ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 406–416

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОБРАЗОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПРИ ПОСТЕПЕННОМ РАЗГОНЕ

© 2004 г. В. Н. Самохин

Изучение процесса образования пограничного слоя вязкой среды вблизи поверхности обтекаемого тела является одной из основных задач теории нестационарного пограничного слоя. Задача о развитии пограничного слоя в случае, когда тело начинает движение, равномерно ускоряясь в неподвижной вязкой среде, рассматривалась впервые в работе [1]. В [2] обсуждается физическая сторона этого явления и приводится математическая постановка задачи. Математически строгое решение этой задачи получено в работе [3], там же указаны возможные обобщения задачи. Все эти вопросы в полной мере изложены в монографии [4].

В работе [4] имеется список нерешенных задач, которые, по мнению авторов, весьма актуальны для теории пограничного слоя. Среди них указана задача об образовании пограничного слоя в реологически сложной среде. Одна из таких задач рассмотрена в настоящей работе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную систему уравнений пограничного слоя псевдопластической жидкости (см. [4]):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad 0<n<1,\tag{1.1}$$

в области $D=\{0<t<T,\ 0<x<X,\ 0<y<\infty\}$. В системе уравнений (1.1) функции $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ являются неизвестными компонентами скорости среды в пограничном слое и подлежат определению, скорость внешнего потока $U(t,x)$ задана. Параметр $\nu>0$ зависит от консистенции и плотности среды.

Зададим начальное и граничные условия, соответствующие задаче об образовании симметрического пограничного слоя при постепенном приведении покоящейся среды в движение:

$$u(0,x,y)=0,\quad u(t,0,y)=0,\quad u(t,x,0)=0,$$

$$v(t,x,0)=v_0(t,x),\quad u(t,x,y)\to U(t,x)\quad \text{при}\quad y\to\infty.\tag{1.2}$$

При этом предполагается, что $U(t,x)=txV(t,x)$, $V(t,x)>0$; $v_0(t,x)=x^{(n-1)/(n+1)}v_1(t,x)$, функции $V(t,x)$ и $v_1(t,x)$ ограничены в D и имеют ограниченные производные первого порядка по t и x.

Определение 1. Решением задачи (1.1), (1.2) называются функции $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ такие, что $u(t,x,y)$ непрерывна и ограничена в $\overline{D}$, $v(t,x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$ по y и ограничена при ограниченных y, существуют ограниченные в G обобщенные производные u_t, u_x, u_y, u_{yy}, v_y, функции u и v удовлетворяют почти всюду в D уравнениям (1.1) и удовлетворяют условиям (1.2).

2. Переход к переменным типа Крокко. Проведем в задаче (1.1), (1.2) замену переменных, являющуюся модификацией известной замены переменных Крокко (см. [4]). Обозначим $\gamma(n)=(n+1)/n$, $\delta(n)=(n-1)/n$ и введем новые независимые переменные

$$\tau=t^{1/\gamma(n)},\quad \xi=x,\quad \eta=u/U\tag{2.1}$$

и новую неизвестную функцию

$$w(\tau,\xi,\eta)=|u_y|^{n-1}u_y/(x^{2/\gamma(n)}V(t,x)).\tag{2.2}$$

Задача (1.1), (1.2) при этом сведется к уравнению вида

$$\nu n V^{-\delta(n)}|w|^{\gamma(n)}w_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n)\tau^{1+\gamma(n)}w_\tau - \eta\xi\tau^{3\gamma(n)}Vw_\xi + Aw_\eta + Bw = 0 \tag{2.3}$$

в области $\Omega = \{0 < \tau < T^{1/\gamma(n)},\ 0 < \xi < X,\ 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$(\nu w|w|^{-\delta(n)}w_\eta - \tau^{\gamma(n)}v_1 w|w|^{-\delta(n)} + C)|_{\eta=0} = 0, \quad w(1) = 0. \tag{2.4}$$

В соотношениях (2.3), (2.4) мы имеем

$$A = (\eta - 1)\tau^{\gamma(n)} + A_1, \quad B = \tau^{2\gamma(n)}B_2, \quad C = \tau^{\gamma(n)}V^{\delta(n)}(t,x) + C_1,$$

где

$$A_1 = \tau^{2\gamma(n)}(\tau^{\gamma(n)}(\eta^2 - 1)(V + \xi V_x) + V_t/V) \equiv \tau^{2\gamma(n)}A_2(\tau,\xi,\eta),$$

$$B_2(\tau,\xi,\eta) \equiv -\eta\tau^{\gamma(n)}((2n/(n+1))V + \xi V_x) - V_t/V,$$

$$C_1 \equiv \tau^{2\gamma(n)}(\tau^{\gamma(n)}V^{\delta(n)}(V + \xi V_x) + V_t/V) \equiv \tau^{2\gamma(n)}C_2(\tau,\xi,\eta).$$

Предположим, что $V(t,x)$ и $v_0(t,x)$ таковы, что функции A_2, B_2, C_2 имеют ограниченные производные по τ, ξ, η.

Определение 2. Решением задачи (2.3), (2.4) называется непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $w(\tau,\xi,\eta)$, имеющая ограниченные в Ω обобщенные производные первого порядка, обобщенную производную $w_{\eta\eta}$ такую, что $w^{1/n}w_{\eta\eta}$ ограничено, w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; $w(\tau,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям (2.4) и почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (2.3).

3. Решение задачи (2.3), (2.4) методом прямых. Если функция $f(\tau,\xi,\eta)$ задана в области Ω, то при $h = \mathrm{const} > 0$ введем обозначения $f^{m,k}(\eta) \equiv f(mh,kh,\eta)$. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}|w^{m,k}|^{\gamma(n)}w^{m,k}_{\eta\eta} - \frac{n}{n+1}(mh)^{1+\gamma(n)}\frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} -$$

$$-\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})w^{m,k}_\eta + B^{m-1,k}w^{m,k} = 0, \tag{3.1}$$

$w^{0,k}(\eta) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $k = \overline{0,K}$, $K = [X/h]$, с граничными условиями

$$w^{m,k}(1) = 0, \quad (\nu w^{m,k}|w^{m,k}|^{-\delta(n)}w^{m,k}_\eta -$$

$$-((m-1)h)^{\gamma(n)}v_1^{m,k}w^{m,k}|w^{m,k}|^{-\delta(n)} + (mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)} + C_1^{m-1,k})|_{\eta=0} = 0. \tag{3.2}$$

Лемма 1. *Решение задачи (3.1), (3.2), положительное при $\eta = 0$ и $m > 0$, неотрицательно при $0 \le \eta \le 1$ и $m > 0$.*

