



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Иванов, Критерии проверки гипотез по выборке из распределения со случайными параметрами, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 4, 104–118

DOI: 10.4213/dm444

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

19 марта 2025 г., 02:46:01



УДК 519.2

Критерии проверки гипотез по выборке из распределения со случайными параметрами

© 1998 г. В. А. Иванов

Получены асимптотические оценки мощности оптимального критерия проверки континуальных гипотез по выборке из распределения, зависящего от случайного параметра.

1. Введение

Рассмотрим измеримое пространство (X, \mathcal{F}) и семейство вероятностных распределений $\{P_\nu(A), A \in \mathcal{F}, \nu \in N\}$ на нем. Далее для определенности будем полагать, что пространство элементарных событий X является подмножеством действительной прямой \mathbf{R} , множество N значений параметра принадлежит q -мерному действительному пространству \mathbf{R}^q и что распределение $P_\nu(A)$ при всех $\nu \in N$ абсолютно непрерывно относительно некоторой σ -конечной меры $\mu(x)$ на \mathcal{F} и может быть задано с помощью плотности $p_\nu(x)$ по формуле

$$P_\nu(A) = \int_A p_\nu(x) d\mu(x). \quad (1)$$

Попутно заметим, что если в качестве меры $\mu(x)$ использовать меру Лебега на прямой, то распределения $P_\nu = P_\nu(A)$ будут принадлежать классу абсолютно непрерывных распределений, если в качестве меры $\mu(x)$ использовать считающую меру, то получим класс дискретных распределений.

Будем рассматривать случайные векторы

$$X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

в схеме серий. Значения, принимаемые случайным вектором $X^{(n)}$, будем обозначать символом $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$. Для каждого натурального n введем дискретную случайную величину ζ_n , принимающую значения ν из некоторого множества $N_n \subseteq N$ с вероятностями

$$P(\zeta = \nu) = \delta_n(\nu), \quad \sum_{\nu \in N_n} \delta_n(\nu) = 1.$$

Рассмотрим несколько гипотез относительно распределения $P^{(n)}$ выборки $X^{(n)}$, состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин. В этом

случае плотность распределения выборки $X^{(n)}$ однозначно определяется плотностью распределения любого ее элемента X_t , $t = 1, \dots, n$. Для простоты записи индекс номера серии n в обозначениях иногда будем опускать. В дальнейшем будем предполагать, что область N_n значений параметра ν содержит значение $\nu = 0$.

Обозначим H_0 гипотезу, задаваемую плотностью $p(x) = p_0(x)$ распределения случайной величины X_t , $t = 1, \dots, n$, H_ν , $\nu \in N$, гипотезу, задаваемую плотностью $p(x) = p_\nu(x)$, и H_δ гипотезу, задаваемую плотностью

$$p_\delta(x) = \sum_{\nu \in N_n} \delta(\nu) p_\nu(x)$$

распределения случайной величины X_t , $t = 1, \dots, n$, являющейся смесью плотностей распределения $p_\nu(x)$, $\nu \in N_n$, относительно меры $\delta(\nu)$.

Наряду с упомянутыми выше простыми выборками, которым соответствуют последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, будем рассматривать также выборки из условно независимых распределенных. Для реализации таких выборок сначала из генеральной совокупности с распределением $\delta_n(\nu)$ выбирается параметр распределения $\zeta_n = \nu$, после чего реализуется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых распределена по закону \mathbf{P}_ν . В этом случае плотность распределения выборки $X^{(n)}$ представляется в виде смеси плотностей совместных распределений

$$p_\delta(x^{(n)}) = \sum_{\nu \in N} \delta_n(\nu) p_\nu(x_1) \dots p_\nu(x_n)$$

случайных величин X_1, \dots, X_n по распределению $\delta_n(\nu)$. Гипотезу, определяемую описанным выше распределением вероятностей выборки $X^{(n)}$, будем обозначать $H(\delta)$. Цель работы состоит в нахождении асимптотических оценок вероятностных характеристик критерия отношения правдоподобия проверки гипотез H_0 и $H(\delta)$ при условии, что $\zeta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ таким образом, что распределение нормированного параметра $\sigma = \zeta_n^{1/2}$, принимающего значения γ из множества Γ , задаваемое плотностью $\pi_n(\gamma)$, сходится к распределению с плотностью $\pi(\gamma)$. Гипотезы H_ν и $H(\delta)$ будем также обозначать символами H_γ и $H(\pi)$ соответственно.

2. Предельные распределения статистики отношения правдоподобия

Исследуем оптимальный критерий проверки контигуальных [4] гипотез типа H_0 против H_ν , H_δ . Известно, что таким критерием является критерий отношения правдоподобия (КОП).

Определим статистики отношения правдоподобия (ОП) $R_\nu(X^{(n)})$ и логарифма отношения правдоподобия (ЛОП) $L_\nu(X^{(n)})$ для простых выборок, полагая

$$R_\nu(X^{(n)}) = \begin{cases} p_\nu(X^{(n)})/p_0(X^{(n)}), & \text{если } p_0(x^{(n)}) > 0, \\ 0, & \text{если } p_0(x^{(n)}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $p_\nu(X^{(n)}) = p_\nu(X_1) \dots p_\nu(X_n)$,

$$L_\nu(X^{(n)}) = \begin{cases} \ln(p_\nu(X^{(n)})/p_0(X^{(n)})) = \sum_{t=1}^n \ln(p_\nu(X_t)/p_0(X_t)), & \text{если } p_0(x^{(n)}) > 0, \\ -\infty, & p_0(x^{(n)}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Полагая $e^{-\infty} = 0$ и $\ln 0 = -\infty$, получаем соотношение

$$R_\nu(X^{(n)}) = e^{L_\nu(X^{(n)})}. \quad (4)$$

При оценивании размера (вероятности ошибки первого рода) критерия следует иметь в виду, что вероятностные характеристики статистик $R_\nu(X^{(n)})$ и $L_\nu(X^{(n)})$ при условии, что верна гипотеза H_0 , не изменяются при различных заданиях этих статистик в области $\{x^{(n)} : p_0(x^{(n)}) = 0\}$.

