Ганкеля с лакунарными символами. Показано, что для них вычисление спектра сводится к нахождению предельных точек некоторой нестационарной динамической системы. Легко определяется также норма таких операторов. Эффективность предложенной процедуры вычисления спектра позволила привести ряд примеров ненулевых квазинильпотентных операторов Ганкеля.

Автор благодарен Н.К.Никольскому и С.Р.Трейлю за стимулирующие собеседования, большое внимание к полученным результатам и помощь при подготовке статьи.

§ 2. Основные результаты

Ниже непрерывный линейный оператор A, действующий в H^2 или в конечномерном подпространстве $H(k)\subset H^2$ (состоящем из многочленов p с $\deg p<k$), отождествляется со своей матрицей $A = \{z^p,\ A(z)^q)\}_0^\infty$ в стандартном базисе $\{1, z, z^2, \dots\}$; $\sigma(A)$ и $\|A\|$ – соответственно спектр и норма оператора A; E – единичный оператор в любом из подпространств H^2, $H(k)$; $P(k): H^2 \longrightarrow H(k)$ – ортогональный проектор на подпространство $H(k)$; (f,g) – скалярное произведение элементов $f,g\in L^2$; $|f| = (f,f)^{1/2}$ – норма в L^2.

Начнем с примера. Рассмотрим ганкелеву матрицу $\Gamma_* = \{\gamma^*_{p+q}\}_0^\infty$, где

$$\gamma^*_{s-1} = \begin{cases} i=\sqrt{-1} & \text{при} \quad s=1, \\ 0 & \text{при} \quad s\neq 2^k (k=0,1,2,\dots), \\ 1/s & \text{при} \quad s=2^k (k=1,2,3,\dots), \end{cases}$$

т.е.

$$\Gamma_* = \left|\begin{matrix} i & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ & & \dots & & \end{matrix}\right. \quad \vdots \tag{2.1}$$

Т е о р е м а 1. *Матрица Γ_* определяет компактный квазинильпотентный оператор Ганкеля.*

Таким образом, ненулевой квазинильпотентный оператор Ганкеля существует.

Используемый при доказательстве теоремы 1 способ вычисления спектра применим и в более общем случае. Рассмотрим класс $\mathcal{L}$ ганкелевых матриц вида $\Gamma_* = \{\gamma^*_{p+q}\}_0^\infty$, где

$$\gamma^*_{s-1} = \begin{cases} \varphi_k & \text{при} \quad s=2^k, \ k=0,1,2,\dots, \\ 0 & \text{при} \quad s\neq 2^k, \ k=0,1,2,\dots, \end{cases}$$

$\{\varphi_k\}_0^\infty$ - произвольная суммируемая с квадратом последовательность комплексных чисел, т.е.

$$\Gamma = \left|\begin{array}{ccccc} \varphi_0 & 1/ & 0 & \varphi_2 & 0 \\ \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ & & \cdots & & \end{array}\right. \vdots$$

Т е о р е м а 2.

(A) Γ - *компактный оператор, причем*

$$\|\Gamma\|^2 = \lim_{s\to\infty} \mu_s, \tag{2.2}$$

где $\{\mu_s\}_0^\infty$ – *последовательность, определяемая рекуррентными соотношениями*

$$\mu_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\mu_k + 2|\varphi_{k+1}|^2 + \sqrt{\mu_k^2 + 4\mu_k|\varphi_{k+1}|^2}\right), \quad k\geq 0, \tag{2.3}$$

$$\mu_0 = |\varphi_0|^2 \tag{2.4}$$

(B) *Любая последовательность* $\{\Lambda_j\}_0^\infty$ *комплексных чисел, удовлетворяющая соотношениям*

$$(\lambda_j - \lambda_{j-1})\lambda_j = \varphi_j^2, \quad j = 1,2,\dots, \quad \lambda_0 = \varphi_0, \tag{2.5}$$

сходится, и спектр $\sigma(\Gamma)$ *есть множество пределов таких последовательностей.*

З а м е ч а н и е 1. Компактность Γ следует также из теоремы Р. Пэли (см., например, [5], гл. 8, п. 6, с. 213). Подробно этот вопрос обсуждается ниже в § 4.

