Ю. А. Зуев, Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике, *Дискрет. матем.*, 1991, том 3, выпуск 2, 47–57

Дискретная математика

том 3 выпуск 2 * 1991

УДК 519.7

КОМБИНАТОРНО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПОРОГОВОЙ ЛОГИКЕ

Ю.А. Зуев

Рассматривается задача оценивания числа N_n пороговых функций от n переменных. Ранее для логарифма этого числа были получены следующие асимптотические по n оценки: $n^2/2 \lesssim \log_2 N_n \lesssim n^2$. В работе доказана лемма, связывающая число областей, на которые n-мерное евклидово пространство разбивается конечным множеством гиперплоскостей, с числом аффинных подпространств, порожденных пересечениями гиперплоскостей. С помощью этой леммы показано, что для достаточно больших n справедливо неравенство $\log_2 N_n > n^2(1 - 10/\ln n)$. Тем самым установлена асимптотика $\log_2 N_n \sim n^2$, $n \to \infty$.

Введено понятие графа пороговых функций и указаны асимптотики для $\log_2 N_n(M)$ при различных M, где $N_n(M)$ – число пороговых функций с M единицами.

§ 1. Введение

Булева функция f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется *пороговой*, если существует линейное неравенство с действительными коэффициентами

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant b, \tag{1}$$

выполняющееся на тех и только тех булевых наборах $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которых $f(x) = 0$. Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ называются *весами*, b – *порогом*. Геометрически пороговая функция $f(x)$ задается гиперплоскостью, рассекающей единичный n-мерный куб $[0, 1]^n$ так, что в вершинах $\{0, 1\}^n$ по одну сторону гиперплоскости $f(x) = 0$, по другую $f(x) = 1$. Заметим, что от случая, когда некоторые из вершин лежат в гиперплоскости (в (1) имеет место равенство), всегда можно освободиться небольшим изменением порога b.

Другой интерпретацией, объясняющей широкий спектр практических приложений пороговых функций, может служить принятие решения путем взвешенного голосования коллективом из n членов. Примечательно, что в том случае, когда ошибки членов коллектива статистически независимы, взвешенное голосование является оптимальным правилом для выбора решения (см. [1, 2]).

В пороговой логике часто оказывается удобным другое представление для булевой функции f: $\{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$. В этом случае пороговая функция $f(y)$ может быть записана в виде

$$f(y) = \mathrm{sgn}(a_0 + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n). \tag{2}$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ здесь те же, что и в (1), а $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i - 2b$. Для геометрической интерпретации (2) можно использовать гиперкуб $[-1, 1]^n$, центр которого совпадает с началом координат. Отметим, что если $a_0 = 0$ в (2), то $f(-y) = f(y)$, т.е. пороговая функция является самодвойственной. И наоборот, любая самодвойственная пороговая функция может быть задана в виде (2) с $a_0 = 0$. Обозначив через N_n число пороговых функций от n переменных, а через N'_n число самодвойственных пороговых функций, имеем

$$N'_n = N_{n-1}.$$

На (2) можно взглянуть и иначе, отождествив пороговую функцию с вектором $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ в $(n+1)$-мерном линейном евклидовом пространстве. Наборы $(y_1, \ldots, y_n)$, на которых задана функция, также можно считать $(n+1)$-мерными векторами $(1, y_1, \ldots, y_n)$. Тогда значение функции на наборе определяется знаком скалярного произведения вектора-функции и вектора-набора. С выполнением над пороговыми функциями обычной векторной операции сложения связаны адаптивные возможности пороговой логики, использование пороговых функций в распознавании образов и системах искусственного интеллекта. Можно сказать, что задание пороговой функции в виде (1) более отвечает представлениям аффинной геометрии. Функция здесь задается гиперплоскостью, а булевы наборы являются точками-вершинами n-мерного куба. Задание же в виде (2) соответствует рассмотрению линейного евклидового пространства, в котором и функция, и булевы наборы – это $(n+1)$-мерные векторы.

Понятие пороговой функции зародилось в 1943 г. при моделировании функционирования нервной клетки – нейрона [3] и получило дальнейшее развитие в персептронной модели восприятия и выработки понятий [4, 5]. В этих исследованиях основное внимание уделялось алгоритмам адаптации, т.е. многократной пошаговой подстройке весов, приводящей к пороговой функции с заданными свойствами. Детальный математический анализ пороговых функций начался лишь с конца 50-х годов в связи с использованием пороговых устройств в управляющих схемах первых ЭВМ (см. [6–11]). Здесь впервые и возникла задача о числе N_n пороговых функций от n переменных как естественной мере разнообразия порогового базиса.

