С. Е. Тычинина, Пары T конгруэнции плоскостей в P_5, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, номер 3, 104–112

https://www.mathnet.ru/ivm3294

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 513.82

С. Е. Тычинина

ПАРЫ T КОНГРУЭНЦИЙ ПЛОСКОСТЕЙ В P_5

Будем называть плоскостью в пятимерном проективном пространстве P_5 двумерное линейное подпространство P_2, а конгруэнцией плоскостей — их двупараметрическое семейство.

1. Пусть между плоскостями конгруэнций (α) и (β) установлено взаимно однозначное соответствие. Всегда можно предполагать, что соответствующие плоскости α и β не имеют общих точек.

В работе [2] показано, что, вообще говоря, плоскость имеет три фокуса и соответствующие им три фокальных направления. В дальнейшем будут рассматриваться конгруэнции плоскостей, у которых имеется три различных фокуса.

Определение. Будем говорить, что пара конгруэнций плоскостей (α) и (β) образует одностороннюю пару T в направлении от α к β, если между фокусами плоскостей установлено такое взаимно однозначное соответствие, что инфинитезимальные смещения любого фокуса плоскости α лежат в трехмерном пространстве, определяемом плоскостью α и соответствующим фокусом плоскости β.

Без ограничения общности можно считать, что фокусы плоскости α находятся в точках A_1, A_2, A_3, а фокусы плоскости β — в точках A_4, A_5, A_6, и взаимно однозначное соответствие между фокусами установлено так, что фокусу A_α ($\alpha = 1, 2, 3$) соответствует фокус $A_{\alpha+3}$. Теперь невырождающийся гексаэдр $\{A_i\}$ ($i = 1, \ldots, 6$) примем за подвижный репер в P_5, а инфинитезимальные перемещения его определим системой дифференциальных уравнений $dA_i = \omega_i^j A_j$ ($i, j, k = 1, \ldots, 6$), где ω_i^j — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства [1]: $D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]$.

Теперь аналитически условия односторонней пары T конгруэнций плоскостей (α) и (β) в направлении от α к β запишутся в виде уравнений $(dA_\alpha A_1 A_2 A_3 A_{\alpha+3}) = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Выполняя в этих уравнениях дифференцирование и приравнивая нулю коэффициенты при внешних произведениях точек A_i, получим уравнения Пфаффа

$$\begin{gathered} \omega_1^5 = 0, \quad \omega_1^6 = 0, \quad \omega_2^4 = 0, \quad \omega_2^6 = 0, \\ \omega_3^4 = 0, \quad \omega_3^5 = 0, \quad \omega_3^6 = \omega_1^4 + \omega_2^5. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь последнее уравнение присоединено к предыдущим, причем формы ω_1^4, ω_2^5 приняты за независимые, и проведена частичная канонизация репера: коэффициенты a_3^6 и $-r_3$ [2] приведены к единице за счет закрепления вторичных форм

$$\pi_1^1 - \pi_3^3 - \pi_4^4 + \pi_6^6 = 0, \quad \pi_1^1 - \pi_2^2 - \pi_4^4 + \pi_5^5 = 0.$$

Гексаэдр $\{A_i\}$ с компонентами (1) назовем гексаэдром 1-го порядка конгруэнции плоскостей (α), геометрическая характеристика которого состоит в том, что фокусы плоскости α находятся в точках A_1, A_2, A_3, а соответствующие им фокальные направления определяются уравнениями $\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^5 = 0$, $\omega_1^4 + \omega_2^5 = 0$.

Аналитически условия того, что точки A_4, A_5, A_6 помещены в фокусы плоскости β, имеют вид

$$\begin{gathered}\omega_4^2 = a'\omega_4^1, \quad \omega_4^3 = b'\omega_4^1, \quad \omega_5^1 = a_1'\omega_5^2, \\ \omega_5^3 = b_1'\omega_5^2, \quad \omega_6^1 = a_2'\omega_6^3, \quad \omega_6^2 = b_2'\omega_6^3.\end{gathered} \tag{2}$$