Прежде чем перейти к исследованию асимптотических характеристик оптимального критерия, заметим, что из абсолютной непрерывности распределения \mathbf{P}_α при всех $\alpha \in \Lambda$ относительно некоторой σ -конечной меры $\mu(x)$ на \mathcal{F} следует абсолютная непрерывность распределения $\mathbf{P}_\alpha^{(n)}$ вектора $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ с независимыми координатами по отношению к прямому n -произведению мер $\mu(x)$ на $\mathcal{F} = \mathcal{F} \times \dots \times \mathcal{F}$. При этом плотность распределения вероятностей $\mathbf{P}_\alpha^{(n)}$ будет иметь вид $p_\alpha(x_1) \dots p_\alpha(x_n)$.

Определение 1. ([1]) Семейство вероятностных мер $\{\mathbf{P}_\alpha^{(n)}, \alpha \in \Lambda \subset \mathbf{R}^q\}$ на \mathcal{F} называется локально асимптотически нормальным (ЛАН) в точке β , $\beta \in \Lambda$, если логарифм отношения правдоподобия, равный

$$L(x^{(n)}) = \ln \prod_{t=1}^n \frac{p_\alpha(x_t)}{p_\beta(x_t)}$$

при

$$\prod_{t=1}^n p_\beta(x_t) \neq 0,$$

и принимающий произвольное значение, если это произведение равно нулю, может быть при $\alpha = \beta + \gamma n^{-1/2}$, $\gamma \in \Gamma$, представлен в виде

$$L(X^{(n)}) = L_\gamma(X^{(n)}) = \gamma Q'_n(X^{(n)}) - \frac{1}{2} \gamma B \gamma' + \eta_n, \quad (5)$$

где

$$Q_n(X^{(n)}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n h(X_t), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbf{R}^q,$$

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$ — вектор-функция такая, что ее математическое ожидание равно

$$\int h_j(x) p_\beta(x) d\mu(x) = 0, \quad j = 1, \dots, q, \quad (6)$$

моменты

$$b_{ij} = \int h_i(x) h_j(x) p_\beta(x) d\mu(x) \quad (7)$$

конечны и образуют положительно определенную матрицу $B = \|b_{ij}\|$ порядка q , знак штрих означает транспонирование матрицы, а $\{\eta_n = \eta_{\gamma n}(X^{(n)})\}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю по вероятностной мере $\mathbf{P}_\beta^{(n)}$ равномерно по $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ на каждом компакте из \mathbf{R}^q .

Далее символом $\mathbf{L}_\alpha(\xi)$ будем обозначать распределение случайной величины ξ при условии, что справедлива гипотеза H_α , $\alpha \in \Lambda$, и в случае

$$\Lambda = N, \quad \alpha = \nu = \gamma n^{-1/2} \in N$$

в обозначениях распределений, гипотез и статистик наряду с индексом ν будем употреблять индекс γ .

В силу центральной предельной теоремы распределение случайного вектора

$$Q_n(X^{(n)}) = n^{-1/2}(h(X_1) + \dots + h(X_n)) \quad (8)$$

при $\alpha = \beta$ ($\gamma = 0$) слабо сходится к многомерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей B :

$$\mathbf{L}_\beta\{Q_n(X^{(n)})\} \rightarrow \mathbf{N}(0, B).$$

При обычных условиях регулярности

$$h_j(x) = \frac{d}{d\alpha_j} \ln p_\alpha(x)|_{\alpha=\beta}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q), \quad j = 1, \dots, q.$$

В частности, при $q = 1$ функция $h(x)$ в представлении (5) должна иметь конечный отличный от нуля второй момент

$$\mathbf{E}_0 h^2(X_t) = b > 0.$$

Практические ситуации, в которых параметр b принимает нулевое значение, исследовались в [5].

В [2] и [3] найдены необходимые и достаточные условия ЛАН в точке $\beta = 0$. В этом случае разложение (5) принимает вид

$$L_\gamma(X^{(n)}) = \gamma Q'_n(X^{(n)}) - b_\gamma/2 + \eta_n(X^{(n)}),$$

где

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) = \nu n^{1/2} \in \Gamma \subset \mathbf{R}$$

— нормированный параметр семейства распределений, причем множество нормированных параметров Γ содержит точку $\gamma = 0$,

$$b_\gamma = \gamma B \gamma', \quad h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$$

— некоторая вектор-функция,

$$Q_n(X^{(n)}) = n^{-1/2}(h(X^{(n)}) + \dots + h(X^{(n)})),$$

$\eta_n(X^{(n)}) \rightarrow 0$ по вероятности \mathbf{P}_0 равномерно на любом компакте $\Gamma^* \subset \Gamma$ из \mathbf{R}^q .

Сначала сформулируем условия, достаточные для выполнения ЛАН в точке $\beta = 0$. Следуя [3], рассмотрим более общую схему.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — произвольное множество параметров, содержащее точку $\gamma = 0$, и $\{h_\gamma(x), \gamma \in \Gamma\}$ — семейство действительных функций на прямой \mathbf{R} . Предположим, что плотность распределения элемента X_t выборки $X^{(n)}$ представима в области $p_0(x) > 0$ в виде

$$p_{n\gamma}(x) = p_0(x)(1 + n^{-1/2}h_\gamma(x) + r_{n\gamma}(x)), \quad (9)$$

при этом для любых $\gamma \in \Gamma$ имеют место соотношения

$$\mathbf{E}_0 h_\gamma(X_t) = 0, \quad \mathbf{D}_0 h_\gamma(X_t) = b(\gamma), \quad 0 < b(\gamma) < \infty, \quad (10)$$

и при $n \rightarrow \infty$ по мере \mathbf{P}_0

$$\sum_{t=1}^n r_{n\gamma}(X_t) \rightarrow 0 \quad (11)$$

равномерно по $\gamma \in \Gamma^*$ для любого множества $\Gamma^* \subset \Gamma$, для которого семейство функций $\{h_\gamma(X_t), \gamma \in \Gamma^*\}$ относительно компактно в пространстве L_0^2 измеримых функций с интегрируемым квадратом по вероятностной мере \mathbf{P}_0 .