В настоящее время интерес к пороговым функциям стимулируется распознаванием образов [1, 2] и бурно развивающимися в последние годы нейронными сетями [12], а также линейным булевым программированием [13], теорией кодирования [14] и теорией графов [15]. При этом наиболее широко используемой в различных областях, несомненно, является мажоритарная функция, выражающая принятие решения простым большинством. Ее статистические свойства, касающиеся метода повышения надежности принятия решений, исследовались в [16].

§ 2. Методы получения оценок для числа пороговых функций

Приступая к оценке числа пороговых функций, рассмотрим сначала функции с малым числом переменных. Все булевы функции от одной переменной являются пороговыми, а из 16 функций от двух переменных не являются пороговыми лишь две: сложение по модулю 2 и его отрицание. Для перечисления пороговых функций от трех переменных полезно рассмотреть классы пороговых функций с заданным числом единиц. Пусть $N_n(M)$ – число пороговых функций от n переменных, принимающих значение 1 на M наборах (число пороговых множеств мощности M). Замечая, что $N_n(M) = N_n(2^n - M)$, получаем

$$N_3 = 2(N_3(0) + N_3(1) + N_3(2) + N_3(3)) + N_3(4) = 2(1+8+12+24) + 14 = 104.$$

Таким образом, из 256 функций от трех переменных пороговых лишь 104. С дальнейшим ростом числа переменных пороговые функции составляют все меньшую часть. С 1965 г. известны следующие асимптотические по n оценки для логарифма числа пороговых функций от n переменных:

$$n^2/2 < \log_2 N_n \leqslant n^2. \tag{3}$$

Верхняя оценка в (3) сразу следует из того, что в n-мерном пространстве от множества из K точек общего положения (никакие $i+2$ точки не лежат в i-мерной плоскости, $1 \leqslant i \leqslant n-1$) может быть отсечено гиперплоскостью $2\sum_{i=0}^{n}\binom{K-1}{i}$ различных подмножеств (см. [1]). Полагая $K = 2^n$ и замечая, что в нашем случае расположение точек вырождено (в гиперплоскости $x_i = 0$ лежит 2^{n-1} точек) и число отсечений уменьшается, получаем верхнюю оценку в (3).

Хотя вырожденность и сильно осложняет нахождение N_n, тот факт, что в нашем случае точки являются вершинами гиперкуба, позволяет развить специфические методы получения оценок. Таким известным в пороговой логике методом для получения верхних оценок является подсчет параметров Чоу (см. [17]). Пусть $f\colon \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ – произвольная булева функция. Сложив как векторы все наборы x, на которых $f(x) = 0$, получим целочисленный n-мерный вектор $(s_1, \ldots, s_n)$. Дополнив его нулевой координатой $s_0 = |f^{-1}(0)|$, равной числу наборов x, на которых $f(x) = 0$, получим $(n+1)$-мерный вектор параметров Чоу $s(f) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$.

Замечательное для пороговой логики свойство вектора Чоу состоит в том, что если $f(x)$ – пороговая функция и $s(f)$ – ее вектор Чоу, то никакая другая отличная от нее функция, пороговая или непороговая, не может иметь такой же вектор Чоу. В самом деле, пусть $s(f) = s(g)$ и $f \neq g$. Тогда

$$\sum_{x\in f^{-1}(0)} x = \sum_{x\in g^{-1}(0)} x,$$

$$\sum_{x\in f^{-1}(0)\cap g^{-1}(0)} x + \sum_{x\in f^{-1}(0)\setminus g^{-1}(0)} x = \sum_{x\in f^{-1}(0)\cap g^{-1}(0)} x + \sum_{x\in g^{-1}(0)\setminus f^{-1}(0)} x,$$

$$\sum_{x\in f^{-1}(0)\setminus g^{-1}(0)} x = \sum_{x\in g^{-1}(0)\setminus f^{-1}(0)} x.$$

Так как $|f^{-1}(0)| = |g^{-1}(0)|$, то $|f^{-1}(0)\setminus g^{-1}(0)| = |g^{-1}(0)\setminus f^{-1}(0)|$ и

$$\frac{1}{|f^{-1}(0)\setminus g^{-1}(0)|}\sum_{x\in f^{-1}(0)\setminus g^{-1}(0)} x = \frac{1}{|g^{-1}(0)\setminus f^{-1}(0)|}\sum_{x\in g^{-1}(0)\setminus f^{-1}(0)} x,$$

что невозможно, так как задающая пороговую функцию $f(x)$ гиперплоскость разделяет множества $f^{-1}(0)\setminus g^{-1}(0)$ и $g^{-1}(0)\setminus f^{-1}(0)$, и выпуклые оболочки этих множеств не могут пересекаться. Полученное противоречие показывает невозможность совпадения векторов Чоу.

Замечая, что в векторе $s(f)$ каждая координата может принимать лишь целые значения от 0 до 2^n, получаем, что существует не более $(2^n+1)^{n+1}$ различных векторов Чоу. Это дает еще одно доказательство верхней оценки в (3).