Доказательство. Введем функции $\overline{w}^{m,k}$ такие, что $w^{m,k} = \overline{w}^{m,k}e^{\alpha mh}$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Из (3.1) для $\overline{w}^{m,k}$ выводим

$$\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}e^{mh\alpha\gamma(n)}|\overline{w}^{m,k}|^{\gamma(n)}\overline{w}^{m,k}_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n)(mh)^{1+\gamma(n)}e^{-\alpha h}(\overline{w}^{m,k} - \overline{w}^{m-1,k})/h -$$

$$-\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}(\overline{w}^{m,k} - \overline{w}^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})\overline{w}^{m,k}_\eta +$$

$$+(B^{m-1,k} - \alpha e^{-\alpha h'}\gamma^{-1}(n)(mh)^{1+\gamma(n)})\overline{w}^{m,k} = 0, \quad 0 < h' < h, \quad m \ge 1, \tag{3.3}$$

$\overline{w}^{m,k}(1) = 0$. Пусть $\overline{w}^{m,k}(0) > 0$ и h столь мало, что $e^{-\alpha h'} \ge 1/2$. Тогда при достаточно большом $\alpha > 0$ получим неравенство $B^{m-1,k} - \alpha e^{-\alpha h'}\gamma^{-1}(n)(mh)^{1+\gamma(n)} < 0$ при $mh \le \tau_1$. Это означает, что коэффициент при $\overline{w}^{m,k}$ в (3.3) отрицателен и неравенство $\overline{w}^{m,k}(\eta) > 0$ при

$0 < \eta < 1$ следует по принципу максимума (см. [4, лемма 3.1.1]). Следовательно, $\overline{w}^{m,k}(\eta) \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$, если $\overline{w}^{m,k}(0) > 0$ при $m > 0$. Лемма доказана.

Поскольку из физических соображений нас интересуют решения задачи (3.1), (3.2), положительные при $\eta = 0$ и $m > 0$, то вместо задачи (3.1), (3.2) рассмотрим следующую:

$$L_{m,k}(w) \equiv \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (w^{m,k})^{\gamma(n)} w^{m,k}_{\eta\eta} - \frac{n}{n+1}(mh)^{1+\gamma(n)} \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} -$$

$$- \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} \frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + ((\eta - 1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) w^{m,k}_\eta +$$

$$+ B^{m-1,k} w^{m,k} = 0, \quad w^{0,k}(\eta) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad k = \overline{0, K}, \tag{3.4}$$

$$w^{m,k}(1) = 0, \quad l_{m,k}(w) \equiv (\nu (w^{m,k})^{1/n} w^{m,k}_\eta -$$

$$- ((m-1)h)^{\gamma(n)} v_1^{m,k} (w_{m,k})^{1/n} + (mh)^{\gamma(n)} (V^{m-1,k})^{\delta(n)} + C_1^{m-1,k})|_{\eta=0} = 0. \tag{3.5}$$

Лемма 2. *Задача (3.4), (3.5) имеет решение $w^{m,k}(\eta)$ такое, что*

$$M_1 mh(1-\eta) \leq w^{m,k}(\eta) \leq M_2 mh(1-\eta)^{2/\gamma(n)}, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0;$$

$w^{m,k}(\eta)$ непрерывны при $0 \leq \eta \leq 1$ и непрерывно дифференцируемы при $0 \leq \eta < 1$.

Эта лемма доказывается аналогично тому, как доказана лемма 8.1.2 в [4].

Для дальнейших оценок функций $w^{m,k}(\eta)$ нам понадобится следующая

Лемма 3. *Предположим, что $V(0, x) = a = \text{const} > 0$. Дифференциальное уравнение*

$$\nu n a^{-\delta(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta} + (\eta - 1) Y_\eta - \gamma^{-1}(n) Y = 0 \tag{3.6}$$

на отрезке $0 \leq \eta \leq 1$ с граничными условиями

$$(\nu Y^{1/n} Y_\eta + a^{\delta(n)})|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0 \tag{3.7}$$

имеет непрерывно дифференцируемое при $0 \leq \eta < 1$ решение такое, что

$$K_1(1-\eta)^{2/\gamma(n)} \leq Y(\eta) \leq K_2(1-\eta)^{2/\gamma(n)}, \quad K_2(1-\eta)^{2/\gamma(n)} - K_0(1-\eta) \leq Y(\eta), \quad \eta_0 \leq \eta < 1, \tag{3.8}$$

$$-K_4(1-\eta)^{(n-1)/(n+1)} \leq Y_\eta(\eta) \leq -K_3(1-\eta)^{(n-1)/(n+1)}, \tag{3.9}$$

$$|Y^{1/n} Y_{\eta\eta}| \leq K_5, \quad Y^{1/n} Y_{\eta\eta} \leq -K_6. \tag{3.10}$$

При этом $\nu n a^{-\delta(n)} K_2^{\gamma(n)} (1-n)/(1+n) = 1/2$, $\nu n a^{-\delta(n)} K_1^{\gamma(n)}/(1+n) = 1/(2(1+\delta_1))$, $\delta_1 = \text{const} > 0$, $((n+1+2\delta_1)/(2(1+\delta_1)))K_3 = (n/(n+1))K_1$, $K_3 \leq K_1$, $K_4 \geq (2n/(n+1))K_2$, $K_0 > 0$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 5.1.2 и 8.1.3 из [4].

Лемма 4. *Решение задачи (3.4), (3.5), положительное при $\eta = 0$, $m \geq 1$, удовлетворяет неравенствам*

$$mhY(\eta)e^{-\alpha mh} \leq w^{m,k} \leq mhY(\eta)e^{\alpha mh}, \quad \alpha = \text{const} > 0, \tag{3.11}$$

где $Y(\eta)$ – решение задачи (3.6), (3.7), $mh \leq \tau_1$, τ_1 достаточно мало.

Доказательство. Для оценки $w^{m,k}$ снизу рассмотрим вспомогательную функцию $f(\tau, \eta) = \tau Y(\eta) e^{-\alpha\tau}$. Имеем

$$L_{m,k}(f) = \nu n a^{-\delta(n)} (mh)^{1+\gamma(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta} (e^{-\alpha(1+\gamma(n))mh} - e^{-\alpha mh}) +$$

$$+ \nu n [(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - a^{-\delta(n)}] (mh)^{1+\gamma(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta} e^{-\alpha(1+\gamma(n))mh} +$$

$$+ \gamma^{-1}(n)(mh)^{1+\gamma(n)}(m-1)hYe^{-\alpha mh}\alpha e^{\alpha h'} + A_1^{m-1,k} mhY_\eta e^{-\alpha mh} + B^{m-1,k} mhYe^{-\alpha mh}, \quad 0 < h' < h,$$

$$l_{m,k}(f) = [\nu(mh)^{\gamma(n)}Y^{1/n}Y_\eta(e^{-\alpha\gamma(n)mh} - 1) -$$
$$- ((m-1)h)^{1/n}v_1^{m,k}Y^{1/n}e^{-(\alpha/n)mh} + (mh)^{\gamma(n)}((V^{m-1,k})^{\delta(n)} - a^{\delta(n)}) + C_1^{m-1,k}]|_{\eta=0}.$$

Учитывая неравенства (3.8)–(3.10), при $m > 1$ получаем $L_{m,k}(f) > 0$ при $0 < \eta < 1$, $mh \le \tau_1$, достаточно малом τ_1 и достаточно большом α; $l_{m,k}(f) > 0$ при соответствующем выборе τ_1. Кроме того, $f^{m,k}(1) = 0$, $f^{0,k}(\eta) = 0$.