Система уравнений (1) определяет произвольную конгруэнцию плоскостей (α). Замыкая ее, получим систему уравнений (малую), которая находится в инволюции с характерами $s_1 = 7$, $s_2 = 7$. Дифференцируя внешним образом уравнения (1), (2), получим замкнутую систему уравнений, которая определяет одностороннюю пару T конгруэнций плоскостей. Если теперь задать некоторое решение малой системы и внести его в систему уравнений, определяющую одностороннюю пару T, то оставшаяся замкнутая система уравнений будет находиться в инволюции с характерами $s_1 = 6$, $s_2 = 3$, т. е. справедлива

Теорема. *К произвольно заданной конгруэнции плоскостей* (α) *с произволом трех функций двух аргументов можно присоединить конгруэнцию плоскостей* (β) *так, чтобы пара конгруэнций* (α) *и* (β) *образовывала одностороннюю пару T в направлении от α к β.*

Эта теорема дает возможность ввести понятие преобразования T_1 конгруэнции плоскостей (α), т. е. такой переход от произвольно заданной конгруэнции плоскостей (α) к конгруэнции плоскостей (β), при котором пара конгруэнций плоскостей (α) и (β) образует одностороннюю пару T в направлении от α к β. Таким образом, преобразование T_1 конгруэнции плоскостей существует с произволом трех функций двух аргументов. Отметим, что преобразование T_1^{-1} конгруэнции плоскостей существует с произволом трех функций двух аргументов.

Односторонние пары T конгруэнций плоскостей в P_5 являются аналогом пар T_1 трехмерного проективного пространства [3].

2. Каждый фокус плоскости α конгруэнции плоскостей (α) описывает двумерное многообразие точек — фокальную поверхность конгруэнции плоскостей (α). Плоскость α не касается ни одной из фокальных поверхностей. В каждой точке фокальной поверхности можно провести касательную плоскость, которую назовем фокальной. Таким образом, каждой плоскости α конгруэнции плоскостей (α) соответствуют три фокальных плоскости.

Парой T' конгруэнций плоскостей (α) и (β) будет односторонняя пара T конгруэнций плоскостей в направлении от α к β в случае, если фокальные плоскости плоскости α проходят через соответствующие фокусы плоскости β.

Односторонняя пара T конгруэнций плоскостей будет являться парой T', если имеют место уравнения

$$\omega_1^3 = \lambda_1\omega_1^2, \quad \omega_2^3 = \lambda_2\omega_2^1, \quad \omega_3^2 = \lambda_3\omega_3^1. \tag{3}$$

Система уравнений (1) — (3) определяет пары T' с произволом семи функций двух аргументов.

3. Будем говорить, что фокальные направления плоскостей α и β конгруэнций плоскостей (α) и (β) соответствуют прямо, если фокальные направления соответствующих фокусов этих плоскостей записываются одним и тем же уравнением. У односторонней пары T конгруэнций плоскостей фокальные направления соответствуют прямо тогда и только тогда, когда имеют место уравнения

$$\omega_4^1 = r_1\omega_1^4, \quad \omega_5^2 = r_2\omega_2^5, \quad \omega_6^3 = r_3(\omega_1^4 + \omega_2^5). \tag{4}$$

Исследование на совместность системы уравнений (1), (2), (4) показывает, что односторонние пары T конгруэнций плоскостей с прямым соответствием фокальных направлений существуют с произволом семи функций двух аргументов.

Если назвать преобразованием T_2 конгруэнции плоскостей (α) такой переход от произвольно заданной конгруэнции плоскостей (α) к конгруэнции плоскостей (β), при котором пара конгруэнций плоскостей (α) и (β) образует одностороннюю пару T в направлении от (α) к (β) с прямым соответствием фокальных направлений, то справедлива

Теорема. *Преобразование T_2 конгруэнции плоскостей существует с произволом девяти функций одного аргумента.*

Для преобразования T_2 конгруэнции плоскостей существует с произволом девяти функций одного аргумента обратное ему преобразование T_2^{-1}, т. е. такой переход от произвольно заданной конгруэнции плоскостей (α) к конгруэнции плоскостей (β), при котором пара конгруэнций плоскостей (α) и (β) образует одностороннюю пару T в направлении от (β) к (α) с прямым соответствием фокальных направлений.