Теорема 1. Пусть плотность распределения $p_{n\gamma}(x)$, $\gamma \in \Gamma$, представима в форме (9) и выполняются условия (10) и (11). Тогда

$$L_\gamma(X^{(n)}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n h_\gamma(X_t) - \frac{1}{2}b_\gamma + \eta_n(X^{(n)}), \quad (12)$$

где $\eta_n(X^{(n)}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по мере \mathbf{P}_0 равномерно по $\gamma \in \Gamma^*$ для каждого множества $\Gamma^* \subset \Gamma$, для которого семейство функций $\{h_\gamma(X_t), \gamma \in \Gamma^*\}$ относительно компактно в пространстве L_0^2 .

Доказательство. Прежде всего заметим, что в [3] доказана справедливость разложения (12) для случая, когда в качестве плотности при нулевой гипотезе рассматривается плотность равномерного на отрезке $[0,1]$ распределения, а плотность распределения близкой альтернативы представляется на отрезке $[0,1]$ в виде

$$p_{n\gamma} = p_0(x)(1 + n^{-1/2}h_\gamma(x) + r_{n\gamma}(x)).$$

Это доказательство без каких-либо существенных изменений переносится на более общий случай, когда в качестве распределения вероятностей при нулевой гипотезе используется произвольное распределение, абсолютно непрерывное относительно некоторой σ -конечной меры $\mu(x)$ на \mathcal{F} и может быть задано с помощью плотности $p_0(x)$, а плотность $p_{n\gamma}(x)$ имеет вид (9).

В настоящей статье мы ограничимся исследованием предельного распределения логарифма отношения правдоподобия в предположении, что функция $h_\gamma(x)$ в (9) может быть записана в виде $h_\gamma(x) = \gamma h'(x)$.

Теорема 2. Пусть плотность распределения элемента X_t выборки $X^{(n)}$ представима в области $p_0(x) > 0$ в виде

$$p_{n\gamma}(x) = p_0(x)(1 + n^{-1/2}h_\gamma(x) + r_{n\gamma}(x)), \quad (13)$$

причем для любых $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} h_\gamma(x) &= \gamma h'(x), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbf{R}^q, \\ h(x) &= (h_1(x), \dots, h_q(x)), \\ \mathbf{E}_0 h_\gamma(X_t) &= \gamma \mathbf{E}_0 h'(X_t) \quad \mathbf{E}_0 h_\gamma^2(X_t) = \mathbf{E}_0 \gamma h'(X_t) h(X_t) \gamma' = \gamma B \gamma' = b(\gamma), \end{aligned}$$

где $B = \mathbf{E}_0 h'(X_t) h(X_t)$ — положительно определенная матрица порядка q ,

$$\mathbf{E}_0 h'(X_t) = 0, \quad 0 < b(\gamma) = \gamma B \gamma' < \infty, \quad (14)$$

$$\sum_{t=1}^n r_{n\gamma}(X_t) \rightarrow 0 \quad (15)$$

при $n \rightarrow \infty$ по мере \mathbf{P}_0 равномерно по $\gamma \in \Gamma^*$ для любого компакта $\Gamma^* \subset \Gamma$.

Тогда справедливо разложение

$$L_\gamma(X^{(n)}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \gamma h'(X_t) - \frac{1}{2} \gamma B \gamma' + \eta_n(X^{(n)}), \quad (16)$$

где $\eta_n(X^{(n)}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по мере \mathbf{P}_λ равномерно по $\gamma \in \Gamma^*$ для любого компакта $\Gamma^* \subset \Gamma$ и любого фиксированного значения параметра $\lambda \in \Gamma$.

Доказательство. В теореме 1 рассмотрен случай $\lambda = 0$. Докажем теперь, что разложение (16) справедливо для произвольного значения параметра λ из множества Γ .

Сначала убедимся в том, что вероятностные меры $\mathbf{P}_{n\lambda}$ и $\mathbf{P}_{n\gamma}$, задаваемые плотностями $p_{n\lambda}$ и $p_{n\gamma}$ соответственно, контигуальны. Для этого предварительно покажем, что вероятностные меры \mathbf{P}_0 и $\mathbf{P}_{n\gamma(n)}$ контигуальны при любом выборе последовательности $\gamma(n)$ из произвольного компакта $\Gamma^* \subset \Gamma \subset \mathbf{R}^q$. Далее в обозначениях $\mathbf{P}_{n\lambda}$ и $\mathbf{P}_{n\gamma}$ индекс n будем опускать.

Вспользуемся критерием S_3 из [4], стр. 20. Прежде всего заметим, что последовательность распределений $\mathbf{L}_0(L_n)$ логарифма отношения правдоподобия относительно компактна по отношению к слабой сходимости вероятностных распределений. Действительно, пусть последовательность $\{\gamma(l), l \in \{n\} = \{1, 2, \dots\}\}$ принадлежит произвольному фиксированному компакту $\Gamma^* \subset \Gamma$ и $\{m\}$ — подпоследовательность, произвольным образом выбранная из последовательности $\{n\}$. По свойству компактности из последовательности $\{m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{k\} \subset \{m\}$ так, что подпоследовательность $\{\gamma(l), l \in \{k\}\}$ сходится к некоторому значению $\gamma \in \Gamma^*$. Из (16) получаем, что $\eta_{\gamma(k)}(X^{(n)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ по мере \mathbf{P}_0 и

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \gamma(k) h'(X_t)$$

слабо сходится при $k \rightarrow \infty$ с учетом того, что $\gamma(k) \rightarrow \gamma$ и $\gamma(k) B \gamma'(k) \rightarrow \gamma B \gamma'$, к нормальному распределению $\mathbf{N}(-b(\gamma)/2, b(\gamma))$. Следовательно, семейство вероятностных распределений относительно компактно по отношению к слабой сходимости распределений.

