

В.А.Лифшиц, В.П.Чернов

НЕКОМПАКТНЫЙ ЗАМКНУТЫЙ ШАР В КОНСТРУКТИВНОМ
КОМПАКТНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Результаты доложены 28 октября 1971 г.)

Заметка принадлежит конструктивному направлению в математике; прилагательное "конструктивный" перед математическими терминами будет обычно опускаться.

Метрическое пространство называется компактным, если оно полно и вполне ограничено (см. [1], [2]). Множество в метрическом пространстве называется компактным, если оно компактно как подпространство. В классическом анализе доказывается, что замкнутое множество в компактном пространстве компактно. В конструктивном анализе это утверждение неверно. Действительно, если $\{\rho_i\}_{i=0}^{\infty}$ — возрастающая, ограниченная сверху единицей и не имеющая предела последовательность положительных вещественных чисел, A — множество всех вещественных x из $[0, 1]$, таких, что $x < \rho_i$ для некоторого i , то A — замкнутое некомпактное множество в сегменте $[0, 1]$.

Можно подумать, что некомпактность множества A связана с тем, что оно "сложно устроено". Перейдем к рассмотрению более "просто устроенных" (и более важных) замкнутых подмножеств компактного метрического пространства — замкнутых шаров (множество A не является шаром).

Из теоремы 1 главы 2 и теоремы 8 главы 4 книги [2] следует, что для всякого шара в компактном метрическом пространстве существуют сколь угодно близкие к нему компактные замкнутые шары. Точнее, для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать два замкнутых шара, концентрических с данным, один из которых меньше него, а другой больше, таких, что их радиусы отличаются от радиуса данного шара меньше, чем на ε , и оба шара являются компактными. Ниже показано, что это утверждение нельзя усилить, доказав, что всякий замкнутый шар в компактном метрическом пространстве компактен. Более того, можно привести пример замкнутого шара в компактном метрическом пространстве, который не является компактным и даже (в некотором сильном смысле, который будет уточнен в формулировке теоремы) не является локально компактным.

Для построения такого примера нам потребуется числовой ряд с положительными рациональными членами, такой что

- 1) частичные суммы этого ряда ограничены сверху единицей,
- 2) неверно, что его общий член стремится к нулю,
- 3) неверно, что для всякой верхней границы частичных сумм этого ряда существует меньшая верхняя граница.

Построим такой ряд. Пусть H — гиперпростое множество натуральных чисел, h — взаимно однозначное отображение натурального ряда на H . Тогда, как следует из [3], ряд с частичными суммами

$$p_n = \sum_{i=0}^n 2^{-h(i)}$$

является искомым.

Пусть P — множество всех частичных сумм этого ряда, а M — множество всех его верхних границ, не превосходящих некоторого \bar{p} . Посредством L обозначим

$$[0, \bar{p}] \setminus ([0, \bar{p}] \setminus (P \cup M)) \quad (\text{см. рис. I})$$

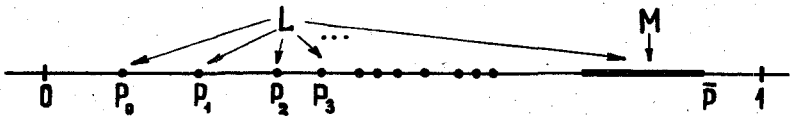


Рис. I

ЛЕММА 1. Пусть $p_{n+1} - p_n > \varepsilon$, $\{y_0, \dots, y_m\} \in L$, $y_0 < \dots < y_m$, $|y_0 - p_n| < \varepsilon$, $|y_m - p_{n+1}| < \varepsilon$. Тогда для некоторого k выполнено неравенство

$$y_{k+1} - y_k > \varepsilon.$$

ЛЕММА 2. Множество L не является вполне ограниченным (как подпространство вещественной прямой).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что L вполне ограничено, и покажем, в противоречие с выбором $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$, что $p_{i+1} - p_i \rightarrow 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\{x_0, \dots, x_\ell\} - \varepsilon/3$ -сеть в L . Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\ell \geq 1$ и $x_0 < \dots < x_\ell$. Рассмотрим два случая.

1) Для любого i имеет место неравенство $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$. Тогда $p_{n+1} - p_n < \varepsilon$ не только для достаточно больших, но и вообще для всех n . Действительно, если $p_{n+1} - p_n \geq \varepsilon$ для некоторого n , то по лемме 1 $x_{k+1} - x_k > \varepsilon$ для некоторого k , что невозможно.