Система уравнений Пфаффа (1) — (4) определяет пару T' конгруэнций плоскостей с прямым соответствием фокальных направлений. Исследование этой системы уравнений на совместность показывает, что пара T' конгруэнций плоскостей с прямым соответствием фокальных направлений существует с произволом четырех функций двух аргументов.

4. Если в односторонней паре T конгруэнций плоскостей (α) и (β) фокальные направления фокусов A_1 и A_5, A_2 и A_6, A_3 и A_4 записываются одним и тем же уравнением, то будем говорить, что фокальные направления находятся в циклическом соответствии. Чтобы получить уравнения такой пары, достаточно к уравнениям, определяющим одностороннюю пару T, присоединить уравнения

$$\omega_5^2 = \gamma_1\omega_1^4, \quad \omega_6^3 = \gamma_2\,\omega_2^5, \quad \omega_4^1 = \gamma_3\,(\omega_1^4 + \omega_2^5). \tag{5}$$

Исследование полученной системы показывает, что односторонняя пара T с циклическим соответствием существует с произволом семи функций двух аргументов.

Переход от произвольно заданной конгруэнции плоскостей (α) к конгруэнции плоскостей (β), при котором пара конгруэнций плоскостей (α) и (β) образует одностороннюю пару T в направлении от (α) к (β), обладающую свойством циклического соответствия фокальных направлений, назовем преобразованием T_3 конгруэнции плоскостей (α). Преобразование T_3 конгруэнции плоскостей существует с произволом девяти функций одного аргумента. С таким же произволом существует и преобразование T_3^{-1} (обратное для T_3) конгруэнции плоскостей (α).

Система уравнений Пфаффа (1) — (3), (5) определяет пару T' конгруэнций плоскостей с циклическим соответствием фокальных направлений. Такая конфигурация существует с произволом четырех функций двух аргументов.

5. Будем говорить, что пара конгруэнций плоскостей (α) и (β) образует пару T, если она образует одностороннюю пару T как в направлении от (α) к (β), так и в направлении от (β) к (α). Пара T конгруэнций плоскостей в гексаэдре $\{A_i\}$ первого порядка определяется уравнениями (1) и уравнениями

$$\omega_4^2=0,\ \omega_4^3=0,\ \omega_5^1=0,\ \omega_5^3=0,\ \omega_6^1=0,\ \omega_6^2=0. \qquad (6)$$

Уравнения (6) показывают, что в этом случае гексаэдр $\{A_i\}$ является гексаэдром первого порядка и для конгруэнции плоскостей (β). Фокальные направления для фокусов A_4, A_5, A_6 плоскости β определяются соответственно уравнениями

$$\omega_4^1=0,\quad \omega_5^2=0,\quad \omega_6^3=0. \qquad (7)$$

Результатом исследования системы уравнений (1), (6) на совместность будет следующая

Теорема. *Пары T конгруэнций плоскостей существуют с произволом четырех функций двух аргументов.*

Пары T конгруэнций плоскостей являются аналогом пар T конгруэнций прямых в трехмерном проективном пространстве [4].

6. Две точки $A=a^iA_i$ и $B=b^iA_i$ $(i=1,\ldots,6)$ определяют в P_5 аналитическую прямую. Из координат точек A и B можно составить матрицу, которая, в свою очередь, дает возможность составить 15 определителей 2-го порядка $p^{ij}=a^ib^j-a^jb^i$ (i, j брать по сочетаниям). Пятнадцать чисел p^{ij} могут быть приняты за линейные координаты некоторой прямой в том и только в том случае, если они удовлетворяют так называемым условиям Плюккера [4], вывод которых мы опускаем:

$$\begin{aligned}
&p^{12}p^{34}+p^{13}p^{42}+p^{14}p^{23}=0, && p^{45}p^{61}+p^{46}p^{15}+p^{41}p^{56}=0,\\
&p^{23}p^{45}+p^{24}p^{53}+p^{25}p^{34}=0, && p^{56}p^{12}+p^{51}p^{26}+p^{52}p^{61}=0,\\
&p^{34}p^{56}+p^{35}p^{64}+p^{36}p^{45}=0, && p^{61}p^{23}+p^{62}p^{31}+p^{63}p^{12}=0.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Таким образом, среди линейных координат p^{ij} прямой (AB) существенных будет только восемь.

