



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. D. Bendikov, I. V. Pavlov, Wiener Process with Reflection and Harmonic Functions with Finite Power Integral, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 1988, Volume 33, Issue 3, 586–589

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

March 20, 2025, 19:02:16



ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС С ОТРАЖЕНИЕМ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ЭНЕРГИИ

БЕНДИКОВ А. Д., ПАВЛОВ И. В.

1. Введение. Пусть T — единичная окружность, а $T^\infty := T \times T \times \dots$ — счетное декартово произведение таких окружностей (бесконечномерный тор). Положим $\mathfrak{A} := R^n \times T^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) : x_1, \dots, x_n \in R^1, x_{n+1}, \dots \in T\}$, $\mathfrak{A}_+ := \{x \in \mathfrak{A} : x_1 > 0\}$, $\partial\mathfrak{A}_+ := \{x \in \mathfrak{A} : x_1 = 0\}$, $\bar{\mathfrak{A}}_+ := \mathfrak{A}_+ \cup \partial\mathfrak{A}_+$. В настоящей работе изучаются граничные значения гармонических на \mathfrak{A}_+ функций, принадлежащих расширенному пространству Дирихле винеровского процесса с отражением на $\bar{\mathfrak{A}}_+$. Эти гармонические функции составляют гильбертово пространство, которое мы обозначаем $\mathcal{H}_{W_e^1}$. Основным результатом данной статьи таков: при $n \geq 3$ граничные (для функций из $\mathcal{H}_{W_e^1}$) функции образуют расширенное пространство Дирихле относительно процесса Коши на $\partial\mathfrak{A}_+$. Этот факт является бесконечномерной реализацией одной теоремы Сильверштейна (см. [1, теорема 5.5.1]) и обобщает реализацию для R^n , описанную в [1, пример 5.5.2]).

Результаты данной работы анонсированы в [2].

2. Определения и факты из теории пространств Дирихле. Пусть E — локально компактное сепарабельное хаусдорфово пространство и ν — плотная мера Радона на E . Положим $L_2 := L_2(E, \nu)$, $(u, v) := (u, v)_{L_2}$, $\|u\|_2 := \|u\|_{L_2}$ и обозначим C_0 пространство непрерывных функций на E с компактными носителями.

О п р е д е л е н и е 1. Замкнутая неотрицательно определенная симметричная билинейная форма \mathcal{E} на L_2 называется *регулярной формой Дирихле* с областью определения $D[\mathcal{E}]$, если:

1) $D[\mathcal{E}] \cap C_0$ плотно в C_0 в равномерной метрике и в $D[\mathcal{E}]$ в метрике $\|u\|_* := \sqrt{\mathcal{E}(u) + \|u\|_2^2}$ (условие регулярности [1, с. 6]);

2) \mathcal{E} — марковская (см. [1, с. 5]), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\varphi_\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, что $\varphi_\varepsilon(t) = t$, $t \in [0, 1]$; $-\varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(t) \leq 1 + \varepsilon$, $t \in R$; $0 \leq \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(s) \leq t - s$, $t \geq s$;

$$u \in D[\mathcal{E}] \Rightarrow \varphi_\varepsilon(u) \in D[\mathcal{E}], \quad \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon(u)) \leq \mathcal{E}(u).$$

Гильбертово пространство $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_*)$, где $\mathcal{F} := D[\mathcal{E}]$, называется при этом *пространством Дирихле*.

Пусть X — марковский процесс на E и (P_t) — его марковская полугруппа.

Теорема 1. 1) *Каждой регулярной форме Дирихле можно сопоставить такой симметричный процесс Ханта X , что $\mathcal{E}(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (u - P_t u, v)$, $u, v \in D[\mathcal{E}]$ (см. [1, теорема 6.2.1]).*

2) *Процесс X определяется формой \mathcal{E} однозначно с точностью до эквивалентности (см. [1, теорема 4.3.6]).*

В дальнейшем будем придерживаться таких обозначений: N — множество натуральных чисел; dx — мера Хаара на \mathfrak{A} ; $\partial/\partial x_k$ — производная по переменной x_k в смысле теории обобщенных функций; $\mathcal{L}(U)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $U \subset \mathfrak{A}$ с компактными носителями; (Q_t) — полугруппа Коши, ассоциированная с (P_t) , т. е. $Q_t f = \int_0^\infty (P_s f) h_t(s) ds$, где $h_t(s) = (4\pi)^{-1/2} t s^{-3/2} \exp(-t^2/(4s))$;

$\mathcal{L}^{(\infty)}$ — множество бесконечномерных векторов $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ с целочисленными координатами, причем у каждого θ лишь конечное число координат отлично от нуля; $\mathfrak{A} := R^n \times \mathcal{L}^{(\infty)}$ — двойственная к \mathfrak{A} группа; \hat{u} — преобразование Фурье функции u ; $d\theta$ — мера Хаара на \mathfrak{A} .