Нижняя оценка в (3) является конструктивной и основана на соотношении

$$N_{i+1} \geqslant (2^i + 1) N_i. \tag{4}$$

Для доказательства (4) сопоставим каждой пороговой функции от i переменных, задаваемой неравенством $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i \leqslant b$, все пороговые функции от $i+1$ переменных, задаваемые неравенствами вида $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i + ax_{i+1} \leqslant b$, где a пробегает множество значений от $-\infty$ до $+\infty$. При этом в подкубе $x_{i+1} = 1$ гиперплоскость $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i = b - a$ перемещается параллельно самой себе, пересекая все 2^n вершин. Легко видеть, что веса $a_1, \ldots, a_i$ исходной функции всегда могут быть выбраны так, чтобы гиперплоскость не пересекала одновременно более одной вершины. Поэтому в подкубе $x_{i+1} = 1$ возникает ровно $2^i + 1$ различных функций. В подкубе же $x_{i+1} = 0$ варьирование a не меняет функции. Таким образом, из каждой функции от i переменных возникает $2^i + 1$ функций от $i + 1$ переменных, что и доказывает (4).

Из (4) получаем неравенство

$$N_n > \prod_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^{n(n-1)/2},$$

откуда следует нижняя оценка в (3).

В самом деле, если наряду с параллельным перемещением гиперплоскости $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i = b - a$ допускать небольшие изменения весов $a_1, \ldots, a_i$, не меняющие исходной функции, то из одной функции от i переменных будет получено более $2^i + 1$ функций от $i + 1$ переменных. Однако улучшить нижнюю оценку в (3) на этом пути не удалось [18].

Взглянем теперь на задачу подсчета N_n с иной точки зрения. В $(n + 1)$-мерном пространстве весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ рассмотрим области, соответствующие различным пороговым функциям (2). Каждая такая область является выпуклым многогранным конусом, образованным пересечением 2^n полупространств вида $a_0 + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n \gtrless 0$, где знак неравенства определяется значением функции на наборе $(y_1, \ldots, y_n)$. Если конус непуст, то он в данном случае имеет и внутренность. Поэтому задача подсчета N_n сводится к подсчету числа открытых многогранных конусов, на которые $(n + 1)$-мерное пространство $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ разбивается проходящими через начало координат 2^n гиперплоскостями вида

$$a_0 \pm a_1 \pm \ldots \pm a_n = 0. \tag{5}$$

Задача подсчета числа конусов, на которые n-мерное евклидово пространство разбивается проходящими через начало координат K гиперплоскостями, рассматривалась в XIX веке Якобом Штейнером для случая двух и трех измерений и была обобщена на n-мерный случай Людвигом Шлефли. Было показано, что в случае общего расположения гиперплоскостей (любые n нормалей линейно независимы) число конусов зависит только от числа гиперплоскостей и равно

$$2\sum_{i=0}^{n-1} \binom{K-1}{i}. \tag{6}$$

(О значении этого результата см. [19].)

В нашем случае это дает еще один способ получения верхней оценки в (3), который исторически и был реализован первым (см. [10, 20]). По-прежнему, вырожденность препятствует получению точной формулы для N_n. В [21] предпринималась попытка преодолеть эту трудность и была получена формула для числа конусов при произвольном центрированном расположении гиперплоскостей, включающем и вырожденные случаи. Однако ее применение оказалось слишком сложным, и вопрос об асимптотике отношения $(\log_2 N_n)/n^2$ продвинут не был. Подсчет же этого отношения на ЭВМ для $n \leqslant 8$ дал следующие результаты [10]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(\log N_n)/n^2$	0	0,95183	0,74449	0,67987	0,66116	0,66225	0,67273	0,68740

То обстоятельство, что верхняя оценка в (3) была получена различными способами, позволило предполагать, что она, возможно, является точной асимптотикой для $\log_2 N_n$. Уиндер отмечает в [22], что еще в 1962 г. им была выдвинута гипотеза, что $\log_2 N_n \sim n^2$. Основанием для нее в то время могло быть, по-видимому, интуитивное убеждение, что вырожденность в данном случае не столь велика, чтобы изменить асимптотику логарифма числа областей по сравнению со случаем общего расположения гиперплоскостей. Однако конструктивно построить или явно описать множество из $2^{n^2(1-o(1))}$ пороговых функций не удалось, несмотря на значительные усилия в течение длительного времени многих исследователей. Настоящая работа доказывает асимптотику $\log_2 N_n \sim n^2$, устанавливая существование множества пороговых функций необходимой мощности неконструктивными вероятностными методами.