З а м е ч а н и е 2. При $\varphi_0 = i$, $\varphi_s = 2$ $(s=1,2,\dots)$ имеем $\Gamma=\Gamma_*$, а (2.5) переписывается в виде $(\lambda_j - \lambda_{j-1})\lambda_j = 4^{-j}$, $j = 1,2,\dots$, $\lambda_0 = i$. Отсюда $\lambda_j = i2^{-j}$, и поэтому $\sigma(\Gamma_*) = \{0\}$, т.е. теорема 1 есть частный случай теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Основная идея доказательства - матрица Γ аппроксимируется (в некотором смысле) конечномерными матрицами T_k, стоящими в ее левом верхнем углу. В свою очередь характеристический многочлен матрицы T_{k+1} может быть рекуррентно выражен через характеристический многочлен T_k. Таким образом, спектр $\sigma(T_k)$ легко вычисляется, а спектр $\sigma(\Gamma)$ определяется как предел спектров $\sigma(T_k)$.

Определим матрицы T_k размера $2^k\times 2^k$ $(k=0,1,\dots)$ равенством

$$T_k = P(2^k)\Gamma P(2^k)^*,$$

т.е. T_k есть „верхний левый угол" Г. Положим также

$$\Gamma_k = P(2^k)^* T_k P(2^k),$$

т.е.

$$\Gamma_k = \left|\begin{array}{ccc} T_k & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array}\right.$$

Очевидно, $\|T_k\| = \|\Gamma_k\|$ и $\sigma(T_k) \cup \{0\} = \sigma(\Gamma_k)$. Матрицы T_k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T_{k+1} = \begin{bmatrix} T_k & \varphi_{k+1}J \\ \varphi_{k+1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

где J - антидиагональная матрица размера $2^k \times 2^k$, т.е.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Соотношение (2.6) позволяет эффективно вычислять норму и спектр операторов T_k. Воспользуемся для этого следующей элементарной леммой.

Лемма 1 (см. [6], гл.2, § 5, п.3, с.58-59). *Если A, B, C, D - матрицы размера $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$, $m\times m$ соответственно и* $\det(D) \neq 0$, *то*

$$\det(N) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C), \tag{2.7}$$

где

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Применяя лемму 1 для случая, когда $n = m = 2^k$, $N = T_{k+1} - \lambda E$, из (2.6), (2.7) получим (учитывая, что $J^2=E$)

$$\det(T_{k+1} - \lambda E) = (-\lambda)^n \det(T_k - (\lambda - \varphi_{k+1}^2/\lambda)E). \tag{2.8}$$

Аналогично при $N = T_{k+1}^* T_{k+1} - \mu E$, $\mu \neq |\varphi_{k+1}|^2$, учитывая, что $J^* = J$ и

$$T_{k+1}^* T_{k+1} = \begin{bmatrix} T_k^* T_k + |\varphi_{k+1}|^2 & \varphi_{k+1} T_k^* J \\ \bar{\varphi}_{k+1} J T_k & |\varphi_{k+1}|^2 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

из (2.7) получим

$$\det(T_{k+1}^* T_{k+1} - \mu E) = \Phi^n \det((-\mu/\Phi) T_k^* T_k - \Phi E), \quad \Phi = |\varphi_{k+1}|^2 - \mu. \tag{2.10}$$

Пользуясь тем, что μ_k есть наибольшее собственное число матрицы $T_k^* T_k$ и для μ_{k+1}, как видно из (2.9), справедливо неравенство $\mu_{k+1} \geq |\varphi_{k+1}|^2 + \|T_k\|^2$, из (2.10) имеем $\mu_{k+1} - |\varphi_{k+1}|^2)^2 = \mu_k \mu_{k+1}$. Последнее соотношение эквивалентно равенству (2.3).

Поскольку $\mu_k^2 + 4\mu_k|\varphi_{k+1}|^2 \le (\mu_k + 2|\varphi_{k+1}|^2)^2$, из (2.3) следует, что $\mu_{k+1} \le \mu_k + 2|\varphi_{k+1}|^2$. Учитывая очевидное равенство $\mu_0 = |\varphi_0|^2$, отсюда получаем

$$\|\Gamma_k\|^2 = \|T_k\|^2 \le 2\sum_{s=0}^{k} |\varphi_s|^2. \qquad (2.11)$$

Применяя оценку (2.11) для случая, когда $\varphi_s=0$ при $0\le s\le p$, получим

$$\|\Gamma_k - \Gamma_p\|^2 \le 2\sum_{s=p+1}^{k} |\varphi_s|^2, \quad k\ge p. \qquad (2.12)$$

Поскольку последовательность $\{\varphi_s\}$ суммируема с квадратом, из (2.12) следует, что последовательность операторов $\{\Gamma_k\}$ - фундаментальная. Благодаря тому что

$$\lim_{k\to\infty} (z^p, \Gamma_k z^q) = (z^p, \Gamma z^q), \forall p, q,$$

последовательность $\{\Gamma_k\}$ сходится к Γ, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Gamma_k - \Gamma\| = 0$. Следовательно, Γ - компактный оператор, и выполнено условие (2.2). Утверждение (A) доказано.