2) Для некоторого i имеет место неравенство $x_{i+1} - x_i > 2\varepsilon/3$.

Пусть j таково, что $x_{j+1} - x_j > 2\varepsilon/3$ и $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$ для $j < i < \ell$. Докажем, что существует такое натуральное число s , что $p_s > x_{j+1} - 2\varepsilon/3$. Пусть такого s нет. Тогда $x_{j+1} - 2\varepsilon/3 \in M$, откуда $x_{j+1} - \varepsilon/3 \in M$. Но для точки $x_{j+1} - \varepsilon/3$ нет такого элемента нашей $\varepsilon/3$ -сети, который бы находился от нее на расстоянии, меньшем $\varepsilon/3$. Полученное проти-

воречие доказывает, что S найдется.

Возьмем такое S . Тогда $r_{n+1} - r_n < \varepsilon$ для любого $n \geq S$. Действительно, допустим, что $r_{n+1} - r_n \geq \varepsilon$ для некоторого $n \geq S$. Тогда, по лемме 1, среди точек множества $\{x_{j+1} - 2\varepsilon/3, x_{j+1}, \dots, x_\ell\}$ найдется пара соседних, расстояние между которыми не меньше ε , а это противоречит выбору j .

Лемма доказана.

Пусть на плоскости задана полярная система координат с полюсом θ ; φ и r обозначают полярный угол и радиус соответственно.

Для любого i посредством a_i обозначим точку с координатами $\varphi(a_i) = r_i$, $r(a_i) = 1 - 2^{-i-1}$; пусть A — множество всех членов последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, B_i — множество всех точек x , таких что $r_i \leq \varphi(x) \leq \pi/2$, $r(x) = 1 + 2^{-i-1}$ (см. рис. 2). Пусть

$$D = \{\theta\} \cup A \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$$

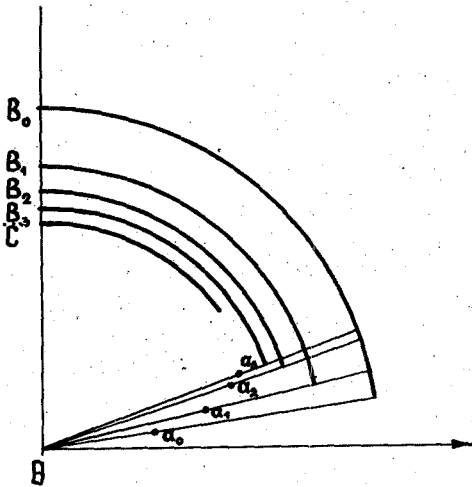


Рис. 2

Рассмотрим подпространство \bar{D} — замыкание D . Оно компактно, поскольку 2^{-n} -сеть в \bar{D} образуют точка θ вместе с первыми $n+2$ членами последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и с точками дробления каждой из дуг B_0, \dots, B_{n+2} на 2^{n+2} равных частей.

Рассмотрим замкнутый шар S в пространстве \bar{D} с центром θ и радиусом 1. Как мы покажем, шар S не компактен.

Пусть $C = \{x \in S : r(x) = 1\}$. Для любого натурального k и любой точки $u \in C$ положим

$$S_{k,u} = \{x \in S : x \neq \theta, \varphi(u) \geq \varphi(x) \geq \varphi(a_k)\}.$$

Из леммы 2 вытекает, что, каковы бы ни были натуральное k и $u \in C$, $\varphi(S_{k,u})$ не является вполне ограниченным.

ТЕОРЕМА. В некотором конструктивном компактном метрическом пространстве существует замкнутый шар, для которого неверно, что всякая его точка имеет компактную окрестность в этом шаре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что шар S в пространстве \bar{D} обладает требуемым свойством.

Допустим, что для всякой точки $x \in S$ в подпространстве S существует шар V с центром x , содержащийся в некотором компактном множестве $K \subset S$. Пусть w — какая-нибудь верхняя граница последовательности $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ т.е. $\{\varphi(a_i)\}_{i=0}^{\infty}$. Покажем, как найти верхнюю границу этой последовательности, меньшую w .