Проверим теперь второе условие критерия S_3 . Из (16) и того, что

$$\mathbf{L}_0(L_n(X^{(n)})) \rightarrow \mathbf{N}(-b_\gamma/2, b_\gamma),$$

следует справедливость цепочки соотношений

$$F_n(z) = \mathbf{P}_0(R(X^{(n)}) \leq z) = \mathbf{P}_0(L_n(X^{(n)}) \leq \ln z) \rightarrow F(z) = \Phi((\ln z + b_\gamma/2)/(b_\gamma)^{1/2}),$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией.

Принимая во внимание, что

$$\int z dF(z) = \exp\{-b_\gamma/2 + b_\gamma/2\} = 1,$$

убеждаемся в справедливости утверждения о контигуальности вероятностных мер \mathbf{P}_0 и $\mathbf{P}_{\gamma(n)}$, откуда следует справедливость утверждения о контигуальности вероятностных мер \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_γ , а следовательно, и вероятностных мер \mathbf{P}_λ и \mathbf{P}_γ для любых фиксированных λ и γ из множества Γ .

В [4] доказано, что если последовательности вероятностных мер \mathbf{P}_λ и \mathbf{P}_γ контигуальны, то для любой последовательности случайных величин ξ_n при выполнении условия $\xi_n \rightarrow 0$ по вероятностной мере \mathbf{P}_γ выполняется условие $\xi_n \rightarrow 0$ по вероятностной мере \mathbf{P}_λ и наоборот.

Таким образом, в условиях теоремы 2 из сходимости $\eta_\gamma(X^{(n)}) \rightarrow 0$ следует, что $\eta_\gamma(X^{(n)}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по мере \mathbf{P}_λ при любых γ и λ из множества Γ .

Покажем теперь, что остаточный член $\eta_\gamma(X^{(n)})$ сходится к нулю по мере \mathbf{P}_λ равномерно по γ на любом компактном подмножестве Γ^* множества параметров Γ .

Предположим, что это не так. Тогда найдутся положительные числа ε и δ , подпоследовательность $\{m\}$ последовательности $\{n\}$ и последовательность $\gamma(m) \in \Gamma^*$ такие, что для всех m

$$\mathbf{P}_\lambda(|\eta_{\gamma(m)}(X^{(n)})| \geq \varepsilon) \geq \delta.$$

В силу компактности множества Γ^* найдется подпоследовательность $\{r\}$ последовательности $\{m\}$ такая, что $\gamma(r) \rightarrow \gamma^*$. В силу контигуальности последовательностей \mathbf{P}_0 и $\mathbf{P}_{\gamma(r)}$ из сходимости $\eta_{\gamma(r)}(X^{(n)}) \rightarrow 0$ по мере \mathbf{P}_0 следует, что $\eta_{\gamma(r)}(X^{(n)}) \rightarrow 0$ по мере \mathbf{P}_λ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит сделанному выше допущению. Таким образом, теорема доказана.

Напомним, что распределение произвольной случайной величины ξ при справедливости гипотезы H_λ обозначается символом $\mathbf{L}_\lambda(\xi)$. Ковариацию случайных величин $h_\gamma(X_t)$ и $h_\lambda(X_t)$ для произвольных значений параметров γ и λ , принадлежащих множеству Γ , обозначим

$$b(\gamma, \lambda) = \mathbf{E}_0 h_\gamma(X_t) h'_\lambda(X_t).$$

Далее будем изучать обычно встречающуюся в приложениях ситуацию, когда $r_{n\gamma}(x) \equiv 0$.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 2, $r_{n\gamma}(x) \equiv 0$ и

$$|\mathbf{E}_0 h_\lambda(X_t) h_\gamma^2(X_t)| < \infty, \quad \lambda, \gamma \in \Gamma,$$

то распределение статистики ЛОП сходится равномерно по параметру γ , принадлежащему произвольному компактному $\Gamma^* \subset \Gamma$, к нормальному распределению со средним $b(\gamma, \lambda) - b(\gamma)/2$ и дисперсией $b(\gamma)$:

$$\mathbf{L}_\lambda(L_\gamma(X^{(n)})) \rightarrow \mathbf{N}(b(\gamma, \lambda) - b(\gamma)/2, b(\gamma)). \quad (17)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (16). Статистика $Q_\gamma(X^{(n)})$ при фиксированных γ и λ представляет собой сумму независимых одинаково распределенных случайных величин. Поэтому ее распределение сходится к нормальному распределению со средним $\mathbf{E}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) = b(\gamma, \lambda)$ и дисперсией $\mathbf{D}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) = b(\gamma)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\lambda n^{-1/2} h_\gamma(X_t) &= n^{-1/2} \mathbf{E}_0 h_\gamma(X_t) (1 + n^{-1/2} h_\lambda(X_t)) = n^{-1} b(\gamma, \lambda), \\ \mathbf{E}_\lambda n^{-1} h_\gamma^2(X_t) &= n^{-1} \mathbf{E}_0 h_\gamma^2(X_t) (1 + n^{-1/2} h_\lambda(X_t))^2 = n^{-1} b(\gamma) (1 + O(n^{-1/2})).\end{aligned}$$

Из этих соотношений непосредственно вытекает (17).