§ 3. Одна геометрическая лемма

Классические результаты по разбиению пространства гиперплоскостями для случая общего расположения гиперплоскостей (центрированного или нецентрированного) выражают число областей, на которые разбивается пространство, комбинаторными формулами через число гиперплоскостей и размерность пространства (см. [23]). Если же расположение гиперплоскостей не общего вида, то эти формулы являются лишь верхними оценками для числа областей. Так, для общего нецентрированного расположения K гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве (пересечение каждых i гиперплоскостей имеет размерность $n-i$, при $n-i<0$ оно пусто) число областей, как показано в [24], равно

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{K}{i}. \tag{7}$$

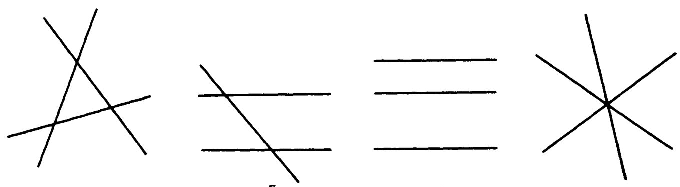
Если же гиперплоскости находятся не в общем положении, то число областей уменьшается. Поэтому для оценки снизу числа областей в вырожденном случае необходимы дополнительные результаты.

Назовем расположение гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве E^n *квазиобщим,* если пересечение каждых i гиперплоскостей имеет размерность $n-i$ или пусто, т.е. допускается параллельность, но через каждое подпространство пересечения размерности $n-i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ проходит ровно i гиперплоскостей. Следующая лемма выражает интересный геометрический факт, не отмечавшийся ранее в исследованиях по разбиению пространства гиперплоскостями.

Лемма. *Число открытых n-мерных областей, на которые евклидово пространство E^n разбивается конечным множеством гиперплоскостей, всегда не меньше полного числа всевозможных аффинных подпространств, порожденных пересечением этих гиперплоскостей, считая подпространства всех размерностей от* 0 *(точки) до* $n-1$ *(сами гиперплоскости) и* n *(все пространство E^n). При этом равенство имеет место в том и только том случае, когда расположение гиперплоскостей квазиобщее.*

Приступая к доказательству, следует прежде всего отметить, что основное утверждение леммы может быть сразу получено из найденной в [25] общей формулы, выражающей число областей через функцию Мёбиуса полурешетки подпространств пересечения, упорядоченных вложением, и свойств функции Мёбиуса геометрических решеток [26], а случай равенства выясняется дополнительным анализом. Мы, однако, дадим элементарное геометрическое доказательство, не использующее функции Мёбиуса, но сначала проиллюстрируем лемму простейшим примером (см. рис. 1). На рисунке представлены все неизоморфные расположения трех прямых на плоскости. В случаях *а, б, в* расположение прямых квазиобщее и в лемме имеет место равенство. Так, в случае *а* имеется 7 областей, и полное число аффинных подпространств также равно 7 (три точки, три прямые и вся плоскость). В случае же *г* расположение не квазиобщее, здесь шесть областей и только пять подпространств (точка, три прямые и вся плоскость). Таким образом, с помощью леммы формула (7) получила геометрическое истолкование.

Доказательство леммы проведем индукцией по числу гиперплоскостей K. При $K = 1$ пространство разбивается на два полупространства, и число аффинных подпространств пересечения также равно двум: гиперплоскость и все пространство. Допустим, что утверждение леммы верно для евклидовых пространств всех размерностей при $K = i$. Докажем его для $K = i + 1$. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E^n заданы $i + 1$ гиперплоскостей $L_1, \ldots, L_i, L_{i+1}$. Для разбиения пространства E^n гиперплоскостями $L_1, \ldots, L_i$ утверждение леммы справедливо по предположению индукции. Посмотрим, как изменится число областей в E^n и



а *б* *в* *г*

Рис. 1

число подпространств при проведении гиперплоскости L_{i+1}. Увеличение числа областей происходит за счет того, что некоторые области пространства E^n рассекаются гиперплоскостью L_{i+1} на две области. В результате каждого такого пересечения гиперплоскости с областью пространства E^n в гиперплоскости вырезается $(n-1)$-мерный кусок, и число новых областей пространства равно числу вырезаемых в L_{i+1} кусков. Эти куски являются $(n-1)$-мерными областями гиперплоскости L_{i+1}, получающимися в результате рассечения L_{i+1} лежащими в ней $(n-2)$-мерными гиперплоскостями, образованными пересечениями L_{i+1} с $L_1, \ldots, L_i$. Таких $(n-2)$-мерных гиперплоскостей не более i, и по предположению индукции число кусков гиперплоскости L_{i+1} не меньше числа лежащих в ней подпространств пересечения.

Таким образом, увеличение числа областей пространства E^n равно числу кусков гиперплоскости L_{i+1}, а увеличение числа подпространств пересечения в E^n не больше числа подпространств, лежащих в L_{i+1}, которое, в свою очередь, не больше числа кусков L_{i+1}. Поэтому прирост числа подпространств пересечения в E^n при проведении L_{i+1} всегда не превышает прироста числа областей пространства E^n.