Рассматривая неравенства

$$L_{m,k}(f) - L_{m,k}(w) > 0 \quad \text{и} \quad (f^{m,k}(0))^{-1/n}l_{m,k}(f) - (w^{m,k}(0))^{-1/n}l_{m,k}(w) > 0,$$

получаем на основе принципа максимума неравенство $w^{m,k}(\eta) \ge f^{m,k}(\eta)$, $0 \le \eta \le 1$, $m \ge 0$. Оценка $w^{m,k}(\eta)$ сверху получается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $V_x(t,x) \to 0$ при $t \to 0$. Для решения $w^{m,k}(\eta)$ задачи (3.4), (3.5), положительного при $\eta = 0$ и $m \ge 1$, выполняются неравенства*

$$mhY_\eta(\eta)e^{\beta mh} \le w_\eta^{m,k}(\eta) \le mhY_\eta(\eta)e^{-\beta mh}, \tag{3.12}$$

$$|(w^{m,k} - w^{m-1,k})/h| \le (1+\varepsilon)Y(\eta), \quad |(w^{m,k} - w^{m,k-1})/h| \le mhY(\eta), \tag{3.13}$$

$$|(w^{m,k})^{1/n}w_{\eta\eta}^{m,k}| \le K_7(mh)^{\gamma(n)}, \quad (w^{m,k})^{1/n}w_{\eta\eta}^{m,k} < -K_8(mh)^{\gamma(n)} \tag{3.14}$$

при $mh \le \tau_1$, где τ_1 достаточно мало, β, ε, K_7, $K_8 = \mathrm{const} > 0$ не зависят от h, $\varepsilon > 0$ – малое число.

Доказательство. Неравенства (3.12), (3.13) доказываются по индукции, а (3.14) является их следствием. Сначала докажем, что оценки (3.12), (3.13) верны при $m = 1$. Затем предположим, что они верны при $m \le m' - 1$ и $m = m'$, $k \le k' - 1$, где $m' \ge 2$, $k' \ge 0$, и покажем, что они выполняются при $m = m'$, $k = k'$, если подходящим образом выбраны β, ε, τ_1.

Введем обозначения: $r^{m,k} = (w^{m,k} - w^{m,k-1})/h$, $\rho^{m,k} = (w^{m,k} - w^{m-1,k})/h$, $z^{m,k} = w_\eta^{m,k}$.

При $m = 1$ из (3.4) следует равенство

$$\nu n a^{-\delta(n)}(w^{1,k})^{\gamma(n)}w_{\eta\eta}^{1,k} - \gamma^{-1}(n)h^{\gamma(n)}w^{1,k} + (\eta - 1)h^{\gamma(n)}w_\eta^{1,k} = 0, \tag{3.15}$$

из (3.5) получаем

$$w^{1,k}(1) = 0, \quad (\nu(w^{1,k})^{1/n}w_{\eta\eta}^{1,k} + h^{\gamma(n)}a^{\delta(n)})|_{\eta=0} = 0. \tag{3.16}$$

Решением задачи (3.15), (3.16) являются функции $w^{1,k}(\eta) = hY(\eta)$. Для этих функций все утверждения леммы 5 верны. В самом деле, $w^{0,k} = 0$, $0 < \rho^{1,k} = Y < (1+\varepsilon)Y$, $r^{1,k} = 0$, $(w^{1,k})^{1/n}w_{\eta\eta}^{1,k} = Y^{1/n}Y_{\eta\eta}h^{\gamma(n)} \le -K_6h^{\gamma(n)}$.

Рассмотрев равенство $(L_{m,k}(w) - L_{m-1,k}(w))/h = 0$, для $\rho^{m,k}$ получим уравнение

$$R_{m,k}(\rho) \equiv \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}\rho_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1))((m-1)h)^{1+\gamma(n)}(\rho^{m,k} - \rho^{m-1,k})/h -$$
$$- \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}(\rho^{m,k} - \rho^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})\rho_\eta^{m,k} +$$
$$+ B^{m-1,k}\rho^{m,k} + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta^{m,k}(\eta)w_{\eta\eta}^{m-1,k}\rho^{m,k} -$$
$$- (n/(n+1))m(mh)^{\gamma(n)}(1 - ((m-1)/m)^{1+\gamma(n)})\rho^{m,k} =$$
$$= -(\nu n/h)[(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - (V^{m-2,k})^{-\delta(n)}](w^{m-1,k})^{\gamma(n)}w_{\eta\eta}^{m-1,k} -$$
$$- (\eta-1)m(mh)^{1/n}(1 - ((m-1)/m)^{\gamma(n)})z^{m-1,k} -$$
$$- (1/h)[((m-1)h)^{2\gamma(n)}A_2^{m-1,k} - ((m-2)h)^{2\gamma(n)}A_2^{m-2,k}]z^{m-1,k} +$$
$$+ (\eta/h)[((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k} - ((m-2)h)^{2\gamma(n)}U^{m-1,k}]r^{m-1,k} + (1/h)(B^{m-1,k} - B^{m-2,k})w^{m-1,k},$$

где $\theta^{m,k}(\eta) = \gamma(n)\int_0^1 [\tau w^{m,k} + (1-\tau)w^{m-1,k}]^{1/n}\,d\tau$.