(B) Сформулируем сначала две леммы:

Л е м м а 2. *Пусть* Σ *- множество последовательностей* $\{\lambda_s\}_0^\infty$, *удовлетворяющих уравнениям* (2.5); σ_k *- множество* k*-х членов последовательностей из* Σ, *т.е.*

$$\sigma_k = \{\lambda_k : \{\lambda_s\}_0^\infty \in \Sigma\}.$$

Последовательность $\{\nu_s\}_0^\infty$ *такая, что* $\nu_s \in \sigma_s$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\nu_s \longrightarrow 0$ *при* $s \longrightarrow \infty$ *или когда для некоторой последовательности* $\{\lambda_s\}_0^\infty \in \Sigma$ *для всех достаточно больших* s *имеет место равенство* $\nu_s = \lambda_s$.

Л е м м а 3. *Если* A *- вполне непрерывный оператор и* $\{A_s\}$ *- последовательность линейных непрерывных операторов в* H^2 *и* $\|A_s - A\| \longrightarrow 0$ *при* $s \longrightarrow \infty$, *то* $\sigma(A) = \lim \sigma(A_s)$ *в том смысле, что* $\sigma(A)$ *есть множество пределов* $\lambda = \lim \lambda_s$ *всевозможных сходящихся последовательностей* $\{\lambda_s\}_0^\infty$ *таких, что* $\lambda_s \in \sigma(A_s)$, $\forall s$.

З а м е ч а н и е. Доказательство лемм 2,3 будет дано в приложении. Отметим, что лемма 3 есть следствие более общего утверждения ([7], теорема 3). Для случая, когда операторы A_s вполне непрерывны (для доказательства теоремы 2 этого случая вполне достаточно), лемма 3 доказана в [8], теорема 4.2.

Возвращаясь к доказательству теоремы 2, отметим, что

$$0 \in \sigma(T_k) \Leftrightarrow \varphi_k = 0. \qquad (2.13)$$

Из (2.8) и (2.13) следует, что при $k=1,2,\ldots$

$$\lambda \in \sigma(T_k) \Leftrightarrow \exists \lambda' \in \sigma(T_{k-1}) : (\lambda - \lambda')\lambda = \varphi_k^2.$$

Поэтому $\sigma(T_k) = \sigma_k$ (определение σ_k дано в формулировке леммы 2) и, следовательно,

$$\sigma(\Gamma_k) = \sigma_k \cup \{0\}. \qquad (2.14)$$

Из (2.14) и из лемм 2,3 следует (B). •

§ 3. Собственные векторы операторов класса $\mathcal{L}$

По-видимому, операторы Ганкеля из класса $\mathcal{L}$ - удобный объект для изучения. Следующее утверждение дает простое описание всех собственных векторов оператора Г, определенного в § 2. Аналогично (несколько более громоздко) можно было бы описать присоединенные векторы Г.

Пусть, как и раньше, $T_k = P(2^k)\Gamma P(2^k)^*$ есть верхний левый угол оператора Г. Отметим, что собственные векторы T_k легко вычисляются с помощью следующего утверждения, непосредственно вытекающего из представления (2.6). Пусть $n=2^k$, $p,q \in H(n)$, $r=p+z^n q$. Тогда если $\nu\neq 0$, то

$$T_{k+1}r = \nu r \Leftrightarrow T_k p = (\nu-\varphi_{k+1}^2/\nu)p, q = (\varphi_{k+1}/\nu)J_p;$$

если $\varphi_{k+1}=0$, то

$$r\in \operatorname{Ker} T_{k+1} \Leftrightarrow p\in \operatorname{Ker} T_k.$$

Теорема 3.

(A) *Для того, чтобы* $\operatorname{Ker}\Gamma=\{0\}$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{\varphi_s\}$ *имела бесконечное число ненулевых членов.*

(B) *Если* $\lambda\in\sigma(\Gamma)\setminus\{0\}$ *и* λ *есть предел последовательности* $\{\lambda_s\}_0^\infty$ *с указанными в части* (B) *теоремы* 2 *свойствами, то*

$$\Gamma f = \lambda f \Leftrightarrow P(2^k)f \in \operatorname{Ker}(T_k - \lambda_k F),\ \forall k.$$

Замечание 1. Утверждение (A) следует также из более общего результата ([9], лекция 2, п. 1, с. 51).