Заметим, что в случае $q = 1$ и $h_\gamma(x) = \gamma h(x)$ получаем, что

$$b(\gamma, \lambda) = \gamma \lambda b, \quad b(\gamma) = \gamma^2 b,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{E}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) \rightarrow \gamma(\lambda - \gamma/2)b, \quad \mathbf{D}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) \rightarrow \gamma^2 b$$

и

$$\mathbf{L}_\lambda(L_\gamma(X^{(n)})) \rightarrow \mathbf{N}(-\gamma^2 b/2 + \gamma \lambda b, \gamma^2 b).$$

Далее исследуется важный для практических приложений случай $h_\gamma(x) = \gamma h(x)$. В этом случае для того, чтобы последовательность $\{h_\gamma(x) = \gamma h(x), \gamma \in \Gamma^*\}$ была относительно компактна, достаточно потребовать компактности множества Γ^* .

3. Асимптотические характеристики оптимального критерия

Пусть $q = 1$ и при $n \rightarrow \infty$ распределение $\pi_n(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_n \subset [-A, A]$, параметра $\sigma_n = n^{1/2} \zeta_n \in \Gamma_n$ слабо сходится к распределению $\pi(\gamma)$, в этом случае будем писать $\pi_n(\gamma) \Rightarrow \pi(\gamma)$. Напомним, что введенное ранее распределение $\delta_n(\nu)$ случайной величины ζ_n связано с распределением $\pi_n(\gamma)$ случайной величины σ_n соотношением $\delta_n(\nu) = \pi_n(\nu n^{1/2})$. Символ $\mathbf{N}(0, 1)$ обозначает стандартное нормальное распределение.

Теорема 3. Пусть носитель Γ_n меры $\pi_n(\gamma)$ принадлежит отрезку $[-A, A]$ для всех достаточно больших значений n и $\pi_n(\gamma) \Rightarrow \pi(\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда распределение статистики $R_\pi(X^{(n)})$ критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$ при справедливости гипотезы H_λ слабо сходится к распределению случайной величины

$$f_\lambda(x) = \int \exp\{-\gamma^2 b/2 + \gamma \lambda b + \gamma x b^{1/2}\} d\pi(\gamma), \quad (18)$$

где $\mathbf{L}(x) = \mathbf{N}(0, 1)$.

Доказательство. Запишем статистику отношения правдоподобия

$$R_\pi(X^{(n)}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \pi_n(\gamma) e^{L_\gamma(X^{(n)})},$$

с учетом (16) и (17) в виде интеграла Лебега

$$R_\pi(X^{(n)}) = \int_{\Gamma_n} R_\gamma(X^{(n)}) d\pi_n(\gamma), \quad (19)$$

где

$$R_\gamma(X^{(n)}) = e^{L_\gamma(X^{(n)})} = \exp\{\gamma b^{1/2} \varkappa_n + \gamma \lambda b - \gamma^2 b/2 + \eta_n^*(X^{(n)})\},$$

$\eta_n^*(X^{(n)}) \rightarrow 0$ по мере \mathbf{P}_λ ,

$$\varkappa_n = \varkappa_n(X^{(n)}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n h_\gamma(X_t).$$

По предположению последовательность мер $\pi_n(\gamma)$, заданных на множествах Γ_n , слабо сходится к мере $\pi(\gamma)$, определенной на отрезке $[-A, A]$ действительной прямой \mathbf{R} .

Введем обозначение

$$g_{\gamma\lambda}(x) = \exp\{-\gamma^2 b/2 + \gamma \lambda b + \gamma b^{1/2} x\}.$$

Для любого заранее заданного положительного ε найдем C и натуральное n_0 такие, что при $n \geq n_0$

$$\mathbf{P}_\lambda(|\varkappa_n| \leq C) \geq 1 - \varepsilon.$$

При наступлении этого события функция $g_{\gamma\lambda}(x)$, порождающая случайную величину $g_{\gamma\lambda}(\varkappa_n)$, будет непрерывной и ограниченной. Поэтому справедливо соотношение

$$\int \exp\{-\gamma^2 b/2 + \gamma \lambda b + \gamma x b^{1/2}\} d\pi_n(\gamma) \rightarrow \int g_{\gamma\lambda}(x) d\pi(\gamma). \quad (20)$$

Учитывая равномерную по γ на компакте $[-A, A]$ сходимость по вероятности к нулю случайных величин $\eta_n^*(X^{(n)})$ и сходимость интегралов (20), убеждаемся в справедливости утверждения (18) теоремы.

Исследуем свойства функции

$$f_\lambda(x) = \int g_{\gamma\lambda}(x) d\pi(\gamma). \quad (21)$$

При $\lambda = 0$ полагаем $f_0(x) = f(x)$. Производные функции $f_\lambda(x)$ по x имеют вид

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= b^{1/2} \int \gamma g_{\gamma\lambda}(x) d\pi(\gamma), \\ f''_\lambda(x) &= b \int \gamma^2 g_{\gamma\lambda}(x) d\pi(\gamma). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) следует, что при $\pi(0) \neq 1$ функция $f_\lambda(x)$ выпукла вверх при любом действительном x .

Обозначим Π_1, Π_2, Π_3 семейства распределений π , для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\pi: \pi(\gamma \leq 0) = 0\}, \\ \Pi_2 &= \{\pi: \pi(\gamma \geq 0) = 0\}, \\ \Pi_3 &= \{\pi: \pi(\gamma < 0)\pi(\gamma > 0) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Из (22) следует, что для распределений, принадлежащих множеству Π_1 , функция $f_\lambda(x)$ монотонно возрастает, для распределений, принадлежащих Π_2 , функция $f_\lambda(x)$ монотонно убывает, а для распределений, принадлежащих Π_3 , функция $f_\lambda(x)$ сначала монотонно убывает, а с некоторого момента начинает монотонно возрастать. Поэтому уравнение $f_\lambda(x) = C$ для любой константы C , для которой выполняется соотношение $C > \inf_x f_\lambda(x)$, имеет единственное решение $x_{1\lambda}(C)$, если $\pi \in \Pi_1$, $x_{2\lambda}(C)$, если $\pi \in \Pi_2$, и имеет два решения $x_{3\lambda}(C)$ и $x_{4\lambda}(C)$, если $\pi \in \Pi_3$. При этом область значений $\{x: f_\lambda(x) > C\}$ имеет вид $\{x: x > x_{1\lambda}(C)\}$ для $\pi \in \Pi_1$, вид $\{x: x < x_{2\lambda}(C)\}$ для $\pi \in \Pi_2$ и $\{x: x < x_{3\lambda}(C)\} \cup \{x: x > x_{4\lambda}(C)\}$ для $\pi \in \Pi_3$.