Из (3.5) выводим граничные условия

$$\rho^{m,k}(1) = 0, \quad \Gamma_{m,k}(\rho) \equiv \left[\nu\rho_\eta^{m,k}(\eta) - \frac{((mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)}C_1^{m-1,k})\theta_1^{m,k}(\eta)}{(w^{m,k})^{1/n}(w^{m-1,k})^{1/n}}\rho^{m,k}(\eta)\right]\Bigg|_{\eta=0} =$$

$$= -\frac{1}{(w^{m-1,k}(0))^{1/n}}\left[m(mh)^{1/n}\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\gamma(n)}\right)(V^{m-1,k})^{\delta(n)} + \right.$$

$$\left. + ((m-1)h)^{\gamma(n)}\frac{(V^{m-1,k})^{\delta(n)} - (V^{m-2,k})^{\delta(n)}}{h} + \frac{C_1^{m-1,k} - C_1^{m-2,k}}{h}\right] +$$

$$+ (1/h)(((m-1)h)^{\gamma(n)}v_1^{m,k} - ((m-2)h)^{\gamma(n)}v_1^{m-1,k}),$$

$$\theta_1^{m,k}(\eta) = \frac{1}{n}\int_0^1 [\tau w^{m,k} + (1-\tau)w^{m-1,k}]^{-\delta(n)}\,d\tau.$$

Для оценки $\rho^{m,k}(\eta)$ введем функцию $f_1(\eta) = (1+\varepsilon)Y(\eta)$, $m > 1$. Имеем

$$R_{m,k}(f_1) \pm R_{m,k}(\rho) \le (1+\varepsilon)\Big\{\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} +$$

$$+ ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})Y_\eta + B^{m-1,k}Y + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta^{m,k}(\eta)w_{\eta\eta}^{m-1,k}Y -$$

$$- \frac{n}{n+1}m(mh)^{\gamma(n)}\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{1+\gamma(n)}\right)Y\Big\} \pm$$

$$\pm\left\{-(\eta-1)m(mh)^{1/n}\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\gamma(n)}\right)z^{m-1,k} + M_3(mh)^{1+\gamma(n)}Y + M_4(mh)^{2\gamma(n)}Y\right\} \le$$

$$\le (1+\varepsilon)\Big\{\nu n a^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta}(mh)^{\gamma(n)} + (mh)^{\gamma(n)}(\eta-1)Y_\eta - \frac{n}{n+1}m(mh)^{\gamma(n)}\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{1+\gamma(n)}\right)Y +$$

$$+ \frac{(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta^{m,k}(\eta)}{(V^{m-2,k})^{-\delta(n)}(w^{m-1,k})^{\gamma(n)}}\left(\frac{n}{n+1}((m-1)h)^{1+\gamma(n)}(1+\varepsilon)Y - (\eta-1)((m-1)h)^{1+\gamma(n)}Y_\eta\right)Y\Big\} -$$

$$- (\eta-1)m(mh)^{1/n}\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\gamma(n)}\right)(m-1)hY_\eta + M_3(mh)^{1+\gamma(n)}Y + M_4(mh)^{2\gamma(n)}Y,$$

$$M_i = \text{const} > 0, \quad i = \overline{3,6}.$$

Учитывая предположения индукции, неравенства (3.11) и оценку

$$\theta^{m,k}(\eta) \le \gamma(n)(mh)^{1/n}Y^{1/n}e^{\alpha mh/n},$$

приходим к неравенству

$$R_{m,k}(f_1) \pm R_{m,k}(\rho) \le (1+\varepsilon)(mh)^{\gamma(n)}\Big[\nu n a^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} + (\eta-1)Y_\eta -$$

$$- \frac{n}{n+1}m\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{1+\gamma(n)}\right)Y + (m-1)\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\gamma(n)}\right)\left(\frac{n}{n+1}(1+\varepsilon)Y -\right.$$

$$\left. - (\eta-1)Y_\eta\right)\Big] - (mh)^{(1+n)/n}(1-\eta)(m-1)\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\gamma(n)}\right)Y_\eta +$$

$$+M_7(mh)^{1+\gamma(n)}Y + M_8(mh)^{2\gamma(n)}Y, \quad M_7, M_8 = \text{const} > 0,$$

не зависящие от h и τ_1.

Заметим, что выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части этого неравенства, равно

$$(1-m)\left(1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\gamma(n)}\right)\left\{\left[\frac{n}{n+1}Y - \left(\frac{n}{n+1}(1+\varepsilon)Y - (\eta-1)Y_\eta\right)\right](1+\varepsilon) + (1-\eta)Y_\eta\right\}$$

и, кроме того, $-1 < (1-m)(1-((m-1)/m)^{\gamma(n)}) < -1/2$ при $m > 1$.

Принимая во внимание (3.6) и (3.10), получаем

$$\left[\frac{n}{n+1}Y - \left(\frac{n}{n+1}(1+\varepsilon)Y - (\eta-1)Y_\eta\right)\right](1+\varepsilon) + (1-\eta)Y_\eta \geq$$

$$\geq \varepsilon n Y\left(\frac{\varepsilon n}{n+1} - \varepsilon - \nu a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_{\eta\eta}\right) \geq \frac{\varepsilon^2 n^2}{n+1}Y$$

при $\varepsilon \leq \nu K_6 a^{-\delta(n)}$; возьмем $\varepsilon = K_6 a^{-\delta(n)}/2$.

Значит, при $mh \leq \tau_1$ и достаточно малом τ_1 получим $R_{m,k}(f_1) \pm R_{m,k}(\rho) < 0$ независимо от h.

При $\eta = 0$ рассмотрим неравенство

$$\Gamma_{m,k}(f_1) \pm \Gamma_{m,k}(\rho) \leq \left[\nu(1+\varepsilon)Y_\eta - \frac{(mh)^{1/n}a^{\delta(n)}m(1-((m-1)/m)^{1/n})}{((m-1)h)^{1/n}Y^{1/n}}(1+\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^{\delta(n)}(mh)^{1/n}}{((m-1)h)^{1/n}Y^{1/n}}\right]\Bigg|_{\eta=0} + M_9 mh, \quad M_9 = \text{const} > 0.$$

Из (3.7) находим $\nu Y_\eta(0) = -a^{\delta(n)}/Y^{1/n}(0)$ и поэтому

$$\Gamma_{m,k}(f_1) \pm \Gamma_{m,k}(\rho) \leq \frac{a^{\delta(n)}}{Y^{1/n}(0)}\left(-\varepsilon - \varepsilon m\left(\left(\frac{m}{m-1}\right)^{1/n} - 1\right)\right) + M_{10}mh < 0$$

при $mh < \tau_1$, где τ_1 достаточно мало. Кроме того, $\rho^{m,k}(1) = 0$.

Из полученных соотношений с помощью принципа максимума выводим неравенство $f_1^{m,k} \pm \rho^{m,k} \geq 0$ при $mh \leq \tau_1$, откуда следует первое неравенство (3.13).