Доказательство теоремы 3.

(A) Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $f\in \operatorname{Ker}\Gamma$, $f\neq 0$. Положим $p_k = P(n)f$, $q_k = z^{-n}(p_{k+1}-p_k)$, где $n = 2^{k-1}$. Очевидно,

$$T_s p_{s+1} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad s\longrightarrow\infty. \tag{3.1}$$

Имеем при $p_k\neq 0$

$$|T_k p_{k+1}|^2 = |T_{k-1}p_k + \varphi_k J q_k|^2 + |\varphi_k J p_k|^2 \geq$$

$$\geq |T_{k-1}p_k|^2 - 2|\varphi_k|\varepsilon_k|T_{k-1}p_k|\cdot|p_k| + |\varphi_k|^2(1+\varepsilon_k^2)\ |p_k|^2 \geq$$

$$\geq |T_{k-1}p_k|^2 / (1+\varepsilon_k^2),$$

где $\varepsilon_k = |q_k| / |p_k|$. Отметим также, что при $p_s\neq 0$

$$\prod_{j=s}^{\infty}(1+\varepsilon_j^2) = \prod_{j=s}^{\infty}|p_{j+1}|^2 / |p_j|^2 < \infty.$$

Следовательно, $T_k p_{k+1} = 0$ для достаточно больших k, и поэтому (так как $p_k\neq 0$ для достаточно больших k) $\varphi_k = 0$ при $k\geq k_0$. Утверждение (A) доказано.

(B) Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем $\Rightarrow$. Следующее утверждение дополняет лемму 2.

Л е м м а 4. *Пусть* $\{\lambda_j\}$ *– последовательность, определенная в теореме* 2, *и* $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = \lambda \ne 0$. *Тогда существует* $M\in\mathbb{N}$ *такое, что при достаточно больших* k *условия*

$$\lambda_{k,k} = \lambda,\ \lambda_{j-1} = \lambda_{j,k} - \varphi_j^2 / \lambda_{j,k},\quad M < j \le k \tag{3.2}$$

корректно определяют последовательность $\{\lambda_{j,k}\}_{j=M}^{k}$. При этом

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup_{M\le j\le k} |\lambda_{j,k} - \lambda_j| = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство леммы 4 дано в приложении.

Возвращаясь к доказательству теоремы 3, рассмотрим собственный вектор $f\in \operatorname{Ker}(\Gamma-\lambda E)$, $f\ne 0$, $\lambda\ne 0$. Пусть p_k и q_k определены по f, как в доказательстве утверждения (A). Очевидно,

$$T_j p_{j+1} - \lambda p_{j+1} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.4}$$

Пусть M - число из леммы 4. Для достаточно больших k при $M < j \le k$, $r_j = \varphi_j J p_j - \lambda_{j,k}$ имеем

$$|T_j p_{j+1} - \lambda_{j,k} p_{j+1}|^2 = T_{j-1} p_j - \lambda_{j-1,k} p_j - J r_j(\varphi_j/\lambda_j)\ ^2 + |r_j|^2 \ge$$

$$\ge (1 - |\varphi_j/\lambda_{j,k}|^2)\ |(T_{j-1} - \lambda_{j-1,k}E)p_j|^2.$$

Из (3.3) следует, что для достаточно больших k

$$|\lambda_{j,k}| \ge c > 0, \quad \forall j > M,$$

поэтому из (3.4) имеем

$$T_j p_{j+1} = \lambda_j p_{j+1}, \quad \forall j \ge M.$$

Если $M = 0$, то все доказано. В противном случае положим $s = \min\{j: p_j \ne 0\}$. Тогда $\lambda_j = 0$ при $M \ge j \ge s-1$ и $p_{j+1}\in \operatorname{Ker} T_j$, $\forall j$. ●

§ 4. Дополнительные замечания

Повторяя почти дословно доказательства теорем 2 и 3, можно усилить эти утверждения, отказавшись от требования, чтобы ненулевые члены в последовательности $\{\gamma_p\}$ имели фиксированные номера.