Теорема 4. Пусть размер критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$, $\pi \in \Pi_1$, стремится при $n \rightarrow \infty$ к α . Тогда предельная при $n \rightarrow \infty$ мощность критерия может быть определена по формуле

$$\beta(\alpha) = 1 - \int \Phi(f_\lambda^{-1}(f(u_\alpha))) d\pi(\lambda). \quad (23)$$

Доказательство. Пусть $C_n(\alpha) = \inf\{C: \mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C) \leq \alpha\}$ — граница критической области критерия размера α , основанного на статистике $R_\pi(X^{(n)})$, $\pi \in \Pi_1$, $C_n(\alpha) \rightarrow C(\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$, \varkappa — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, u_α — верхняя α -квантиль стандартного нормального распределения. Тогда из того, что

$$\mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \rightarrow \mathbf{P}_0(f_0(\varkappa) > C(\alpha))$$

при $n \rightarrow \infty$, следует, что

$$C(\alpha) = f_0(u_\alpha) = f(u_\alpha).$$

Предельная мощность критерия определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\pi(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) &= \sum_\lambda \pi_n(\lambda) \mathbf{P}_\lambda(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \\ &\rightarrow 1 - \int \Phi(f_\lambda^{-1}(f(u_\alpha))) d\pi(\lambda). \end{aligned}$$

Случай $\pi \in \Pi_2$ рассматривается аналогично.

Теорема 5. Пусть размер критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$, $\pi \in \Pi_3$, стремится при $n \rightarrow \infty$ к α . Тогда предельная при $n \rightarrow \infty$ мощность критерия может быть определена по формуле

$$\beta(\alpha) = 1 + \int (\Phi(x_{3\lambda}(C(\alpha))) - \Phi(x_{4\lambda}(C(\alpha)))) d\pi(\lambda), \quad (24)$$

где $C(\alpha)$ — решение уравнения

$$\Phi(x_{30}(C)) + 1 - \Phi(x_{40}(C)) = \alpha. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть $C_n(\alpha) = \inf\{C: \mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C) \leq \alpha\}$ — граница критической области критерия размера α , основанного на статистике $R_\pi(X^{(n)})$, $\pi \in \Pi_3$,

$C_n(\alpha) \rightarrow C(\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$, \varkappa — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, u_α — верхняя *alpha*-квантиль стандартного нормального распределения. Тогда из того, что

$$\mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \rightarrow \mathbf{P}_0(f_0(\varkappa) > C(\alpha))$$

при $n \rightarrow \infty$, следует, что $C(\alpha)$ находится из уравнения (25).

Предельная мощность критерия размера α определяется по формуле

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda} \pi_n(\lambda) \mathbf{P}_\lambda(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \\ &= 1 + \int (\Phi(x_{3\lambda}(C(\alpha))) - \Phi(x_{4\lambda}(C(\alpha)))) d\pi(\lambda). \end{aligned}$$

4. Критерии проверки гипотез о случайных преобразованиях

Рассмотрим класс случайных преобразований, отображающих последовательность $\{Z_t, t = 1, \dots, n\}$ в последовательность $\{X_t, t = 1, \dots, n\}$. Пусть $g(x)$ — булева функция от ms аргументов $x = \{x_1, \dots, x_{ms}\} \in B^{ms}$, $B = \{0, 1\}$,

$$\Omega_m = \{\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_m)\}$$

— множество всех булевых функций от m аргументов $x_1, \dots, x_m \in B$,

$$\|\psi\| = \sum_x \psi(x)$$

— вес функции ψ ,

$$\Omega_m^* = \{\psi(x), \|\psi\| = 2^{m-1}\}$$

— множество всех равновероятных булевых функций от m аргументов, \oplus — знак сложения по модулю 2,

$$\Omega_{ms} = \{g = \psi(x_{11}, \dots, x_{1m}) \oplus \psi(x_{21}, \dots, x_{2m}) \oplus \dots \oplus \psi(x_{s1}, \dots, x_{sm})\}$$

— множество функций, являющихся линейными суперпозициями произвольных функций из множества Ω_m , $N = 2^m$, $\Delta = (2\|\psi\| - N)/N$, если $\psi \in \Omega_m$, и $\Delta_s = (2\|g\| - N^s)/N^s$, если $g \in \Omega_{ms}$, причем из вида функции g следует, что $\Delta_s = \Delta^s$, если $g \in \Omega_{ms}$.

Пусть $Z_t = (Z_{t1}, \dots, Z_{ts})$ — последовательность независимых случайных векторов, компоненты которых $Z_{tj} = (Z_{tj}^{(1)}, \dots, Z_{tj}^{(m)}) \in B^m$ имеют независимые равномерно распределенные координаты $Z_{tj}^{(k)}$, принимающие значения

$$z_{tj}^{(k)} \in B, \quad t = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, s, \quad k = 1, \dots, m,$$

а последовательность X_t образуется из Z_t с помощью булевой функции $g \in \Omega_{ms}$ по формуле

$$X_t = g(Z_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

Случайные величины X_t независимы между собой и распределены по закону

$$\mathbf{P}(X_t = u) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^u \Delta_g).$$

Предположим, что функция ψ извлекается из генеральной совокупности Ω_m с равными вероятностями независимо от реализации других случайных величин. Тогда функция распределения вероятностей случайной величины

$$\tau_N = \|\psi\|^* = 2(\|\psi\| - N/2)/N^{1/2} = (2\|\psi\| - N)/N^{1/2},$$

представляющей собой центрированный и нормированный вес случайной функции ψ , при $N \rightarrow \infty$ сходится к функции распределения стандартного нормального распределения. При этом распределение случайного параметра $\Delta_g = (\|\psi\|^*)^s/N^{s/2}$ при $N \rightarrow \infty$ и описанном выше случайном выборе функций ψ и g ведет себя как распределение случайной величины $\tau_N^s/N^{s/2}$, причем $\tau_N \rightarrow \varkappa$, $\tau_N^s \rightarrow \varkappa^s$ по распределению, где $\mathbf{L}\{\varkappa\} = \mathbf{N}(0, 1)$.