Для $r^{m,k}(\eta)$ получаем уравнение

$$Q_{m,k}(r) \equiv \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}r^{m,k}_{\eta\eta} - (n/(n+1))(mh)^{1+\gamma(n)}(r^{m,k} - r^{m-1,k})/h -$$

$$-\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}(r^{m,k} - r^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})r^{m,k}_\eta +$$

$$+B^{m-1,k}r^{m,k} + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta_2^{m,k}(\eta)w^{m,k-1}_{\eta\eta}r^{m,k} =$$

$$= \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}\frac{U^{m,k} - U^{m,k-1}}{h}r^{m,k-1} - \frac{1}{h}(A_1^{m-1,k} - A_1^{m-1,k-1})z^{m,k-1} -$$

$$-(\nu n/h)[(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{-\delta(n)}](w^{m,k-1})^{\gamma(n)}w^{m,k-1}_{\eta\eta} - (1/h)(B^{m-1,k} - B^{m-1,k-1})w^{m,k-1},$$

$m > 1$, $k \geq 1$, а также граничные условия $r^{m,k}(1) = 0$,

$$q_{m,k}(r) \equiv \left[\nu r^{m,k}_\eta(\eta) - \frac{((mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)}C_1^{m-1,k})\theta_3^{m,k}(\eta)}{(w^{m,k})^{1/n}(w^{m,k-1})^{1/n}}r^{m,k}\right]\Bigg|_{\eta=0} =$$

$$= ((m-1)h)^{\gamma(n)}(v_1^{m,k} - v_1^{m,k-1})/h -$$

$$-(w^{m,k-1}(0))^{-1/n}[(mh)^{\gamma(n)}((V^{m-1,k})^{\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{\delta(n)})/h + (C_1^{m-1,k} - C_1^{m-1,k-1})/h].$$

Здесь

$$\theta_2^{m,k}(\eta) = \frac{n+1}{n}\int\limits_0^1 [\tau w^{m,k} + (1-\tau)w^{m,k-1}]^{1/n}\,d\tau, \quad \theta_3^{m,k}(\eta) = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 [\tau w^{m,k} + (1-\tau)w^{m,k-1}]^{-\delta(n)}\,d\tau.$$

Положим $f_2(\eta) = \tau Y(\eta)$. Имеем

$$Q_{m,k}(f_2) \pm Q_{m,k}(r) = mh[\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n)(mh)^{\gamma(n)}Y +$$

$$+((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})Y_\eta + B^{m-1,k}Y + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta_2^{m,k}(\eta)w_{\eta\eta}^{m,k-1}Y] \pm$$

$$\pm\left[\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}\frac{U^{m,k} - U^{m,k-1}}{h}r^{m,k-1} - \frac{1}{h}(A_1^{m-1,k} - A_1^{m-1,k-1})z^{m,k-1} -\right.$$

$$\left.-\frac{\nu n}{h}((V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{-\delta(n)})(w^{m,k-1})^{\gamma(n)}w_{\eta\eta}^{m,k-1} - \frac{B^{m-1,k} - B^{m-1,k-1}}{h}w^{m,k-1}\right].$$

Учитывая предположения индукции, результаты лемм 3 и 4 и выражая $w_{\eta\eta}^{m,k-1}$ из (3.4), выводим неравенство $\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta_2^{m,k}(\eta)w_{\eta\eta}^{m,k-1}Y \le -M_{11}(mh)^{\gamma(n)}Y$, $M_{11} = \mathrm{const} > 0$. А так как $\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w_{\eta\eta}^{m,k})^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} \le \nu n a^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta}(mh)^{\gamma(n)} + M_{12}(mh)^{1+\gamma(n)}Y$, то

$$Q_{m,k}(f_2) \pm Q_{m,k}(r) \le mh[M_{12}(mh)^{1+\gamma(n)}Y + M_{13}((m-1)h)^{2\gamma(n)}Y -$$

$$-(1-\eta)M_{14}((m-1)h)^{1+\gamma(n)}Y_\eta - M_{11}(mh)^{\gamma(n)}Y] + M_{15}((m-1)h)^{2\gamma(n)}Y - M_{16}((m-1)h)^{2\gamma(n)}(1-\eta)Y_\eta,$$

где положительные постоянные $M_{11},\ldots,M_{15}$ не зависят от h и β, а M_{16} зависит от β. Значит, при $mh \le \tau_1$ и достаточно малом τ_1 получаем неравенство $Q_{m,k}(f_2) \pm Q_{m,k}(r) < 0$ независимо от h.

Далее находим

$$q_{m,k}(f_2) \pm q_{m,k}(r) = \left[\nu Y_\eta - \frac{((mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)}C_1^{m-1,k})\theta_3^{m,k}(\eta)}{(w^{m,k})^{1/n}(w^{m,k-1})^{1/n}}Y\right]\Bigg|_{\eta=0} \pm$$

$$\pm\left[((m-1)h)^{\gamma(n)}\frac{v_1^{m,k} - v_1^{m,k-1}}{h} - \frac{1}{(w^{m,k-1}(0))^{1/n}}\left(\frac{C_1^{m-1,k} - C_1^{m-1,k-1}}{h} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+(mh)^{\gamma(n)}\frac{(V^{m-1,k})^{\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{\delta(n)}}{h}\right)\right] \le mh\nu Y_\eta(0) + o(mh) < 0,$$

если $mh \le \tau_1$ и τ_1 достаточно мало. Из этих неравенств следует второе неравенство (3.13).

Дифференцируя уравнения (3.4) по η, для $z^{m,k}(\eta)$ получаем уравнение

$$P_{m,k}(z) \equiv \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}z_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1))(mh)^{1+\gamma(n)}(z^{m,k} - z^{m-1,k})/h -$$

$$-\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}(z^{m,k} - z^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})z_\eta^{m,k} +$$

$$+B^{m-1,k}z^{m,k} + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}((n+1)/n)(w^{m,k})^{1/n}z^{m,k}z_\eta^{m,k} +$$

$$+((mh)^{\gamma(n)} + A_{1\eta}^{m-1,k})z^{m,k} - ((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}r^{m,k} + B_\eta^{m-1,k}w^{m,k} = 0,$$

$m = 2,3,\ldots;$ $k = \overline{0,K}$. Из граничного условия (3.5) при $\eta = 0$ находим $\nu z^{m,k}(0) = ((m-1)h)^{\gamma(n)}v_1^{m,k} - [(mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)} + C_1^{m-1,k}](w^{m,k})^{-1/n}$. Кроме того, из оценок (3.11) следует, что существует последовательность $\eta_n^{m,k} \to 1$ при $n \to \infty$ такая, что

$$z^{m,k}(\eta_n^{m,k}) \geq mhY_\eta(\eta_n^{m,k})e^{\alpha mh}, \tag{3.17}$$

а также последовательность $\overline{\eta}_n^{m,k} \to 1$ при $n \to \infty$ такая, что

$$z^{m,k}(\overline{\eta}_n^{m,k}) \leq mhY_\eta(\overline{\eta}_n^{m,k})e^{-\alpha mh}. \tag{3.18}$$