Пусть $\{h_k\}_0^\infty$ - последовательность комплексных чисел, φ_{k-1} - k-е по счету ненулевое число в этой последовательности, n_{k-1} - его номер (если $h_k \equiv 0$, то положим $n_k = 2^k$, $\varphi_k \equiv 0$; если в последовательности $\{h_k\}_0^\infty$ только $k_0, k_0 > 0$, ненулевых членов, положим $f_k = 0$, $n_k = 2n_{k-1}$ при $k \ge k_0$). При $K\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ рассмотрим класс $\mathcal{L}(K)$ ганкелевых матриц вида $H = \{h_{p+q}\}_0^\infty$, где

$$n_{k+1} \ge 2n_k, \quad \forall k \ge K; \quad \sum_{s=0}^{k} |\varphi_s|^2 < \infty.$$

Положим $H_s = P(n_s) H P(n_s)^*$.

Т е о р е м а 4.

(A) H - *компактный оператор, причем*

$$\|H\| = \lim_{s\to\infty} \mu_s, \tag{4.1}$$

где $\{\mu_s\}_K^\infty$ - *последовательность, определенная соотношением*

$$\mu_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\mu_k + 2|\varphi_{k+1}|^2 + \sqrt{\mu_k^2 + 4\mu_k|\varphi_{k+1}|^2}\right), \qquad k\ge K, \tag{4.2}$$

с начальным значением $\mu_k = \|H_K\|^2$.

(B) *Любая последовательность* $\{\lambda_j\}_s^\infty$ *комплексных чисел, удовлетворяющих соотношению*

$$(\lambda_j - \lambda_{j-1})\lambda_j = \varphi_j^2, \quad j>s,$$

сходится, и $\sigma(H)$ *есть множество пределов таких последовательностей, удовлетворяющих дополнительному требованию - начальный момент* s *и начальные данные* λ_s *таковы, что выполнено одно из трех условий*

$$s = K, \quad \lambda_s\in\sigma(H_k);$$

$$s = K, \quad n_{s+1} > 2n_s + 1, \quad \lambda_s = 0;$$

$$s > K, \quad n_s = 2n_{s-1} + 1, \quad \lambda_s = \varphi_s.$$

(C) $\mathrm{Ker}\, H = \{0\} \Leftrightarrow \forall i \exists j > i : \varphi_j \ne 0$.

(D) *Если* $\lambda \ne 0$ *и* $\Lambda\in\sigma(H)$ *есть предел последовательности* $\{\lambda_j\}_s^\infty$, *определенной в* (B), *то*

$$f\in \mathrm{Ker}\,(\Gamma-\lambda E) \Leftrightarrow P(n_k)f\in \mathrm{Ker}\,(H_k-\lambda_k E), \quad \forall k \ge s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Отметим изменения, которые необходимо внести в доказательства теорем 2 и 3, чтобы получить доказательство теоремы 4.

Следует положить

$$T_s = H_{K+s} = P(n_{K+s})HP(n_{K+s})^*.$$

Тогда при $n_{k+1} = 2n_k$ выполнено соотношение (2.6), а при $n_{k+1} > 2n_k$ вместо (2.6) будем иметь

$$T_{k+1} = \begin{bmatrix} T_k & 0 & \varphi_{k+1}J_1 \\ 0 & \varphi_{k+1}J_2 & 0 \\ \varphi_{k+1}J_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где J_1 и J_2 - антидиагональные единичные матрицы подходящих размеров. Соотношение (2.8) превратится в

$$\det\,(T_{k+1}-\lambda E) = (-\lambda)^n \det\,(T_k-(\lambda-\varphi_{k+1}^2/\lambda)E)(\varphi_{k+1}-\lambda)^{m_1}(\varphi_{k+1}+\lambda)^{m_2},$$

где $m_1 = [n_{k+1}/2-n_k+ 1/2]$, $m_2 = [n_{k+1}/2 - n_k]$ (здесь $[\alpha]$ - целая часть α).

(A) Достаточно отметить, что

$$\|T_{k+1}\| = \max \left\{ \left\| \begin{bmatrix} T_k & \varphi_{k+1}J_1 \\ \varphi_{k+1}J_1 & 0 \end{bmatrix} \right\|, \ |\varphi_{k+1}| \right\} = \left\| \begin{bmatrix} T_k & \varphi_{k+1}J_1 \\ \varphi_{k+1}J_1 & 0 \end{bmatrix} \right\|.$$

(B) Достаточно показать, что утверждение леммы 2 справедливо для множества Σ_1 последовательностей $\{\lambda_j\}_s^\infty$, определенных в формулировке теоремы 4. Но действительно, $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, где Σ_2 построено, как в лемме 2, по последовательности $\{\varphi'_k\}_0^\infty$, а последовательность $\varphi'_k(\varphi'_0=0)$ получена из $\{\varphi_k\}$ следующим образом: для всех k, для которых $n_{k+1}> 2n_k$, между φ_k и φ_{k+1} вставляется ноль, а $\varphi'_0=0$.