Рассмотрим следующий способ реализации выборки $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$. Сначала выбирается случайная функция g , что равносильно выбору случайного параметра Δ_g распределения случайного элемента выборки X_t , после чего реализуется сама выборка $X^{(n)}$. Пусть $n \rightarrow \infty$ и

$$\mathbf{P}(X_t = u) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^u \sigma_n/n^{1/2}).$$

В этом случае имеет место жесткая зависимость между случайными параметрами Δ_g и σ_n :

$$\Delta_g = \sigma_n/n^{1/2} = \tau_N^s/N^{s/2}, \quad \sigma_n = \tau_N^s(n/N^s)^{1/2}.$$

Ясно, что $\Delta_g = \tau_N^s/n^{1/2}$ при $n = N^s$.

Предположим, что относительно распределения выборки $X^{(n)}$ заданы гипотезы H_0 и H_1 . При гипотезе H_0 реализуется случайная последовательность $X_t = g(Z_t)$ с помощью функции $\psi(x)$, которая случайно и равновероятно выбирается из множества Ω_m^* , что соответствует значению параметра распределения $\zeta_n^* = 0$, при гипотезе H_1 реализуется случайная последовательность $X_t = g(Z_t)$ с помощью функции $\psi(x)$, которая случайно и равновероятно выбирается из множества Ω_m , что соответствует случайному выбору параметра σ_n из генеральной совокупности с заданным распределением $\pi_n(\gamma)$.

Пусть $N \rightarrow \infty$ и $n = a^2 N^s$, $a > 0$. Тогда

$$\Delta_g = \tau_N^s/N^{s/2} = a\tau_N^s/n^{1/2}$$

и используемые в разложении (9) величины имеют вид

$$p_0(x) = \frac{1}{2}, \quad h_\gamma(x) = \gamma h(x), \quad h(x) = a(-1)^{x+1}, \quad r_{n\gamma}(x) = 0.$$

Моменты случайной функции $h(X_t)$ при гипотезе H_0 равны

$$\mathbf{E}_0 h(X_t) = 0, \quad \mathbf{E}_0 h^2(X_t) = \mathbf{D}_0 h(X_t) = b = a^2.$$

Распределение $\pi_n(\gamma)$ задается в данном случае как распределение случайной величины τ_N^s при N , определяемом из соотношения $n = a^2 N^s$.

Изучим асимптотическое поведение статистики КОП при гипотезе H_0 . Прежде всего заметим, что статистику $R_\pi(X^{(n)})$ в рассматриваемом случае можно представить в виде $R_\pi(X^{(n)}) = f_n(\varkappa_n)$, где

$$f_n(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \pi_n(\gamma) q_{n\gamma}(x),$$

$$q_{n\gamma}(x) = \left(1 - \frac{\gamma^2}{n}\right)^{n/2} \left(\frac{1 + \gamma/n^{1/2}}{1 - \gamma/n^{1/2}}\right)^{xn^{1/2}/2},$$

$$\varkappa_n = \|X^{(n)}\|^* = 2(\|X^{(n)}\| - n/2)/n^{1/2},$$

$$\|X^{(n)}\| = X_1 + \dots + X_n.$$

Параметр γ принимает значения от $-n^{1/2}$ до $n^{1/2}$ через интервалы длины $2/n^{1/2}$. Положим

$$g_\gamma(x) = \exp\{-\gamma^2/2 + \gamma x\}.$$

Теорема 6. Пусть при $n \rightarrow \infty$ распределение $\pi_n(\gamma)$ слабо сходится к распределению $\pi(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{R}$. Тогда распределение статистики КОП $R_\pi(X^{(n)})$ проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$ при гипотезе H_0 и $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению случайной величины

$$f(x) = \int g_\gamma(x) d\pi(\gamma) = \int \exp\{-\gamma^2/2 + \gamma x\} d\pi(\gamma),$$

где x — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем C такое, что $\mathbf{P}_0(|\varkappa_n| > C) < \varepsilon$ при $\geq n_0$. Исследуем асимптотическое поведение функции $q_{n\gamma}(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в области $|x| \leq C$. Для этого разобьем область суммирования $|\gamma| \leq n^{1/2}$ на три подмножества

$$0 \leq |\gamma| \leq n^{1/7},$$

$$n^{1/7} < |\gamma| \leq \lambda n^{1/2},$$

$$\lambda n^{1/2} < |\gamma| \leq n^{1/2},$$

где λ — некоторая постоянная из интервала $1/2 < \lambda < 1$.

Для первой области справедливо разложение

$$\ln q_{n\gamma}(x) = \frac{1}{2}(n + xn^{1/2}) \ln(1 + \gamma/n^{1/2}) - \frac{1}{2}(n - xn^{1/2}) \ln(1 - \gamma/n^{1/2})$$

$$= -\gamma^2/2 + \gamma x + o(\gamma)$$

равномерно по x из отрезка $|x| \leq C$.