3. Примеры пространств Дирихле на \mathfrak{A} .

Пример 1 (пространство Дирихле винеровского процесса на \mathfrak{A}).

Пусть $E = \mathfrak{A}$ и $\nu = dx$. Положим

$$\mathcal{E}(u) := \int_{\mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2(x) dx, \quad a_k > 0 \quad (k \in N);$$

$$D[\mathcal{E}] := W_2^1 = \left\{ u \in L_2: \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2 \quad (k \in N), \mathcal{E}(u) < \infty \right\}.$$

Стандартным образом проверяются следующие утверждения:

1) \mathcal{E} — регулярная форма Дирихле.

2) Соответствующий (по теореме 1) форме \mathcal{E} процесс Ханта X на \mathfrak{A} есть диагональный винеровский процесс на \mathfrak{A} (см. [3]), инфинитезимальный оператор которого имеет вид

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

3) Пусть $\psi(\theta) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \theta_k^2$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \hat{\mathfrak{A}}$. Тогда

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \psi(\theta) |\hat{u}(\theta)|^2 d\theta;$$

$$D[\mathcal{E}] = \left\{ u \in L_2: \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \psi(\theta) |\hat{u}(\theta)|^2 d\theta < \infty \right\}.$$

Пример 2 (пространство Дирихле пространства Коши на \mathfrak{A}).

Пусть Y — процесс Коши на \mathfrak{A} , т. е. марковский процесс на \mathfrak{A} , порожденный подгруппой (Q_t) . Положим

$$\mathcal{E}_{1/2}(u) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (u - Q_t u, u);$$

$$D[\mathcal{E}_{1/2}] := W_2^{1/2} = \left\{ u \in L_2: \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (u - Q_t u, u) \text{ существует и конечен} \right\}.$$

Тогда $\mathcal{E}_{1/2}$ — регулярная форма Дирихле и имеют место соотношения:

$$\mathcal{E}_{1/2}(u) = \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \sqrt{\psi(\theta)} |\hat{u}(\theta)|^2 d\theta;$$

$$D[\mathcal{E}_{1/2}] = \left\{ u \in L_2: \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \sqrt{\psi(\theta)} |\hat{u}(\theta)|^2 d\theta < \infty \right\}.$$

Пример 3 (пространство Дирихле винеровского процесса с отражением в $\overline{\mathfrak{A}}_+$).

Пусть $E = \mathfrak{A}_+$, $\nu = dx$. Положим

$$\mathcal{E}^+(u) := \int_{\mathfrak{A}_+} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx;$$

$$D[\mathcal{E}^+] := W_2^1(\mathfrak{A}_+) = \left\{ u \in L_2: \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2 \quad (k \in N), \mathcal{E}^+(u) < \infty \right\}.$$

Опять стандартно проверяется, что форма \mathcal{E}^+ симметрична, неотрицательно определена и замкнута. Вместе с тем условие регулярности (п. 1 определения 1), как легко видеть, нарушается. Однако условие регулярности будет выполняться, если рассматривать $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$ относительно $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_+, dx)$. Действительно, множество цилиндрических функций из $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$ плотно в $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$, а каждую такую цилиндрическую функцию можно приблизить следами на $\overline{\mathfrak{A}}_+$ функций из $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ в метрике $\|\cdot\|_*^{\pm} := (\mathcal{E}^+(\cdot) + \|\cdot\|_{L_2(\mathfrak{A}_+)}^2)^{1/2}$ (см. [4, предложение 3.4]).

Пусть X — винеровский процесс на \mathfrak{A} (см. пример 1), а \tilde{X} — процесс на $\overline{\mathfrak{A}}_+$, полученный из X отражением от $\partial \mathfrak{A}_+$. Так же, как в [1, пример 4.4.2], доказывается, что $(W_2^1(\mathfrak{A}_+), \mathcal{E}^+)$ — пространство Дирихле процесса \tilde{X} .

Пример 4 (пространство Дирихле части винеровского процесса в \mathfrak{A}_+). Обозначим $W_{2,0}^1(\mathfrak{A}_+)$ подпространство гильбертова пространства ($W_2^1(\mathfrak{A}_+)$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}_+}^2$), полученное замыканием множества $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_+)$ в метрике $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}_+}^2$. Согласно [1, теорема 4.4.2], ($W_{2,0}^1(\mathfrak{A}_+)$, \mathcal{E}^+) — пространство Дирихле части процесса X на множестве \mathfrak{A}_+ .

4. **Расширенные пространства Дирихле для невозвратных процессов.** В следующем определении среди пространств Дирихле (\mathcal{F} , \mathcal{E}) на $L_2(E)$ выделяются те, для которых (\mathcal{F} , $\sqrt{\mathcal{E}}$) — предгильбертово пространство.