Доказательство утверждений (C) и (D) после внесения очевидных изменений полностью повторяет доказательство теоремы 3. •

Ниже будет сформулировано важное следствие теоремы 4. Введем сначала некоторые определения.

Пусть P_+: $L^2 \longrightarrow H^2$ - ортогональная проекция на подпространство $H^2 \subset L^2$,

$$f^\nabla(z) \overset{\text{def}}{=} f(1/z) \text{ для } f \in L^2,$$

$$H^\infty = H^2 \cap L^\infty.$$

Для $\theta \in L^2$, $f \in H^\infty$ положим

$$\Gamma_\theta f = P_+(f^\nabla \cdot \theta).$$

Поскольку H^∞ плотно в H^2, продолжение Γ_θ до непрерывного оператора, действующего в H^2, существует (и единственно) тогда и только тогда, когда

$$\|\Gamma_\theta\| = \sup \{ |\Gamma_\theta f| \ : \ |f| \le 1, \quad f \in H^\infty \}.$$

Как легко убедиться, это продолжение (обозначаемое также через Γ_θ) - оператор Ганкеля. Функция θ называется *символом* оператора Γ_θ (разные символы $\theta \in L^2$ могут определять один и тот же оператор Ганкеля). Если Γ - оператор Ганкеля с матрицей $\Gamma = \{\gamma_{p+q}\}_0^\infty$, то $\Gamma = \Gamma_\theta$, где

$$\theta \overset{\text{def}}{=} \pi(\Gamma) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p z^p.$$

Будем называть Γ *оператором Ганкеля с лакунарным символом* (с показателем $s \in \mathbb{N}$), если в последовательности $\{\gamma_p\}_0^\infty$ „много нулей" - именно когда

$$n_{k+s} \ge 2n_k, \quad \forall k, \tag{4.3}$$

где n_k - номер k-го ненулевого члена в последовательности $\{\gamma_p\}_0^\infty$. Множество операторов Ганкеля с лакунарным символом с показателем s будем обозначать через $\mathcal{L}^s$. Таким образом, $\mathcal{L}^s$ есть множество операторов Ганкеля Γ, для которых $\pi(\Gamma)$ - лакунарный степенной ряд.

Следствие 4.1. *Оператор Ганкеля с лакунарным символом компактен, и при* $\Gamma_\theta \in \mathcal{L}^s$ *имеет место неравенство*

$$\|\Gamma_\theta\| \le C_s |\theta|, \tag{4.4}$$

где C_s *- константа, зависящая только от* s.

Замечание. Неравенство (4.4) (из которого сразу следует компактность оператора Ганкеля с лакунарным символом, см. доказательство теоремы 2) эквивалентно теореме Р. Пэли (см., например, [5], гл. 8, п. 6, с. 213), которая утверждает, что если последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (4.3), то формула

$$Pf = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(n_k) z^{n_k}$$

определяет непрерывное отображение P пространства Харди H^1 в H^2. Действительно, пусть E^1 и E^2 - единичные шары в H^1 и H^2 соответственно $E_1 = E^1 \cap H^\infty$, $E_2 = E^2 \cap H^\infty$. Поскольку $E^1 = \{gh : g, h \in E^2\}$ (см., например, [10], с. 107) и E_j плотно в E^j в соответствующих топологиях ($j=1,2$), имеем

$$\|\Gamma_\theta\| = \sup_{h,g \in E_2} (g, \Gamma_\theta h) = \sup_{h,g \in E_2} (g\overline{h^\nabla}, \theta) =$$

$$= \sup_{h,g \in E_2} (gh, \theta) = \sup_{h,g \in E_1} (f, \theta) = \sup_{h,g \in E_1} |Pf| \cdot |\theta|.$$

Доказательство следствия 4.1. Пусть $\mathcal{L}_1$ есть $\mathcal{L}(K)$ при $K=0$,

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1 + \ldots + \mathcal{L}_1.$$