Для установления условия равенства нужно лишь заметить, что при квазиобщем положении прирост числа подпространств пересечения при проведении L_{i+1} всегда равен числу подпространств, лежащих в L_{i+1}, так как ни одно подпространство пересечения гиперплоскостей $L_1, \ldots, L_i$ не принадлежит гиперплоскости L_{i+1}. Этим завершается доказательство.

§ 4. Доказательство асимптотики $\log_2 N_n \sim n^2$

Согласно изложенному в § 2 подсчет числа пороговых функций сводится к подсчету числа областей, на которые 2^n гиперплоскостей (5) разбивают $(n+1)$-мерное евклидово пространство весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Положим $a_0 = 0$, ограничившись самодвойственными функциями, и будем рассматривать разбиение пространства $E^n = (a_1, \ldots, a_n)$ 2^{n-1} гиперплоскостями вида

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n = 0. \tag{8}$$

Для оценки снизу числа областей будет использована лемма из § 3 и некоторые свойства (± 1)-векторов, позволяющие считать, что расположение (8) близко в некотором смысле к общему. Заметим здесь, что расположение (8) центрировано и даже в случае общего центрированного положения в лемме не выполнено условие равенства. Однако возникающая здесь "систематическая" погрешность невелика, так как в случае общего центрированного расположения $K = 2^{n-1}$ гиперплоскостей число областей в E^n согласно (6) равно $2\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{K-1}{i}$, а лемма дает нижнюю оценку $1+\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{K}{i}$, асимптотически лишь вдвое меньшую.

Общее центрированное положение гиперплоскостей означает, что любые n нормалей линейно независимы. Такое расположение с вероятностью 1 возникает при независимом случайном выборе нормалей в E^n в соответствии с любым абсолютно непрерывным распределением. Простейший способ получения такого распределения состоит в том, чтобы задать некоторое непрерывное распределение на интервале $(-1, 1)$ (например, равномерное) и считать компоненты вектора распределенными независимо в соответствии с этим распределением. Пусть с помощью такого распределения независимо в E^n выбрано множество из $K > n$ векторов. Тогда это множество с вероятностью 1 обладает следующими свойствами:

1) любые n векторов из K линейно независимы;

2) в линейной оболочке любых $n-1$ векторов не содержится ни одного из оставшихся $K - n + 1$ векторов.

Изучение свойств (± 1)-векторов показало, что с ростом n их свойства приближаются к свойствам векторов, выбранных независимо из непрерывного распределения, а именно:

1) вероятность того, что n случайно выбранных векторов будут линейно независимы, с ростом n стремится к 1;

2) вероятность того, что в линейной оболочке p случайно выбранных векторов содержится хотя бы один вектор из $\{\pm 1\}^n$, отличный от взятых и им противоположных, при $p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ с ростом n стремится к нулю.

Последнее свойство и позволяет получить требуемую нижнюю оценку для числа пороговых функций. Оно установлено в работе [27], являющейся фундаментом для нашего основного результата.

Теорема 1 [28]. *Для логарифма числа N_n пороговых функций от n переменных при достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\log_2 N_n > n^2(1-10/\ln n).$$

Доказательство. Мы собираемся показать, что имеется более $2^{n^2(1-10/\ln n)}$ подпространств пересечения (8), а затем воспользоваться леммой из § 3. Положим $p = \lfloor n(1-9{,}9/\ln n)\rfloor$ и рассмотрим множество $\mathfrak{A}_n$ случайных (± 1)-матриц A размера $p \times n$, элементы которых независимо и равновероятно принимают значения +1 или −1. Множество $\mathfrak{A}_n$ состоит, таким образом, из 2^{pn} матриц, имеющих одинаковую вероятность 2^{-pn}. Считая строки матриц нормальными векторами гиперплоскостей (8), свяжем с каждой матрицей $A \in \mathfrak{A}_n$ линейное подпространство, натянутое на ее строки, линейную оболочку строк. Тогда пересечение p гиперплоскостей, задаваемых строками матрицы A как нормалями, будет ортогональным дополнением к линейной оболочке ее строк. Это позволяет свести задачу к подсчету числа различных линейных подпространств, порождаемых матрицами из $\mathfrak{A}_n$.