Для оценки $z^{m,k}$ сверху рассмотрим функцию $f_3(\eta) = \tau Y_\eta(\eta)e^{-\beta\tau}$ и вычислим

$$P_{m,k}(f_3) = mhe^{-\beta mh}[\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta\eta} - \gamma^{-1}(n)(mh)^{\gamma(n)}Y_\eta +$$
$$+\gamma^{-1}(n)(mh)^{\gamma(n)}(m-1)hY_\eta\beta e^{\beta h'} + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})Y_{\eta\eta} +$$
$$+(B^{m-1,k} + (mh)^{\gamma(n)} + A_{1\eta}^{m-1,k})Y_\eta + \nu(n+1)(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}mhe^{-\beta mh}(w^{m,k})^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta}] -$$
$$-((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}r^{m,k} + B_\eta^{m-1,k}w^{m,k}, \quad 0 < h' < h.$$

Продифференцируем уравнение (3.6) по η и получим

$$\nu na^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta\eta} + (n+1)^{-1}Y_\eta + (\eta-1)Y_{\eta\eta} + \nu(n+1)a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta} = 0.$$

Из этого равенства и оценок (3.8)–(3.10) выводим неравенства $|Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta\eta}| \leq M_{17}|Y_\eta|$, $|Y^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta}| \leq M_{18}|Y_\eta|$, $Y^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta} > 0$, $|A_1^{m-1,k}Y_{\eta\eta}| \leq M_{19}((m-1)h)^{2\gamma(n)}|Y_\eta|$.

Вследствие этого

$$P_{m,k}(f_3) \leq mhe^{-\beta mh}[(mh)^{\gamma(n)}(\nu na^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta\eta} - (n+1)^{-1}Y_\eta + (\eta-1)Y_{\eta\eta} +$$
$$+\nu(n+1)a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta}) + (n/(n+1))(mh)^{\gamma(n)}(m-1)hY_\eta\beta e^{\beta h'} +$$
$$+\nu(n+1)a^{-\delta(n)}(mh)^{\gamma(n)}Y^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta}(e^{-\beta mh}-1) + A_1^{m-1,k}Y_{\eta\eta} +$$
$$+(B^{m-1,k} + A_{1\eta}^{m-1,k})Y_\eta + M_{20}(mh)^{1+\gamma(n)}Y^{1/n}Y_\eta Y_{\eta\eta}] + M_{21}((m-1)h)^{2\gamma(n)}Y \leq$$
$$\leq mhe^{-\beta mh}[(n/(n+1))(mh)^{\gamma(n)}(m-1)hY_\eta\beta e^{\beta h'} + M_{22}(mh)^{1+\gamma(n)}|Y_\eta|] + M_{21}((m-1)h)^{2\gamma(n)}Y < 0,$$

если $mh \leq \tau_1$, τ_1 достаточно мало и достаточно велико $\beta > 0$; постоянные β и $M_{17},\ldots,M_{21}$ не зависят от h.

Для разности $S^{m,k} = f_3^{m,k} - z^{m,k}$ получаем неравенства

$$\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}S_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1))(mh)^{1+\gamma(n)}(S^{m,k} - S^{m-1,k})/h -$$
$$-\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}(S^{m,k} - S^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})S_\eta^{m,k} + B^{m-1,k}S^{m,k} +$$
$$+\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(1+1/n)(w^{m,k})^{1/n}z^{m,k}S_\eta^{m,k} + ((mh)^{\gamma(n)} + A_{1\eta}^{m-1,k})S^{m,k} +$$
$$+\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(1+1/n)(w^{m,k})^{1/n}f_{3\eta}^{m,k}S^{m,k} < 0.$$

В этих неравенствах коэффициент при $S^{m,k}$, равный

$$-\gamma^{-1}(n)(mh)^{1+\gamma(n)}h^{-1} - (\eta/h)((m-1)h)\cdot 2\gamma(n)U^{m,k} + B^{m-1,k} + (mh)^{\gamma(n)} +$$
$$+A_{1\eta}^{m-1,k} + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\gamma(n)(w^{m,k})^{1/n}f_{3\eta}^{m,k},$$

отрицателен при $m > 1$, достаточно малом τ_1 и $mh \le \tau_1$. Кроме того, имеют место неравенства $S^{m,k}(\overline{\eta}_n^{m,k}) \ge 0$, $S^{m,k}(0) > 0$, если β достаточно велико, $mh \le \tau_1$, а $S^{m-1,k} \ge 0$, $S^{m,k-1} \ge 0$ по предположению индукции. Поэтому $S^{m,k}$ не может принимать наименьшее отрицательное значение при $0 \le \eta < 1$. Значит, $z^{m,k} \le f_3^{m,k}$ при $0 \le \eta < 1$. Аналогично доказывается оценка $z^{m,k}$ снизу.

Из полученных неравенств и уравнений (3.4) следует равномерная по h ограниченность произведения $(w^{m,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{m,k}$. Докажем второе из неравенств (3.14). Из (3.4) находим

$$(w^{m,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{m,k} \le \frac{1}{\nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} mhYe^{\alpha mh}} \left(\frac{n}{n+1}(mh)^{1+\gamma(n)}(1+\varepsilon)Y + \right.$$

$$\left. + \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} mhY - (\eta-1)(mh)^{1+\gamma(n)} Y_\eta e^{-\beta mh} - A_1^{m-1,k} z^{m,k} - B^{m-1,k} w^{m,k} \right) \le$$

$$\le \frac{(mh)^{\gamma(n)}}{\nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} Ye^{\alpha mh}} \left(\frac{n}{n+1}(1+\varepsilon)Y - (\eta-1)Y_\eta + M_{23} mhY \right) \le$$

$$\le \frac{(mh)^{\gamma(n)}}{\nu (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} e^{\alpha mh}} \left(\frac{\varepsilon n}{n+1} + \nu a^{-\delta(n)} Y^{1/n} Y_{\eta\eta} + M_{23} mh \right) \le$$

$$\le \frac{(mh)^{\gamma(n)}}{\nu (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} e^{\alpha mh}} \left(-\frac{\varepsilon n}{n+1} + \varepsilon - \nu K_6 a^{-\delta(n)} + M_{24} mh \right) \le -K_8 (mh)^{\gamma(n)},$$

если $mh \le \tau_1$ и τ_1 достаточно мало, постоянные M_{23}, M_{24} не зависят от h. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены указанные выше предположения относительно функций U и v_0. Тогда в области Ω, где $\tau_1 = T^{1/\gamma(n)}$ зависит от U и v_0, существует решение $w(\tau,\xi,\eta)$ задачи (2.3), (2.4), обладающее следующими свойствами: $\tau Y(\eta)e^{-\alpha\tau} \le w(\tau,\xi,\eta) \le$ $\le \tau Y(\eta) e^{\alpha\tau}$, $\tau Y_\eta(\eta)e^{\beta\tau} \le w_\eta(\tau,\xi,\eta) \le \tau Y_\eta(\eta) e^{-\beta\tau}$, $|w_\tau| \le (1+\varepsilon)Y$, $|w_\xi| \le \tau Y$, $-K_7\tau^{\gamma(n)} \le$ $\le w^{1/n} w_{\eta\eta} \le -K_8\tau^{\gamma(n)}$. Если $n \ge 1-(2^{n+1}(1+\delta_1))^{-1}$, то решение, обладающее такими свойствами, единственно.*

Доказательство. Существование решения задачи (2.3), (2.4) доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1 работы [3] и в теореме 3.1.5 из [4].