Рассмотрим теперь аналитическую прямую $p=\sum\limits_{(i,j)}^{1,\ldots,6} p^{ij}(A_iA_j)$ (суммировать по сочетаниям). Ясно, что ее линейные координаты p^{ij} должны удовлетворять условиям (8). Уравнение

$$\{ap\}\equiv\sum_{(i,j)}^{1,\ldots,6} a_{ij}p^{ij} \qquad (9)$$

связывает координаты p^{ij} прямой p линейным уравнением и определяет прямые p с семью произвольными параметрами. Геометрическое место прямых p, линейные координаты которых удовлетворяют уравнению (9), назовем линейным гиперкомплексом в P_5.

Теорема. *Пара конгруэнций плоскостей* (α) *и* (β), *между плоскостями которых установлено взаимно однозначное соответствие, образует пару T тогда и только тогда, когда она допускает двупараметрическое семейство (связку) касательных гиперкомплексов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть имеется пара T конгруэнций плоскостей. Обозначим через a искомый линейный гиперкомплекс, отнесенный к неподвижной системе координат. Любая прямая плоскости α будет принадлежать линейному гиперкомплексу $\mathfrak{a}$, если

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}(A_2A_3)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}(A_1A_3)\}=0. \tag{10}$$

Аналогично, любая прямая плоскости β будет принадлежать линейному гиперкомплексу $\mathfrak{a}$, если

$$\{\mathfrak{a}(A_4A_5)\}=0, \ \{\mathfrak{a}(A_5A_6)\}=0, \ \{\mathfrak{a}(A_4A_6)\}=0. \tag{11}$$

Продифференцировав уравнения (10) при постоянном $\mathfrak{a}$ в силу уравнений (1), получим: $\{\mathfrak{a}, \omega_1^4(A_4A_2)+\omega_2^5(A_1A_5)\}=0$, $\{\mathfrak{a}, \omega_2^5(A_5A_3)+(\omega_1^4+\omega_2^5)(A_2A_6)\}=0$, $\{\mathfrak{a}, \omega_1^4(A_4A_3)+(\omega_1^4+\omega_2^5)(A_1A_6)\}=0$. Отсюда в силу независимости форм ω_1^4 и ω_2^5 получаем шесть уравнений:

$$\begin{aligned}&\{\mathfrak{a}(A_2A_4)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}(A_1A_5)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}(A_3A_5)\}=0,\\ &\{\mathfrak{a}(A_2A_6)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}(A_1A_6)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}(A_3A_4)\}=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Дифференцирование уравнений (11) в силу уравнений (6), (11), (12) приводит к тождествам. Таким образом, имеем двенадцать независимых уравнений (10) — (12) на четырнадцать существенных координат линейного гиперкомплекса, что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть имеется пара конгруэнций плоскостей (α) и (β), между плоскостями которых установлено взаимно однозначное соответствие. Потребуем, чтобы она допускала связку касательных линейных гиперкомплексов $\mathfrak{a}$.

Отнесем конгруэнцию плоскостей (α) к гексаэдру $\{A_i\}$ 1-го порядка, тогда будут иметь место уравнения (1). По допущению, уравнения (10) и (11) имеют место. Дифференцирование уравнений (10) приводит к уравнениям (12). Продифференцировав теперь уравнения (11), получим

$$\{\mathfrak{a}, \omega_4^2(A_2A_5)+\omega_5^1(A_4A_1)\}=0, \quad \{\mathfrak{a}, \omega_5^3(A_3A_6)+\omega_6^2(A_5A_2)\}=0,$$
$$\{\mathfrak{a}, \omega_4^3(A_3A_6)\}+\omega_6^1(A_4A_1)\}=0. \tag{13}$$

Так как ищется связка касательных линейных гиперкомплексов, то уравнения (13) должны обращаться в тождества, но это возможно тогда и только тогда, когда имеют место уравнения (6), что и доказывает достаточность.