О п р е д е л е н и е 2. Пространство Дирихле (\mathcal{F} , \mathcal{E}) называется *невозвратным*, если существует такая функция $g \in L_1 \cap L_\infty$, $g > 0$ (v-п. в.), что $(|u|, g) \leq \sqrt{\mathcal{E}}(u)$ для любой $u \in \mathcal{F}$ (см. [1, (1.5.6)]). Процесс X называется *невозвратным*, если $Gf := \int_0^\infty P_t f dt < \infty$ (v-п. в.) для любой неотрицательной $f \in L_1$ (см. [1, (1.5.4)]).

Теорема 2. Пусть пространство Дирихле (\mathcal{F} , \mathcal{E}) соответствует процессу X по теореме 1. Тогда (\mathcal{F} , \mathcal{E}) невозвратно в том и только том случае, если процесс X невозвратен (см. [1, теорема 1.5.1]).

Пусть снова X (соответственно Y) — винеровский процесс (процесс Коши) на \mathfrak{A} . Согласно [5, 13.27], невозвратность процесса X (Y) эквивалентна тому, что функция $1/\psi(\theta)$ ($1/\sqrt{\psi(\theta)}$) лежит в $L_{1,\text{loc}}(\hat{\mathfrak{A}}, d\theta)$. Отсюда следует, что X (Y) невозвратен тогда и только тогда, когда $n \geq 3$ ($n \geq 2$). Обозначим через W_e^1 (соответственно $W_e^{1/2}$) пополнение невозвратного пространства (W_2^1, \mathcal{E}) (соответственно $(W_2^{1/2}, \mathcal{E}_{1/2})$) по метрике $\sqrt{\mathcal{E}}$ ($\sqrt{\mathcal{E}_{1/2}}$). Получаем, что W_e^1 ($W_e^{1/2}$) — гильбертово пространство, являющееся расширенным пространством Дирихле процесса X (Y) (см. [1, § 1.5]). Используя стандартную технику преобразования Фурье обобщенных функций (см. [6, введение и гл. VI]), а также [1, теорема 1.5.4] имеем:

1) $W_e^1 = \{u \in L_{1,\text{loc}}: u \text{ есть обобщенная функция медленного роста и } \hat{u} \in L_2(\hat{\mathfrak{A}}, \psi d\theta)\}$;

$$2) W_e^1 \subset \left\{ u \in L_{1,\text{loc}}: \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2 (k \in N), \int_{\mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx < \infty \right\};$$

3) $W_e^{1/2} = \{u \in L_{1,\text{loc}}: u \text{ есть обобщенная функция медленного роста и } \hat{u} \in L_2(\hat{\mathfrak{A}}, \sqrt{\psi} d\theta)\}$.

5. **Гармонические функции класса $\mathcal{H}_{W_e^1}$.** Пусть $\mathfrak{A} = R^n \times T^\infty$ ($n \geq 3$) и ($W_2^1(\mathfrak{A}_+, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}_+}^2)$) — пространство Дирихле винеровского процесса с отражением на $\bar{\mathfrak{A}}_+$ (пример 3). Из невозвратности винеровского процесса на \mathfrak{A} следует невозвратность винеровского процесса с отражением, поэтому ($W_2^1(\mathfrak{A}_+)$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}_+}^2$) — невозвратное пространство Дирихле. Обозначим через $W_e^1(\mathfrak{A}_+)$ и $W_{e,0}^1(\mathfrak{A}_+)$ пополнение $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$ и $W_{2,0}^1(\mathfrak{A}_+)$ по метрике $\sqrt{\mathcal{E}^+}$ и запишем ортогональное разложение

$$W_e^1(\mathfrak{A}_+) = W_{e,0}^1(\mathfrak{A}_+) \oplus \mathcal{H}_{W_e^1}.$$

Для удобства будем считать, что в последовательности $\{a_k\}$, определяющей форму \mathcal{E}^+ , $a_1 = 1$. В этом случае процесс X представляется в виде прямого произведения $X = (Z, X^\partial)$, где Z — стандартный винеровский процесс на R^1 , а X^∂ — винеровский процесс на $\partial\mathfrak{A}_+ \simeq R^{n-1} \times T^\infty$. В дальнейшем элементы $x \in \mathfrak{A}$ будем записывать в виде $x = (t, y)$, где $t = x_1 \in R^1$, $y = (x_2, x_3, \dots) \in R^{n-1} \times T^\infty$.

Теорема 3. 1) Пространство $\mathcal{H}_{W_e^1}$ состоит из гармонических в обобщенном смысле функций на \mathfrak{A}_+ .