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $w < \pi/2$. Возьмем точку $u \in S$ такую, что $\varphi(u) = w$. Пусть V и K — шар и компакт, соответствующие точке u . Пусть вещественное число $\sigma > 0$ настолько мало, что $\sigma < \min(w, 1)$ и множество Π таких точек y шара S , что $0 \leq w - \varphi(y) \leq \sigma$ и $0 \leq 1 - r(y) \leq \sigma$, содержится в V . (см. рис.3).

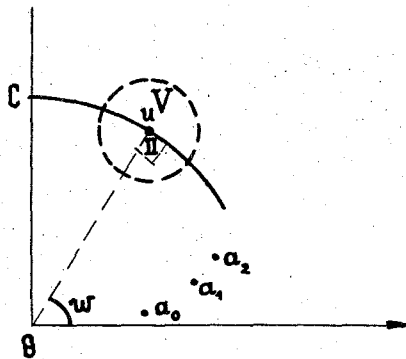


Рис.3

Покажем, что $\Pi \cap A = \emptyset$. Допустим, что $a_k \in \Pi$ для некоторого k . Тогда, по выбору Π , $a_n \in V$ для всех $n \geq k$, откуда $a_n \in K \setminus \{\emptyset\}$. Рассмотрим множество $S_{k,u}$. Легко видеть, что $\varphi(S_{k,u})$ — замкнутое локализованное подмножество множества $\varphi(K \setminus \{\emptyset\})$ (множество Y в метрическом пространстве X называется локализованным, если расстояние от x до Y , являющееся точной нижней гранью множества расстояний от x до точек множества Y , существует для всякой точки x пространства X ; см. [2], глава 4, § 2). С другой стороны, φ взаимно однозначно и взаимно равномерно непрерывно отображает компактное множество $K \setminus \{\emptyset\}$ на $\varphi(K \setminus \{\emptyset\})$, поэтому $\varphi(K \setminus \{\emptyset\})$ компактно. Следовательно, ([2], предложение 7 главы 4) $\varphi(S_{k,u})$ компактно, что, как мы видели, неверно. Полученное противоречие доказывает, что $\Pi \cap A = \emptyset$.

Поэтому $\omega - \sigma$ есть верхняя граница последовательности $\{\rho_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Теорема доказана.

Укажем еще один, несколько более простой пример некомпактного шара в компактном метрическом пространстве (каждая точка этого шара, однако, изолирована, и потому обладает компактной окрестностью).

Рассмотрим равномерно непрерывную функцию f на $[0, 1]$, такую, что $0 \leq f(y) < 1$ для всех $y \in [0, 1]$, и

$$\sup_{y \in [0, 1]} f(y) = 1.$$

(пример такой функции строится в теореме 5.5 из [4]). Положим

$$Y = \{y_0 \in [0, 1] : \sup_{0 \leq y \leq y_0} f(y) < 1\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$M_\varepsilon = \{y \in Y : f(y) > 1 - \varepsilon\}.$$

Нетрудно показать, что каждое M_ε содержит хотя бы одно рациональное число. Возьмем последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ рациональных чисел, такую что $a_n \in M_{2^{-n}}$ для любого n . Пусть A_1 — множество всех точек x , полярные координаты которых удовлетворяют условиям

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad r(x) = 3 - f(\varphi(x)),$$

A_2 — множество всех членов последовательности точек $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемой условиями

$$\varphi(x_n) = a_n, \quad r(x_n) = 1 + f(\varphi(x_n)),$$

(см. рис. 4). Подпространство $\{\theta\} \cup A_1 \cup A_2$ компактно, а шар с центром θ и радиусом 2 в этом пространстве некомпактен.

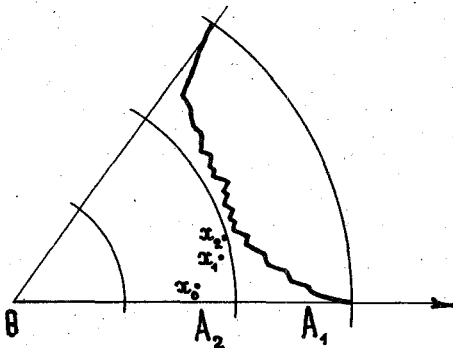


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 15-294.
2. Bishop E. Foundations of constructive analysis. New York, 1967.
3. Цейтин Г.С. О верхних границах перечислимых множеств конструктивных вещественных чисел. "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1970, 113, 102-172.
4. Заславский И.Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 385-457.