7. Обозначим буквами c_{ik} коэффициенты в уравнении гиперповерхности второго порядка, которую будем рассматривать относительно неподвижной системы координат. Условимся записывать полярную форму для гиперповерхности второго порядка G в виде произведения $\{G, MN\}\equiv c_{ik}x^iy^k$, $c_{ik}=c_{ki}$ $(i=1, \ldots, 6)$, где M и N — аналитические точки с координатами (x^i) и (y^i). Тогда уравнение гиперквадрики G можно записать в виде равенства

$$\{G, MM\}=0. \tag{14}$$

Будем говорить, что гиперквадрика G является полукасательной для конгруэнции плоскостей (α), если она содержит не только все точки плоскости α, но и первые дифференциальные окрестности ее фокусов.

Теорема. *Пара конгруэнций плоскостей* (α) *и* (β), *между плоскостями которых установлено взаимно однозначное соответствие, образует пару T тогда и только тогда, когда для них существует пятипараметрическое семейство полукасательных гиперквадрик.*

Доказательство. Необходимость. Пусть конгруэнции плоскостей (α) и (β) образуют пару T. Произвольная точка $N=A_1+$

$+\lambda A_2+\mu A_3$ плоскости α будет принадлежать гиперквадрике G, если $\{G,(A_1+\lambda A_2+\mu A_3)(A_1+\lambda A_2+\mu A_3)\}=0$ при любых значениях λ и μ. Отсюда получаем

$$\begin{gathered}\{G,\ A_1A_1\}=0,\quad \{G,\ A_2A_2\}=0,\quad \{G,\ A_3A_3\}=0,\\ \{G,\ A_1A_2\}=0,\quad \{G,\ A_2A_3\}=0,\quad \{G,\ A_1A_3\}=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Аналогично, если любая точка плоскости (β) принадлежит гиперквадрике G, то будут иметь место уравнения

$$\begin{gathered}\{G,\ A_4A_4\}=0,\quad \{G,\ A_5A_5\}=0,\quad \{G,\ A_6A_6\}=0,\\ \{G,\ A_4A_5\}=0,\quad \{G,\ A_5A_6\}=0,\quad \{G,\ A_4A_6\}=0.\end{gathered} \tag{16}$$

Продифференцировав первые три уравнения (15), учитывая уравнения (1), получим

$$\{G,\ A_1A_4\}=0,\quad \{G,\ A_2A_5\}=0,\quad \{G,\ A_3A_6\}=0. \tag{17}$$

В силу уравнений (6), (16), (17) дифференцирование первых трех уравнений (16) приводит к тождествам. Уравнения (15) — (17) дают возможность определить 15 из 20 существенных параметров гиперквадрики, что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть имеется произвольная пара конгруэнций плоскостей (α) и (β), между плоскостями которых установлено взаимно однозначное соответствие. Отнесем конгруэнцию плоскостей (α) к гексаэдру $\{A_i\}$ 1-го порядка, тогда будут иметь место уравнения (1).

Пусть гиперквадрика G удовлетворяет требованиям (15) – (17). Продифференцировав первые три уравнения (16), получим: $\{G,\omega_4^2(A_2A_4)+\omega_4^3(A_3A_4)\}=0$, $\{G,\omega_5^1(A_1A_5)+\omega_5^3(A_3A_5)\}=0$, $\{G,\omega_6^1(A_1A_6)+\omega_6^2(A_2A_6)\}=0$. Так как ищется пятипараметрическое семейство полукасательных гиперквадрик, то эти уравнения должны обращаться в тождество, а это возможно тогда и только тогда, когда имеют место уравнения (6); это и доказывает достаточность.

8. Уравнения Пфаффа

$$\begin{gathered}\omega_4^5=k_1\omega_2^1,\quad \omega_1^2=k_1\omega_5^4,\quad \omega_4^6=k_2\omega_3^1,\\ \omega_1^3=k_2\omega_6^4\quad \omega_5^6=k_3\omega_3^2,\quad \omega_2^3=k_3\omega_6^5\end{gathered} \tag{18}$$

приводят к особому случаю пары T конгруэнций плоскостей. Исследование системы уравнений (1), (7), (18) показывает, что в этом случае пара T конгруэнций плоскостей существует с произволом одной функции двух аргументов.