Обозначим через $\mathfrak{A}'_n$ подмножество матриц, не содержащих пар одинаковых или противоположных строк. Очевидно, что в $\mathfrak{A}'_n$ входят почти все матрицы, т.е. $|\mathfrak{A}'_n| \sim |\mathfrak{A}_n|$, $n \to \infty$. Множество $\mathfrak{A}'_n$ разобьем на классы эквивалентности следующим образом. В один класс включим матрицы, получаемые друг из друга перестановками строк и заменами строк на противоположные. Тогда в каждом классе будет ровно

$p!2^p$ матриц. Ясно, что все матрицы из одного класса эквивалентности порождают одно и то же подпространство. Однако из того, что у почти всех матриц линейная оболочка не содержит (± 1)-векторов, отличных от строк матрицы или им противоположных [27], следует, что число различных подпространств асимптотически совпадает с числом классов эквивалентности, т.е. равно $2^{pn}/(p!2^p)$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

В качестве следствия получаем, что

$$N_n = 2^{n^2(1-o(1))}, \quad n \to \infty.$$

§ 5. О структуре множества пороговых функций

Множество пороговых функций обладает определенными структурными свойствами, которые целесообразно рассмотреть наряду с оценкой его мощности.

На множестве всех булевых функций естественным образом вводится отношение частичного порядка:

$$f \preccurlyeq g \Longleftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \quad \forall\, x \in \{0, 1\}^n.$$

Возникающее при этом частично упорядоченное множество изоморфно множеству всех подмножеств 2^n-элементного множества, упорядоченных включением, и является булевой алгеброй (определения см. в [29]). Операциями взятия верхней и нижней граней являются соответственно дизъюнкция и конъюнкция. Упорядоченное этим же отношением множество пороговых функций не обладает столь богатой структурой. Оно градуируется числом единиц пороговых функций, имеет универсальные нижнюю и верхнюю грани – тождественные нуль и единицу, но не является решеткой. В самом деле, пусть $n = 2$ и пусть функции f и g таковы, что $f^{-1}(1) = \{(0,0)\}$, $g^{-1}(1) = \{(1,1)\}$. Тогда каждая из функций e: $e^{-1}(1) = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ и h: $h^{-1}(1) = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ является минимальной пороговой функцией, большей f и g, т.е. точная верхняя грань $\sup\{f, g\}$ отсутствует.

Несколько иное структурное описание можно получить, воспользовавшись языком теории графов. При изучении булевых функций, в частности, исследовании полуэффекта Шеннона с помощью вариационного принципа [30], оказывается полезной метрика, в которой расстоянием между двумя функциями служит число тех булевых наборов, на которых они принимают различные значения. Тогда "соседними" естественно считать функции, различающиеся лишь на одном наборе. Если рассмотреть граф, вершины которого соответствуют булевым функциям, а ребра соединяют "соседние" функции, то он изоморфен 2^n-мерному кубу.

Аналогичный граф на множестве пороговых функций назовем *графом пороговых функций*. Он обладает более сложной структурой, но допускает прозрачную геометрическую интерпретацию. Конусы (5) в $(n+1)$-мерном пространстве весов, соответствующие "соседним" пороговым функциям, смежны, при переходе через разделяющую их гиперплоскость происходит изменение значения функции в одной вершине гиперкуба. Множество вершин гиперкуба, соответствующих граням конуса пороговой функции, обладает следующими свойствами: а) оно является наименьшим множеством вершин, знание значений пороговой функции на котором позволяет восстановить ее на всем гиперкубе; б) оно является наибольшим множеством вершин таким, что пороговая функция может быть изменена в любой одной вершине множества без изменения значений на всем остальном гиперкубе.

Число "соседей" у пороговой функции, равное числу граней ее конуса, в графической интерпретации является степенью вершины графа. Эта степень всегда не меньше $n + 1$, так как телесный конус с вершиной имеет в E^{n+1} не менее $n + 1$ граней. Столько "соседей" у пороговых функций $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ и $x_1 \vee x_2 \vee$

$\vee \ldots \vee x_n$, а также у любой другой пороговой функции, имеющей один нуль или единицу. Максимальным же числом "соседей", равным 2^n, обладает любая пороговая функция, существенно зависящая от не более чем одной переменной. Таков геометрический взгляд на результаты [31, 7].

При непрерывном изменении весов пороговой функции соответствующая точка в $(n+1)$-мерном пространстве $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ описывает некоторую траекторию. Если эта траектория не выбрана определенным "специальным" образом, а именно, не проходит через $\binom{2^n}{2}$ подпространств размерности $n - 1$, при пересечении которых функция меняет значения сразу в двух вершинах гиперкуба, то переход от одной пороговой функции к другой осуществляется по ребрам графа пороговых функций. Дискретным аналогом такой непрерывной траектории могут служить изменения весов в процессе адаптации, осуществляемой с достаточно малым шагом. Отметим, что расстояние между пороговыми функциями равно расстоянию между соответствующими вершинами графа, т.е. числу ребер в кратчайшем пути между ними. В самом деле, если

$$f_0(y) = \operatorname{sgn}(a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n),$$
$$f_1(y) = \operatorname{sgn}(a_0' + a_1' y_1 + \ldots + a_n' y_n)$$

– пороговые функции, различающиеся на r вершинах гиперкуба, то переход от f_0 к f_1 по графу также осуществим за r шагов с помощью формулы

$$f_t(y) = \operatorname{sgn}(a + t(a' - a), y)$$

при изменении t от 0 до 1. Отсюда следует, что диаметр графа пороговых функций равен 2^n.