Легко проверяется, что $\mathcal{L}^s \subset \mathcal{L}_{2s}$, $\forall s \in \mathbb{N}$. Так как операторы из $\mathcal{L}_1$ компактны, $\mathcal{L}_s$ также состоит из компактных операторов. Из теоремы 4 (формулы (4.1), (4.2)) следует, что $\|\Gamma_\theta\| \le \sqrt{2}\,|\theta|$, $\forall \Gamma_\theta \in \mathcal{L}_1$. Поэтому $\|\Gamma_\theta\| \le \sqrt{2s}\,|\theta|$, $\forall \Gamma_\theta \in \mathcal{L}_s$, и, следовательно, $\|\Gamma_\theta\| \le \sqrt{s}$, $\forall \Gamma_\theta \in \mathcal{L}^s$. ●

§ 5. Заключение

В классе $\mathcal{L}$ можно построить много (континуум) квазинильпотентных операторов Ганкеля. Например, как следует из теоремы 2, если в определении оператора Γ_* в (2.1) поменять произвольным образом знак у элементов на антидиагоналях, снова получится квазинильпотентный оператор. Легко показать, однако, что этот новый оператор будет унитарно эквивалентен исходному. Другой пример квазинильпотентного оператора Ганкеля задается матрицей

$$\Gamma_{**} = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & i & 0 & 1/2 & 0 \\ i & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ & & \cdots & & \end{array} \right. \vdots$$

Как следует из теоремы 4, все построенные в статье операторы Ганкеля компактны. Вопрос о том, может ли некомпактный оператор Ганкеля иметь нулевой спектр, остается, по-видимому, открытым. В связи с этим уместно будет сформулировать несколько вопросов, ответы на которые автору неизвестны.

Пусть Γ - оператор Ганкеля, γ_∞ - множество компактных операторов в H^2, $\sigma_{ess}(A)$ - существенный спектр оператора A. Верно ли, что

(A) $\sigma(\Gamma) = \{0\} \Longrightarrow \Gamma\in\gamma_\infty$?

(B) $\sigma_{ess}(\Gamma) = \{0\} \Longrightarrow \Gamma\in\gamma_\infty$?

(C) $\Gamma^n\in\gamma_\infty \Longrightarrow \Gamma\in\gamma_\infty$?

Замечание. Очевидно, $0\in\sigma_{ess}(\Gamma)$, (B) $\Longrightarrow$ (A) и (B) $\Longrightarrow$ (C).

§ 6. Приложение

Доказательство леммы 2. Пусть $\{\lambda_j\}\in\Sigma$. Тогда $|\lambda_j| \le \max\{\varepsilon, |\lambda_{j-1}| + |\varphi_j|^2/\varepsilon\}$ при $\varepsilon>0$. Поэтому либо $\lambda_j \longrightarrow 0$, либо $|\lambda_j| \ge \rho > 0$ для достаточно больших j. В последнем случае

$$|\lambda_j - \lambda_{j-1}| \le |\varphi_j|^2/\rho,$$

так что последовательность $\{\lambda_j\}$ сходится.

Пусть $\{\hat{\nu}_j\}\in\Sigma$ и $\{\lambda_j\}\in\Sigma$, причем $\lim\hat{\nu}_j\ne 0$ и $\lim\lambda_j\ne 0$. Тогда для достаточно больших j и для некоторого $c>0$

$$|\lambda_{j-1}- \hat{\nu}_{j-1}| = |(\lambda_j-\hat{\nu}_j)(1+\varphi_j^2/(\lambda_j\hat{\nu}_j))| \le |\lambda_j-\hat{\nu}_j|(1+c|\varphi_j|^2).$$

Поэтому $\lim\lambda_j \ne \lim\hat{\nu}_j$ при $\{\lambda_j\} \ne \{\hat{\nu}_j\}$.

Остается отметить, что $\lim\limits_{k\to\infty} N(k,\varepsilon) < \infty$ при любом $\varepsilon>0$, где $N(k,\varepsilon)$ есть количество последовательностей $\{\lambda_j\}\in\Sigma$ таких, что $\sup\{|\lambda_j|: j\ge k\}\ge\varepsilon$. Действительно, для любой такой последовательности $|\lambda_j| \ge \delta$ при $j \ge j_0$, где $j_0\in\mathbb{N}$, $\delta>0$ - некоторые числа. При достаточно больших j выполнено неравенство $|\varphi_j|<\delta$, и поэтому λ_j однозначно определяется по λ_{j-1} условиями

$$(\lambda_j- \lambda_{j-1})\lambda_j = \varphi_j^2, \quad |\lambda_j| \ge \delta.$$