Для выяснения геометрического смысла этого особого решения рассмотрим линейный гиперкомплекс $\mathfrak{a}_1$ и покажем, что двупараметрические семейства прямых (A_1A_2), (A_4A_5), (A_3A_5), (A_1A_6), (A_1A_5) принадлежат этому линейному гиперкомплексу. Действительно, тогда должны иметь место уравнения

$$\begin{gathered}\{\mathfrak{a}_1(A_1A_2)\}=0,\quad \{\mathfrak{a}_1(A_4A_5)\}=0,\quad \{\mathfrak{a}_1(A_3A_5)\}=0,\\ \{\mathfrak{a}_1(A_1A_6)\}=0,\quad \{\mathfrak{a}_1(A_1A_5)\}=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Продифференцировав уравнения (19), получим:

$$\begin{gathered}\{\mathfrak{a}_1,\ \omega_1^3(A_3A_2)+\omega_1^4(A_4A_2)+\omega_2^3(A_1A_3)\}=0,\\ \{\mathfrak{a}_1,\ \omega_4^6(A_6A_5)+\omega_5^2(A_4A_2)+\omega_5^6(A_4A_6)\}=0,\\ \{\mathfrak{a}_1,\ \omega_3^2(A_2A_5)+\omega_3^6(A_6A_5)+\omega_5^2(A_3A_2)\}+\omega_5^4(A_3A_4)+\omega_5^6(A_3A_6)\}=0,\\ \{\mathfrak{a}_1,\ \omega_1^2(A_2A_6)+\omega_1^3(A_3A_6)+\omega_1^4(A_4A_6)\}+\omega_6^3(A_1A_3)+\omega_6^4(A_1A_4)\}=0,\\ \{\mathfrak{a}_1,\ \omega_1^2(A_2A_5)+\omega_5^4(A_1A_4)\}=0.\end{gathered} \tag{20}$$

Найдя наиболее общее алгебраическое решение внешних дифференциалов уравнений (1), (6), (18), подставив затем в уравнения (20) вместо форм ω_i^j их разложения по независимым формам ω_1^4, ω_2^5 и приравняв нулю коэффициенты при независимых формах, получим только девять (!) независимых уравнений, которые вместе с уравнениями (19) дают возможность определить все координаты линейного гиперкомплекса $\mathfrak{a}_1$. Аналогичные линейные гиперкомплексы $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_5$, $\mathfrak{a}_6$ можно найти соответственно для двупараметрических семейств прямых:

2) (A_1A_2), (A_4A_5), (A_3A_4), (A_2A_6), (A_2A_4),
3) (A_1A_3), (A_4A_6), (A_2A_4), (A_3A_5), (A_3A_4),
4) (A_1A_3), (A_4A_6), (A_2A_6), (A_1A_5), (A_1A_6),
5) (A_2A_3), (A_5A_6), (A_1A_5), (A_3A_4), (A_3A_5),
6) (A_2A_3), (A_5A_6), (A_1A_6), (A_2A_4), (A_2A_6).

Систему линейных гиперкомплексов $\mathfrak{a}_i$ $(i=1,\dots,6)$ назовем системой K-гиперкомплексов. Таким образом, доказана

Теорема. *Пара T конгруэнций плоскостей, допускающая систему K-гиперкомплексов, существует с произволом одной функции двух аргументов.*

9. Рассмотрим специальный случай. Пусть

$$k_2 = -k_1k_3. \tag{21}$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (18) с учетом (21), получим

$$\begin{gathered}[\Delta k_1\omega_2^1]=0, \quad [\Delta k_1\omega_5^4]=0,\\ [k_3\Delta k_1 + k_1\Delta k_3,\ \omega_3^1]=0, \quad [k_3\Delta k_1 + k_1\Delta k_3,\ \omega_6^4]=0,\\ [\Delta k_3\omega_3^2]=0, \quad [\Delta k_3\omega_6^5]=0,\end{gathered} \tag{21$_1$}$$

где $\Delta k_1 = dk_1 - k_1(\omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4 - \omega_6^6)$, $\Delta k_3 = dk_3 - k_3(\omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_5^5 - \omega_6^6)$.