Теорема 1 дает оценку для числа всех пороговых функций. Интерес представляет также получение оценок числа пороговых функций с заданным числом единиц (нулей). Задача подсчета числа отсечений фиксированной мощности выглядит естественным обобщением задачи подсчета всех линейных разбиений конечного множества точек, но в общем случае от нее приходится отказаться, так как общее расположение заданного числа точек в n-мерном евклидовом пространстве, однозначно определяя полное число линейных разбиений, не определяет, как нетрудно проверить, числа отсечений фиксированной мощности [32]. В нашем случае, однако, точками являются 2^n вершин гиперкуба, и подобного затруднения не возникает.

Такая задача естественным образом появляется при изучении пороговых представлений булевых функций – таких представлений системами линейных неравенств, когда допустимые для системы бинарные наборы и только они являются нулями булевой функции [33]. Этим путем получена нижняя оценка для порогового числа $t(f)$ типичной булевой функции – минимального шага линейных неравенств, необходимого для порогового представления. Оказалось, что для типичной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ одной гиперплоскостью удается отсечь не более cn ее единичных вершин, где c – некоторая константа. Это сразу дает для порогового числа оценку $t \gtrsim 2^{n-1}/(cn)$, по-видимому, совпадающую по порядку с $t(f)$ для типичной булевой функции f.

Пусть, как и в § 2, $N_n(M)$ – число пороговых функций с M единицами. В терминах рассматривавшегося на множестве пороговых функций частичного порядка $N_n(M)$ – это число элементов высоты M. Асимптотическим по n оценкам для $\log N_n(M)$ при различном характере роста $M(n)$ посвящена работа [34]. Полученная в настоящей работе асимптотика для $\log N_n$ позволяет усилить эти результаты. В теореме 2 рассмотрены все возможные случае изменения $M(n)$, $n \to \infty$, при условии, что существуют конечные или бесконечные пределы $\lim (M(n)/n)$, $\lim (\log M(n)/\log n)$

и $\lim(\log M(n)/n)$, причем $\lim(\log M(n)/n) < 1$. Буква c всюду далее обозначает некоторую константу, $\log a = \log_2 a$.

Теорема 2. *С ростом n при заданном характере изменения $M(n)$ для $\log N_n(M)$ имеют место следующие асимптотики:*

1) *если* $M = o(n)$, *то* $\log N_n(M) \sim n$;
2) *если* $M = cn(1 + o(1))$, *то* $\log N_n(M) \sim n(c\log(1 + 1/c) + \log(1 + c) + 1)$;
3) *если* $M = \alpha(n)n$, *где* $\alpha(n) \to \infty$, $\log\alpha(n) = o(\log n)$, *то* $\log N_n(M) \sim n\log\alpha(n)$;
4) *если* $M = n^{c + o(1)}$, *где* $c > 1$, *то* $\log N_n(M) \sim (c - 1)n\log n$;
5) *если* $M = 2^{\beta(n)}$, *где* $\lim(\beta(n)/\log n) = \infty$, $\beta(n) = o(n)$, *то* $\log N_n(M) \sim \beta(n)n$;
6) *если* $M = 2^{cn(1 + o(1))}$, *где* $0 < c < 1$, *то* $\log N_n(M) \sim cn^2$.

Утверждения 1)–5) доказаны в [34]. Утверждение 6) также получается использованным в [34] методом, если вместо оценки (3) из [34] воспользоваться полученной в теореме 1 асимптотикой для логарифма числа самодвойственных пороговых функций:

$$\log N_n(2^{n-1}) = \log N_n' \sim n^2. \qquad (9)$$

Интересно отметить, что параметры Чоу оказались универсальным средством получения верхних оценок для $N_n(M)$, причем во всех случаях 1)–6) эти оценки дали точную асимптотику логарифма, доказанную соответствующей оценкой снизу. Получение же этих нижних оценок в каждом случае потребовало специального метода: в 1)–3) – это конструктивное построение самих множеств единиц пороговых функций; в 4), 5) – построение множества линейных неравенств, определяющих пороговые функции с заданным числом единиц; и, наконец, в 6) – неконструктивный метод, использующий полученную вероятностными рассуждениями оценку (9).

Рассматривая множество значений $N_n(M)$, $M = 0, 1, \ldots, 2^n$, как дискретное распределение, симметричное относительно 2^{n-1}, можно обнаружить, что все оценки теоремы 2 относятся к "хвостам" этого распределения. Естественно поставить задачу исследования центральной части распределения, где сосредоточена основная масса пороговых функций, но это требует более точных, чем асимптотика логарифма, оценок для N_n и $N_n(M)$.