2) Гильбертово пространство $(\mathcal{H}_{W_e^1}, \sqrt{\mathcal{E}^+})$ унитарно эквивалентно расширенному пространству Дирихле $(\mathcal{F}_e^\partial, \mathcal{E}^\partial)$ процесса Коши Y^∂ , ассоциированного с процессом X^∂ на $\partial\mathfrak{A}_+$:

$$\left(\mathcal{H}_{W_e^1}, \sqrt{\mathcal{E}^+} \right) \stackrel{\gamma}{\cong} \left(\mathcal{F}_e^\partial, \mathcal{E}^\partial \right),$$

где $\gamma f = f|_{\partial \mathfrak{M}_+}$ — оператор следа и $Qf(t, y) = Q_t f(y)$ — интеграл Пуассона (здесь Q_t) — полугруппа процесса Y^∂).

Доказательство. 1) Заметим, что как и в случае W_e^1 , имеет место вложение $W_e^1(\mathfrak{M}_+) \subset \{u \in L_{1, \text{loc}}(\mathfrak{M}_+): \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\mathfrak{M}_+), \mathcal{E}^+(u) < \infty\}$. Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_+)$. Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_+)$ и для любой функции $u \in \mathcal{H}_{W_e^1}(u, \Delta \varphi) = -\mathcal{E}^+(u, \varphi) = 0$, что и означает гармоничность в обобщенном смысле.

2) Для функции $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{M})$ легко устанавливается неравенство $\|u(0, \cdot)\|_{L_2(\partial \mathfrak{M}_+)} \leq c \|u\|_*^+$. Записав его для $u_\tau(t, y) = u(t + \tau, y)$ и учитывая, что $\|u_\tau\|_*^+ \leq \|u\|_*^+$, получим: $\sup_{t>0} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\partial \mathfrak{M}_+)} \leq c \|u\|_*^+$. После предельного перехода в этом неравенстве получаем аналогичное неравенство для функций из $\mathcal{H}_{W_e^1} \cap L_2(\mathfrak{M}_+)$, но с заменой \sup на ess sup . Поэтому (см. [7]) $d\mu$ -п.в. существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, y) := \gamma u(y) \in L_2(\partial \mathfrak{M}_+)$ и $u(t, y) = Q_t \gamma u(y)$. Для $u \in \mathcal{H}_{W_e^1} \cap L_2(\mathfrak{M}_+)$ прямыми вычислениями получаем равенство $\mathcal{E}^+(u) = \mathcal{E}^\partial(\gamma u)$. Так как $\mathcal{H}_{W_e^1} \cap L_2(\mathfrak{M}_+)$ плотно в $\mathcal{H}_{W_e^1}$, то из этого равенства следует, что γ — изометрия $\mathcal{H}_{W_e^1}$ в \mathcal{F}_e^∂ . С другой стороны, для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}(\partial \mathfrak{M}_+)$ функция $u(t, y) = (Q_t \varphi)(y)$ лежит в $\mathcal{H}_{W_e^1}$ и $\gamma u = \varphi$. Поскольку $\mathcal{L}(\partial \mathfrak{M}_+)$ плотно в \mathcal{F}_e^∂ , то $\gamma \mathcal{H}_{W_e^1} = \mathcal{F}_e^\partial$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для функции $u \in \mathcal{H}_{W_e^1}$ положим $\tilde{u}(t, y) = u(|t|, y)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Можно показать, что $\tilde{u} \in W_e^1$, причем $\mathcal{E}(\tilde{u}) = c \mathcal{E}^+(u)$. Отсюда следует, что $W_e^1(\mathfrak{M}_+)$ изометрично вкладывается в W_e^1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Fukushima M. Dirichlet Forms and Markov Processes. Amsterdam etc.: North-Holland/Elsevier, 1980, 196 p.
2. Бендиков А. Д., Павлов И. В. Винеровский процесс с отражением и гармонические функции с конечным интегралом энергии. — В сб.: XX школа-коллоквиум по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. / Под ред. Г. Н. Кинкладзе. Тбилиси: Мецниереба, 1986, с. 6.
3. Бендиков А. Д. О гармонических структурах, порожденных тепловым винеровским процессом на группе. — Успехи матем. наук, 1979, т. XXXIV, в. 1 (205), с. 217—218.
4. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977, 504 с.
5. Berg Ch., Forst G. Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups. Berlin — Heidelberg etc.: Springer, 1975, 197 S.
6. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966, 516 с.
7. Бендиков А. Д., Павлов И. В. Лемма Вейля для винеровского процесса на торе и характеристика интеграла Пуассона. В сб.: Случайный анализ и асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики. / Под ред. Г. М. Мания, Н. Л. Лазриевой, Т. Л. Шервашидзе. Тбилиси: Мецниереба, 1984, 128 с.

Поступила в редакцию
14.V.1986