Из уравнений (21$_1$) видно, что возможны два случая:

1) $\Delta k_1 = 0,\ \Delta k_3 = 0;$ (22)

2) $\omega_2^1 = \nu_1\omega_5^4,\ \omega_3^1 = \nu_2\omega_6^4,\ \omega_3^2 = \nu_3\omega_6^5.$ (23)

В первом случае пара T конгруэнций плоскостей определяется системой уравнений Пфаффа (1), (6), (18), (21), (22) и существует с произволом четырех функций двух аргументов.

Геометрический смысл этого решения состоит в том, что конгруэнции плоскостей (α) и (β) принадлежат одному и тому же линейному гиперкомплексу $\mathfrak{a}$ (здесь плоскости α и β рассматриваются как геометрическое место всевозможных прямых, им принадлежащих).

Действительно, в п. 6 при нахождении связки касательных линейных гиперкомплексов были получены уравнения (10) — (12). Дифференцированием уравнений (12) находим:

$$\begin{gathered}\{\mathfrak{a},\ \omega_2^1(A_1A_4) + \omega_4^5(A_2A_5)\} = 0,\\ \{\mathfrak{a},\ \omega_1^2(A_2A_5) + \omega_5^4(A_1A_4)\} = 0,\\ \{\mathfrak{a},\ \omega_3^2(A_2A_5) + \omega_5^6(A_3A_6)\} = 0,\\ \{\mathfrak{a},\ \omega_2^3(A_3A_6) + \omega_6^5(A_2A_5)\} = 0,\\ \{\mathfrak{a},\ \omega_1^3(A_3A_6) + \omega_6^4(A_1A_4)\} = 0,\\ \{\mathfrak{a},\ \omega_3^1(A_1A_4) + \omega_4^6(A_3A_6)\} = 0.\end{gathered}$$

Эти уравнения эквивалентны только двум уравнениям:

$$\{\mathfrak{a},\ (A_1A_4)+k_1(A_2A_5)\}=0,\quad \{\mathfrak{a},\ (A_2A_5)+k_3(A_3A_6)\}=0, \tag{24}$$

дифференцирование которых приводит к тождествам. Таким образом, имеем 14 независимых уравнений (10) — (12), (24) на 14 существенных координат линейного гиперкомплекса $\mathfrak{a}$, т. е. доказана

Теорема. *Существует с произволом четырех функций двух аргументов пара T конгруэнций плоскостей, принадлежащая одному и тому же линейному гиперкомплексу.*

Этому решению можно дать еще одну геометрическую характеристику. В п. 7 было найдено пятипараметрическое семейство полукасательных гиперквадрик G, которое определяется системой уравнений (15) — (17). Продифференцировав уравнения (17) и имея в виду уравнения (18), (21), получим:

$$\begin{gathered}\{G,\ k_1\omega_5^4(A_2A_4)-k_1k_3\omega_6^4(A_3A_4)+k_1\omega_2^1(A_1A_5)-k_1k_3\omega_3^1(A_1A_6)\}=0,\\ \{G,\ \omega_2^1(A_1A_5)+k_3\omega_6^5(A_3A_5)+\omega_5^4(A_2A_4)+k_3\omega_3^2(A_2A_6)\}=0,\\ \{G,\ \omega_3^1(A_1A_6)+\omega_3^2(A_2A_6)+\omega_6^4(A_3A_4)+\omega_6^5(A_3A_5)\}=0.\end{gathered}\tag{25}$$

Умножая второе уравнение (25) на $-k_1$, а третье уравнение на k_1k_3 и складывая все три уравнения (25), получим тождество. Следовательно, среди уравнений (25) независимых только два.

Найдя наиболее общее алгебраическое решение замкнутой системы этого случая, подставив в уравнения (25) вместо форм ω_i^j их разложения по независимым формам ω_1^4, ω_2^5 и приравняв нулю коэффициенты при независимых формах, получим четыре независимых уравнения, которые вместе с уравнениями (15) — (17) дают возможность определить 19 из 20 существенных коэффициентов гиперквадрики. Эту гиперквадрику назовем полусоприкасающейся для пары T конгруэнций плоскостей (α) и (β).

Таким образом, в рассмотренном специальном случае пара T конгруэнций плоскостей (α) и (β) допускает однопараметрическое семейство полусоприкасающихся гиперквадрик.