Докажем единственность решения задачи (2.3), (2.4), обладающего указанными в теореме 1 свойствами, при условии $2^{n+1}(1-n)(1+\delta_1) \le 1$, $\delta_1 = \mathrm{const} > 0$. Предположим, что w_1, w_2 – два решения рассматриваемой задачи. Для разности $w_1 - w_2 = W$ получаем уравнение

$$\nu n V^{-\delta(n)} w_1^{\gamma(n)} W_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n)\tau^{1+\gamma(n)} V W_\xi + AW_\eta + \nu n V^{-\delta(n)} \theta(\eta) w_{2\eta\eta} W + BW = 0 \qquad (3.19)$$

с условиями

$$(\nu W_\eta - CW\theta_1(\eta)/(w_1 w_2))|_{\eta=0} = 0, \quad W|_{\eta=1} = 0, \quad W|_{\tau=0} = 0, \qquad (3.20)$$

где $\theta(\eta) = \gamma(n)\int_0^1 (\tau w_1 + (1-\tau)w_2)^{1/n}\,d\tau$, $\theta_1(\eta) = \gamma(n)\int_0^1 (\tau w_1 + (1-\tau)w_2)^{-\delta(n)}\,d\tau$. Умножим равенство (3.19) на $We^{-\gamma\tau}/(\tau^{1+\gamma(n)} w_1)$ и проинтегрируем по Ω. Преобразуя некоторые интегралы интегрированием по частям, приходим к равенству

$$\int\limits_\Omega \frac{W^2 e^{-\gamma\tau}}{2\tau^{1+\gamma(n)} w_1} \left(\nu V^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} w_1^{-\delta(n)} (w_{1\eta})^2 + \nu V^{-\delta(n)} w_1^{1/n} w_{1\eta\eta} - \frac{n}{n+1}\frac{w_{1\tau}}{w_1}\tau^{1+\gamma(n)} - \right.$$

$$\left. - \gamma\frac{n}{n+1}\tau^{1+\gamma(n)} + \eta(V+\xi V_x)\tau^{3\gamma(n)}\frac{w_{1\xi}}{w_1} + A\frac{w_{1\eta}}{w_1} - A_\eta + 2\nu n V^{-\delta(n)}\theta(\eta) w_{2\eta\eta} + 2B \right) d\tau\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\tau=\tau_1} -\frac{n}{n+1}\frac{W^2}{2}\frac{e^{-\gamma\tau}}{w_1}\,d\xi\,d\eta + \int\limits_{\xi=X} -\eta\xi V\tau^{1+2/n}\frac{W^2}{2}\frac{e^{-\gamma\tau}}{w_1}\,d\tau\,d\eta +$$

$$+\int\limits_{\eta=0}\Bigl(-nV^{-\delta(n)}w_1^{1/n}\frac{CW^2\theta_1(\eta)}{w_1w_2}\frac{e^{-\gamma\tau}}{\tau^{1+\gamma(n)}}+$$

$$+\frac{\nu}{2}V^{-\delta(n)}w_1^{-\delta(n)}w_{1\eta}W^2\frac{e^{-\gamma\tau}}{\tau^{1+\gamma(n)}}-\frac{1}{\tau^{1+\gamma(n)}}\frac{A}{2}\frac{W^2}{w_1}e^{-\gamma\tau}\Bigr)\,d\tau\,d\xi=0. \tag{3.21}$$

Интеграл по границе $\eta=0$ из этого равенства не превосходит величины

$$\int\limits_{\eta=0}\frac{W^2e^{-\gamma\tau}}{\tau^{1+\gamma(n)}}\Bigl[-\frac{nV^{-\delta(n)}w_1^{-\delta(n)}C\theta_1(\eta)}{w_2}+\Bigl(\frac{\nu}{2}a^{-\delta(n)}Y^{-\delta(n)}Y_\eta\tau^{1/n}+\frac{\tau^{1/n}}{2Y}\Bigr)+M_{25}\tau^{\gamma(n)}\Bigr]\,d\tau\,d\xi\le 0,$$

$M_{25}=\mathrm{const}>0$, если $\tau\le\tau_1$ и τ_1 достаточно мало, так как в силу равенства $\nu Y^{1/n}(0)Y_\eta(0)=$ $=-a^{\delta(n)}$ выражение в квадратных скобках равно нулю.

Итак, при соответствующем выборе τ_1 все граничные интегралы в равенстве (3.21) неположительны. Опуская их и учитывая неравенство $2\nu nV^{-\delta(n)}\theta(\eta)w_{2\eta\eta}\le 0$ и уравнение (2.3) для w_1, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\frac{W^2e^{-\gamma\tau}}{2\tau^{1+\gamma(n)}w_1}\Bigl(\nu V^{-\delta(n)}\frac{1-n}{n}w_1^{-\delta(n)}(w_{1\eta})^2+\nu(1-\eta)V^{-\delta(n)}w_1^{1/n}w_{1\eta\eta}-\gamma\frac{n}{n+1}\tau^{1+\gamma(n)}+$$

$$+\eta(V+\xi V_x)\tau^{3\gamma(n)}-A_\eta+B\Bigr)\,d\tau\,d\xi\,d\eta\ge 0,$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{\Omega}\frac{W^2e^{-\gamma\tau}}{2\tau^{1+\gamma(n)}w_1}\Bigl(\Bigl(\nu a^{-\delta(n)}\frac{1-n}{n}Y^{-\delta(n)}Y_\eta^2+\nu(1-\eta)a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_{\eta\eta}-1\Bigr)\tau^{\gamma(n)}-$$

$$-\gamma\frac{n}{n+1}\tau^{1+\gamma(n)}+\eta(V+\xi V_x)\tau^{3\gamma(n)}+B+M_{26}\tau^{1+\gamma(n)}\Bigr)\,d\tau\,d\xi\,d\eta\ge 0,\quad M_{26}=\mathrm{const}>0. \tag{3.22}$$