В заключение автор хотел бы поблагодарить за полезные обсуждения Ф.А. Богомолова и С.П. Тарасова, а также выразить благодарность С.А. Степанову, внимательно просмотревшему рукопись.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нильсон Н. Обучающие машины. – М.: Мир, 1967. – 180 с.
2. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. – М.: Мир, 1976. – 512 с.
3. Маккаллок У.С., Питтс У. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности // Автоматы. – М.: ИЛ. – 1956. – С. 362–384.
4. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики (персептрон и теория механизмов мозга). – М.: Мир, 1965. – 480 с.
5. Минский М., Пейперт С. Персептроны. – М.: Мир, 1971. – 261 с.
6. Нечипорук Э.И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 11. – М.: Наука. – 1964. – С. 49–62.
7. Hu S.-T. Threshold Logic. – Berkeley: University of California Press, 1965. – 338 p.
8. Дертсозос М. Пороговая логика. – М.: Мир, 1967. – 343 с.
9. Бутаков Е.А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. – М.: Энергия, 1970. – 328 с.
10. Muroga S. Threshold logic and its applications. – New York: Wiley, 1971. – 478 p.
11. Лупанов О.Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 26. – М.: Наука. – 1973. – С. 109–140.
12. Wasserman P.D. Neural computation. Theory and Practice. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1989. – 230 p.

13. С х р и в е р А. Теория линейного и целочисленного программирования. – М.: Мир, 1990.
14. М е с с и Дж. Пороговое декодирование. – М.: Мир, 1966. – 207 с.
15. Т ы ш к е в и ч Р.И., Ч е р н я к А.А. Пороговые разложения булевых функций и графов // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. – Горький: Горьк. гос. ун-т, 1989. – С. 111–129.
16. З у е в Ю.А. О статистических свойствах принятия решения большинством голосов в задачах классификации // ДАН СССР. – 1986. – Т. 288, № 2. – С. 320–322.
17. W i n d e r R.O. Chow parameters in threshold logic // Journal of Association for Computing Machinery. – 1971. – V. 18, № 2. – P. 265–289.
18. Я д ж и м а С., И б а р а к и Т. Нижняя оценка числа пороговых функций // Кибернетический сб. Н.С. Вып. 6. – М.: Мир, 1969. – С. 72–81.
19. C o v e r T.M., E f r o n B. Geometrical probabiliti and random points on a hypersphere // Ann. Math. Statist. – 1967. – V. 38, № 1. – P. 213–220.
20. W i n d e r R.O. Threshold logic asymptotes // IEEE Trans, on Computers. – 1970. – V. C–19, № 4. – P. 349–353.
21. W i n d e r R.O. Partitions of N-space by hyperplanes // SIAM J. Appl. Math. – 1966. – V. 14, № 4. – P. 811–818.
22. W i n d e r R.O. Enumeration of seven–argument threshold functions // IEEE Trans, on Electronic Comp. – 1965. – V. EC–14, № 3. – P. 315–325.
23. G rü n b a u m B. Arrangements of hyperplanes // Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Tseory and Computing / R.C. Mullin et. al., eds. – Baton Rouge, 1971. – P. 41–74.
24. B u c k R.C. Partition of space // Amer. Math. Monthly. – 1943. – V. 50, № 9. – P. 541–544.
25. Z a s l a v s k y T. Facing up to arrangement: Face–count formulas for partitions of space by hyperplanes // Memoirs of the Amer. Math. Society. – 1975. – V. 1, № 154. – P. 1–102.
26. R o t a G.-C. On the foundations of combinatorial theory I. The Mobius functions // Z. Wahr. verw. Geb. – 1964. – Bd. 2, № 4. – S. 340–368.
27. O d l y z k o A.M. On subspaces spanned by random selections of ±1 vectors // J. Combin. Theory, A. – 1988. – V. 47, № 1. – P. 124–133.
28. З у е в Ю.А. Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // ДАН СССР. – 1989. – Т. 306, № 3. – С. 528–530.
29. Б и р к г о ф Г. Теория решеток // М.: Наука, 1984. – 564 с.
30. Н и г м а т у л л и н Р.Г. Сложность булевых функций // М.: Наука, 1990.
31. M a y s C.H. The boundary matrix of threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comp. – 1965. – V. EC–14, № 1. – P. 65–66.
32. H a r d i n g E.P. The number of partitions of a set of N points in k dimensions induced by hyperplanes // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1967. – V. 15 (Series II), № 4. – P. 285–289.
33. З у е в Ю.А., Л и п к и н Л.И. К оценке эффективности пороговых представлений булевых функций // Кибернетика. – 1988. – № 6. – С. 29–37.
34. З у е в Ю.А., Л и п к и н Л.И. Линейные отсечения заданной мощности в единичном гиперкубе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1988, № 3. – С. 79–85.

Статья поступила 08.05.90