Отметим, что это специальное решение является аналогом особого решения пар T конгруэнций прямых в P_3 ([4], с. 259).

10. В случае (23) пара T конгруэнций плоскостей определяется системой уравнений Пфаффа (1), (6), (18), (23), к которым нужно присоединить уравнение (21). Исследование этой системы показывает, что пара T конгруэнций плоскостей в этом случае существует с произволом двенадцати функций одного аргумента.

Геометрический смысл этого решения состоит в том, что для двупараметрических семейств прямых (A_1A_4), (A_2A_5), (A_3A_6) существует связка соприкасающихся линейных гиперкомплексов $\mathfrak{a}$. В самом деле, тогда должны иметь место уравнения

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_4)\}=0,\quad \{\mathfrak{a}(A_2A_5)\}=0,\quad \{\mathfrak{a}(A_3A_6)\}=0, \tag{26}$$

дифференцирование которых приводит только к трем уравнениям:

$$\begin{gathered}\{\mathfrak{a},\ (A_2A_4)+\nu_1(A_1A_5)\}=0,\ \{\mathfrak{a},\ (A_3A_4)+\nu_2(A_1A_6)\}=0,\\ \{\mathfrak{a},\ (A_3A_6)+\nu_3(A_2A_6)\}=0.\end{gathered}\tag{27}$$

Новое дифференцирование уравнений (27) приводит к шести независимым уравнениям, которые вместе с уравнениями (26), (27) дают 12 уравнений на 14 существенных координат линейного гиперкомплекса $\mathfrak{a}$, что и доказывает наше утверждение. Рассмотренные линейные гиперкомплексы $\mathfrak{a}$ назовем дополнительными для пары T конгруэнций плоскостей (α) и (β). Таким образом, справедлива

Теорема. *Пара T конгруэнций плоскостей, допускающая связку дополнительных соприкасающихся гиперкомплексов, существует с произволом двенадцати функций одного аргумента.*

11. Система уравнений Пфаффа (1), (4), (6) определяет пару T конгруэнций плоскостей с прямым соответствием фокальных направлений. Исследование этой системы показывает, что имеет место

Теорема. *Пара T конгруэнций плоскостей с прямым соответствием фокальных направлений существует с произволом одной функции двух аргументов.*

Если к системе уравнений Пфаффа (1), (4), (6) присоединить уравнения (18), (21), (22), то получим пару T конгруэнций плоскостей, принадлежащую одному и тому же линейному гиперкомплексу, у которой фокальные направления обладают свойством прямого соответствия. Исследование этой системы показывает, что такая пара T конгруэнций плоскостей существует с произволом одной функции двух аргументов.

12. Пару конгруэнций плоскостей, образующую и пару T и пару T', назовем парой T'' конгруэнций плоскостей. Пара T'' конгруэнций плоскостей определяется системой уравнений Пфаффа (1), (3), (6) и существует, как показывает исследование этой системы, с произволом одной функции двух аргументов. Система уравнений (1), (3), (6), (18), (21), (22) определяет пару T'' конгруэнций плоскостей, принадлежащую одному и тому же линейному гиперкомплексу прямых, которая существует с произволом одной функции двух аргументов.

13. Пара T конгруэнций плоскостей, у которой фокальные направления обладают свойством циклического соответствия, определяется системой уравнений Пфаффа (1), (5), (6) и существует с произволом одной функции двух аргументов.

Система уравнений (1), (5), (6), (18), (21), (22) определяет пару T конгруэнций плоскостей, принадлежащую одному и тому же линейному гиперкомплексу прямых, у которой фокальные направления обладают свойством циклического соответствия. Такая конфигурация существует с произволом одной функции двух аргументов.

г. Горький

Поступило
16 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Шепеленко Л. М. Проективное изгибание двупараметрического семейства $(p-1)$-плоскостей в $(2p-1)$-мерном проективном пространстве. Тр. Томск. ун-та, т. 161, 1962, с. 29—38.
3. Гейдельман Р. М. Сопряженные пары T_1. УМН, т. XV, вып. 4, 1960, с. 137—140.
4. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. М., Гостехиздат, 1956.