Из уравнения (3.6) находим $\nu na^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta}=\gamma^{-1}(n)Y+(1-\eta)Y_\eta$. Следовательно,

$$\nu a^{-\delta(n)}\frac{1-n}{n}Y^{-\delta(n)}Y_\eta^2+\nu(1-\eta)a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_{\eta\eta}-1=\nu a^{-\delta(n)}\frac{1-n}{n}Y^{-\delta(n)}Y_\eta^2+\frac{1}{n}(1-\eta)\frac{Y_\eta}{Y}-\frac{2n}{n+1}\le$$

$$\le\nu a^{-\delta(n)}\frac{1-n}{n}K_2^{-\delta(n)}K_4^2+\frac{1}{n}(1-\eta)\frac{Y_\eta}{Y}-\frac{2n}{n+1}\le\nu a^{-\delta(n)}\frac{1-n}{n}K_2^{\gamma(n)}\frac{4n^2}{(n+1)^2}+\frac{1}{n}(1-\eta)\frac{Y_\eta}{Y}-\frac{2n}{n+1}=$$

$$=\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n}(1-\eta)\frac{Y_\eta}{Y}-\frac{2n}{n+1}\le-\frac{1}{n}\frac{K_3}{K_2}+2\Bigl(\frac{1-n}{1+n}\Bigr)=\frac{2(1-n)}{n+1}\Bigl[1-\frac{1}{n+1+2\delta_1}\frac{(1+\delta_1)^{1/(n+1)}}{(1-n)^{1/(n+1)}}\Bigr]<$$

$$<\frac{2(1-n)}{n+1}\Bigl[1-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\delta_1)^{1/\gamma(n)}(1-n)^{1/(n+1)}}\Bigr]<\frac{2(1-n)}{n+1}\Bigl[1-\frac{1}{2}\frac{1}{((1+\delta_1)(1-n))^{1/(n+1)}}\Bigr]\le 0,$$

если $2^{n+1}(1-n)(1+\delta_1)\le 1$. При этом условии, достаточно большом $\gamma>0$, $\tau\le\tau_1$ и достаточно малом τ_1 коэффициент при $W^2(\tau,\xi,\eta)$ в неравенстве (3.22) отрицателен. Значит, $W\equiv 0$ в Ω и $w_1\equiv w_2$. Теорема 1 доказана.

4. Основной результат. Теорему о разрешимости задачи (1.1), (1.2) можно вывести из теоремы 1, обращая преобразование (2.1), (2.2) по формуле

$$y=\frac{t^{1/n}}{x^{(n-1)/(n(n+1))}U^{-\delta(n)}}\int\limits_0^{u/U}\frac{ds}{w^{1/n}(t^{1/\gamma(n)},x,s)}$$

аналогично тому, как это сделано в [3].

Теорема 2. *Пусть* $U(t,x) = txV(t,x)$, $v_0(t,x) = x^{(n-1)/(n+1)}v_1(t,x)$, $V(t,x) > 0$, *функции* $V(t,x)$, $V_x(t,x)$, V_t/V, $v_1(t,x)$ *имеют ограниченные производные первого порядка по* t *и* x, $V(0,x) = a = \text{const} > 0$, $V_x(t,x) \to 0$ *при* $t \to 0$. *Тогда в области* D *при* $T = \tau_1^{\gamma(n)}$ *существует решение задачи (1.1), (1.2), обладающее следующими свойствами:* u/U *и* $u_y^n/x^{2/\gamma(n)}V(t,x)$ *непрерывны и ограничены в* D, $u > 0$ *при* $tx > 0$, $u_y^n/x^{2/\gamma(n)}V(t,x) > 0$ *при* $t > 0$, $u_y \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy}, u_t, v_y *ограничены и непрерывны по* y; $tu_y^{n-2}u_{yy}/x^{(n-1)/(n+1)}V(t,x)$, v *непрерывны в* D *по* y *и ограничены при ограниченных* y. *Имеют место неравенства*

$$t^{1/\gamma(n)}Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-\alpha t^{1/\gamma(n)}} \le \frac{u_y^n}{x^{2/\gamma(n)}V(t,x)} \le t^{1/\gamma(n)}Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{\alpha t^{1/\gamma(n)}},$$

$$t^{1/\gamma(n)}Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{\beta t^{1/\gamma(n)}} \le \frac{tnu_y^{n-2}u_{yy}}{x^{(n-1)/(n+1)}V(t,x)} \le t^{1/\gamma(n)}Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-\beta t^{1/\gamma(n)}},$$

$$-K_7 \le \frac{nt}{V^{1/n}}((n-2)u_y^{n-3}u_{yy}^2 + u_y^{n-2}u_{yyy}) \le -K_8,$$

$$\left(1 + K_2^{1/n}\frac{1-n}{1+n}x^{(n-1)/(n(n+1))}t^{-1/(n(n+1))}U^{-\delta(n)}\exp\{(\alpha/n)t^{1/\gamma(n)}\}y\right)^{(n+1)/(n-1)} \le 1 - \frac{u}{U} \le$$

$$\le \left(1 + K_1^{1/n}\frac{1-n}{1+n}x^{(n-1)/(n(n+1))}t^{-1/(n(n+1))}U^{-\delta(n)}\exp\{-(\alpha/n)t^{1/\gamma(n)}\}y\right)^{(n+1)/(n-1)}.$$

Для достаточно больших y *справедливо асимптотическое равенство*

$$1 - \frac{u}{U} = \Phi^{(n+1)/(n-1)}(t,x,y) + O\left(\frac{\ln\Phi(t,x,y)}{\Phi(t,x,y)}\right),$$

где

$$\Phi(t,x,y) = 1 + \frac{1-n}{1+n}\left(\frac{(n+1)a^{\delta(n)}}{2(1-n)\nu n}\right)^{1/(n+1)}x^{(n-1)/(n(n+1))}t^{-1/(n(n+1))}U^{-\delta(n)}(1 + O(t^{n/(n+1)}))y.$$

При $2^{n+1}(1-n)(1+\delta_1) \le 1$, *где* δ_1 *– некоторая постоянная,* $0 < \delta_1 < 1$, *решение задачи (1.1), (1.2), обладающее указанными свойствами, единственно.*

Условию, при котором доказана единственность решения, удовлетворяют показатели $n \ge 0.7$. Мы полагаем, что утверждение верно и при всех $n > 0.5$, но это ограничение уже существенно и не может быть ослаблено без дополнительных предположений относительно свойств функций U и v_0.

Результаты данной работы обобщаются на случаи $V(0,x) = a(x) \ne \text{const}$ и $U(t,x) = t^N U_1(1,x)$, $N > 1$, $U_1(t,x) > 0$ при $tx > 0$ лишь с некоторыми усложнениями технического характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blasius H.* // ZAMP. 1908. V. 56. № 1. P. 1–37.
2. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М., 1962.
3. *Олейник О.А.* // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. № 5. С. 1199–1220.
4. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М., 1997.

Московский государственный
университет печати

Поступила в редакцию
10.10.2002 г.