Таким образом, для достаточно больших j имеем $\nu_j\in\{\lambda_{j1},\lambda_{j2},\dots,\lambda_{jk}\}$, где последовательность $\{\lambda_{js}\}_{j=0}^\infty$ принадлежит классу Σ при всех $s=1,2,\dots,k$. При этом

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_{j\alpha} \ne \lim_{j\to\infty}\lambda_{j\beta}$$

для $\alpha \ne \beta$. Поэтому существует такое s, что $\nu_j= \lambda_{js}$, начиная с некоторого j. •

Доказательство леммы 3. Поскольку множество обратимых операторов открыто в равномерной топологии, включение $\sigma(A) \subset \lim\sigma(A_s)$ справедливо для произвольного (не обязательно компактного) оператора A. Докажем обратное включение. Пусть $\lambda_0\in\sigma(A)$. Если $\lambda_0\notin\lim\sigma(A_s)$, то найдется последовательность операторов $\{B_s\}$ (подпоследовательность в $\{A_s\}$), такая, что $\|B_s-A\| \longrightarrow 0$ и $\operatorname{dist}(\lambda_0,\sigma(B_s)) \ge \delta_0> 0$. В силу компактности оператора A найдется $\delta\in]0,\delta_0[$ такое, что окружность радиуса δ с центром в точке λ_0 не пересекается с $\delta(A)$. Для произвольных $f,g\in H^2$ положим

$$\psi_{f,g}(z) = (f,(A-\lambda E)^{-1}g), \qquad \psi_{f,g,s}(z) = (f,(B_s-\lambda E)^{-1}g),$$

где $\lambda = \lambda_0+ \delta z$, $z\in\bar{\mathbb{D}}$. Очевидно, функции $\psi_{f,g,s}$ аналогичны в окрестности $\bar{\mathbb{D}}$ и

$\psi_{f,g,s}(z) \longrightarrow \psi_{f,g,s}(z)$ равномерно на границе $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ круга $\mathbb{D}$. Поэтому функция $\psi_{f,g}$ аналитична в $\mathbb{D}$ и непрерывна в $\bar{\mathbb{D}}$. Очевидно,

$$\sup \{|\psi_{f,g}(z)| : |z| = 1 \} \le C|f|\cdot|g|,$$

откуда следует, что

$$\sup \{|\psi_{f,g}(z)| : |z| \le 1 \} \le C|f|\cdot|g|.$$

Таким образом, $\|(A)-\lambda E)^{-1}\|$ - ограниченная функция в окрестности точки λ_o, и потому $\lambda_0 \notin \sigma(A)$. ●

Доказательство леммы 4. Из (3.2) имеем

$$|\lambda_{j-1,k}| = |\lambda_{j,k} - \varphi_j^2/\lambda_{j,k}| \ge |\lambda_{j,k}| - |\varphi_j^2|/|\lambda_{j,k}|. \tag{6.1}$$

Возьмем M (достаточно большое) и ε (достаточно малое) такими, что

$$2\varepsilon < |\lambda|;\ \varepsilon + \varepsilon^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} |\varphi_j|^2 < |\lambda|,\ |\lambda_j| \ge \varepsilon,\ \forall j > M.$$

Тогда из (6.1) имеем $|\lambda_{j,k}| \ge \varepsilon$, $\forall\ k \ge j \ge M$. Кроме того,

$$|\lambda_{j-1} - \lambda_{j-1,k}| \le (1 + |\varphi_j|^2/\varepsilon^2)|\lambda_j - \lambda_{j,k}|.$$

Поскольку $|\lambda_k - \lambda_{k,k}| \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, отсюда следует (3.3). ●

Список литературы

[1] Никольский Н.К. Операторы Ганкеля и Теплица // Спектральная теория. Препринт ЛОМИ. Р-1-82/Р-2-82/Р-5-82. Л. ЛОМИ, 1982.

[2] Nikolskii N.K. Treatise on the Shift Operator. New-York: Springer, 1985.

[3] Power S.C. Hankel operators on Hilbert space. Sudney: Pitman, 1982.

[4] Power S.C. Quasinilpotent Hankel operators // Lect. Notes in Math. 1985. VOL.1043. P.259-261.

[5] Rudin W. Fourier analysis on groups. New-York: Interscience publishers, 1962.

[6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

[7] Newburg J.D. The variation of spectra // Duke Math.J. 1951. Vol.18. P.165-176.

[8] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

[9] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. 383 с.

[10] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр.лит., 1963. 311 с.

Ленинградский государственный университет

198904, Ленинград, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., 2.

Поступило 5 марта 1990 г.