Во второй области, учитывая неравенства $-\ln(1 - z) \leq z/(1 - z)$ и $\ln(1 + z) \leq z$, справедливые при $z > 0$, находим, что

$$\ln q_{n\gamma}(x) = \frac{n}{2} \ln(1 - \gamma^2/n) + \frac{xn^{1/2}}{2} (\ln(1 + \gamma/n^{1/2}) - \ln(1 - \gamma/n^{1/2}))$$

$$\leq -\frac{\gamma^2}{2} + C\gamma + \frac{C\gamma}{1 - \gamma}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x из отрезка $|x| \leq C$.

В третьей области справедливы оценки

$$\begin{aligned} q_{n\gamma}(x) &= (1 + \gamma n^{-1/2})^{n/2 + xn^{1/2}/2} (1 - \gamma n^{-1/2})^{n/2 - xn^{1/2}/2} \\ &\leq 2^{n/2 + xn^{1/2}/2} (1 - \lambda)^{n/2 - xn^{1/2}/2} \\ &\leq 2(1 - \lambda)^{n/2} 2^{Cn^{1/2}/2} (1 - \lambda)^{-Cn^{1/2}/2}. \end{aligned}$$

Из последней оценки следует, что $q_{n\gamma}(x) \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $|x| \leq C$ при $\lambda > 1/2$.

Таким образом, в области $|x| \leq C$, в которую попадает случайная величина κ_n с вероятностью, не меньшей, чем $1 - \varepsilon$, функция $q_{n\gamma}(x)$ равномерно сходится к функции $g_\gamma(x)$, откуда следует утверждение теоремы.

Агалогичные оценки имеют место и в случае, когда справедлива гипотеза H_λ .

Исследуем вероятностные характеристики оптимального критерия проверки описанных выше гипотез H_0 и H_1 .

Лемма 1. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n = a^2 N^s$, $a > 0$, и функция $\psi(x)$ выбирается случайно и равномерно из множества Ω_m всех булевых функций от m аргументов. Тогда для $s = 2k + 1$, $k = 0, 1, \dots$, и $s = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, соответственно

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{1/s-1} \exp\{-\gamma^2 a^2/2 + \gamma \lambda a^2 + \gamma a x - \gamma^{2/s}/2\} d\gamma, \\ f_\lambda(x) &= \frac{2}{s\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \gamma^{1/s-1} \exp\{-\gamma^2 a^2/2 + \gamma \lambda a^2 + \gamma a x - \gamma^{2/s}/2\} d\gamma. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Если κ имеет стандартное нормальное распределение, то плотность распределения случайной величины κ^s равна

$$p(\gamma) = \frac{\gamma^{1/s-1}}{s\sqrt{2\pi}} \exp\{-\gamma^{2/s}/2\}, \quad -\infty < \gamma < \infty,$$

если $s = 2k + 1$, и

$$p(\gamma) = \frac{2\gamma^{1/s-1}}{s\sqrt{2\pi}} \exp\{-\gamma^{2/s}/2\}, \quad 0 < \gamma < \infty,$$

если $s = 2k$. Подставляя эти выражения в (21), получаем (26).

Следствие 2. Пусть $s = 1$ и $a = 1$. Тогда

$$f_\lambda(x) = 2^{-1/2} \exp\{(\lambda + x)^2/4\}. \quad (27)$$

Доказательство. Подставляя в (26) значения $k = 0$, $s = 1$ и $a = 1$, получаем (27).

Теорема 7. Если $s = 1$ и $a = 1$, то предельная мощность критерия отношения правдоподобия размера α равна

$$\beta(\alpha) = 2 - \int (\Phi(u_{\alpha/2} + \lambda) + \Phi(u_{\alpha/2} - \lambda)) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad (28)$$

где Φ и φ — соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Доказательство. Найдем предельное значение константы, задающей критерий отношения правдоподобия проверки гипотез H_0 и $H(\pi)$ размера α из соотношений

$$\mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \rightarrow \mathbf{P}(f(\varkappa) > c_\alpha) = \alpha, \quad (29)$$

где $\mathbf{L}\{\varkappa\} = \mathbf{N}(0, 1)$.

Положим

$$l(\alpha) = (\ln(2^{1/2}c_\alpha))^{1/2}, \quad c_\alpha > 0.$$

Из (27) и (29) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(f(\varkappa) > c_\alpha) &= \mathbf{P}((1/2^{1/2}) \exp\{\varkappa^2/4\} > c_\alpha) \\ &= \mathbf{P}(|\varkappa| > 2l(\alpha)) = \alpha, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$c_\alpha = 2^{-1/2} \exp\{u_{\alpha/2}^2/4\}.$$

Предельная мощность может быть определена с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_\lambda \pi(\lambda) \mathbf{P}_\lambda(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \\ &= \int \mathbf{P}_\lambda(f_\lambda(\varkappa) > c_\alpha) d\pi(\lambda) = \int \mathbf{P}(f_\lambda(\varkappa) > 2^{-1/2} \exp\{u_{\alpha/2}^2/4\}) d\pi(\lambda) \\ &= \int \mathbf{P}(\exp\{((\lambda + \varkappa)^2/4)\} > \exp\{u_{\alpha/2}^2/4\}) d\pi(\lambda), \end{aligned}$$

откуда следует (28).

В заключение заметим, что в условиях теоремы 7 легко находится вид критической области оптимального критерия для любого фиксированного n .

Список литературы

1. LeCam L. Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.* (1960) **3**, №2, 37–98.
2. Чибисов Д. М. Теорема о допустимых критериях и ее применения к одной асимптотической задаче проверки гипотез. *Теория вероятностей и ее применения* (1967) **12**, №1, 96–111.
3. Chibisov D. M. Transition to the limiting process for deriving asymptotically optimal tests. *Sankhyā, Ser. A* (1969) **31**, №3, 241–258.
4. Русас Дж. *Контигуальность вероятностных мер*. Мир, Москва, 1975.
5. Иванов В. А. Проверка статистических гипотез по случайно преобразованной реализации. *Дискретная математика* (1994) **6**, №2, 150–158.

Статья поступила 14.10.1997.