R. S. Makin, Existence of a leading eigenvalue for a linearized problem in reactor dynamics, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 1, 80–81

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 80—81

УДК 517.948

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ РЕАКТОРОВ

Р. С. Макин

1. Рассматривается линейный оператор $\mathscr{L} = A + \Lambda : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $A = \operatorname{diag}\left\{-aL, -z_1, \ldots, -z_p, -\frac{1}{\alpha} l\right\}$, $\{L\}_{jk} = \operatorname{div} d_j(x) \operatorname{grad} \cdot \delta_{jk}$, $l = \operatorname{div} d(x) \operatorname{grad}$, $a = \operatorname{diag} \times \{a_j\}$, $j, k = 1, \ldots, m$, в пространстве $\mathscr{H}\ (= L_2^m(V) \times L_2^{p+1}(V))$ вектор-функций $\varphi(x)\ (= \operatorname{col}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1}\})$, где $\varphi_0(x) = \operatorname{col}\{\varphi_0^1, \ldots, \varphi_0^m\}$, $L_2^n(V)$ — прямая сумма n копий гильбертова пространства $L_2(V)$ с обычным определением нормы. Λ — $(m + p + 1 \times m + p + 1)$ — матрица с ограниченными вещественными в области $V \subset R^n$, $\operatorname{mes} V < \infty$, $n \leqslant 3$, элементами $(0 \leqslant)\, p_{ij}(x)$, $x \in V$, $i, j = 1, \ldots, m + p + 1$; $d(x)$, $d_k(x) \in C^1(\overline{V})$, $(0 <)\, \alpha(x) \in C(\overline{V})$, $a_k > 0$, $d_k > 0$, $d > 0$, $x \in V$; $z_l > 0$, $z_l \neq z_\nu$, $l \neq \nu$, $k = 1, \ldots, m$; $l, \nu = 1, \ldots, p$. Под оператором $L\ (l)$ в $L_2^m(V)\ (L_2(V))$ будем понимать равномерно эллиптический оператор с однородными граничными условиями, удовлетворяющими условию Шапиро — Лопатинского. Определим структуру оператора Λ: $p_{ij}(x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, m$, $m + p + 1$; $p_{ij}(x) > 0$, $i = 1, \ldots, m$; $m, j = m + 1, \ldots, m + p$; $p_{ij}(x) > 0$, $i = m + 1, \ldots, m + p + 1$; $j = 1, \ldots, m$, $m + p + 1$; $p_{ij} \equiv 0$, $i = m + 1, \ldots, m + p + 1$; $j = m + 1, \ldots, m + p + 1$; и операторы $P_\nu(x)$ с элементами $p_{ij_\nu}^\nu(x) \equiv p_{ij_\nu}(x)$, $i = 1, \ldots, m$; $j_1 = 1, \ldots, m$; $j_2 = m + p + 1$; $\nu = 1, 2$, $x \in V$.

Задача выделения *ведущего собственного значения* (в. с. зн.) для оператора, полученного линеаризацией нестационарной системы уравнений динамики реакторов, является одной из основных в математической теории реакторов (задачи теории управления, теории устойчивости, универсальности поведения нелинейных динамических систем и т. д.) [1—4]. Ряд результатов для распределенных моделей получен в [1, 3, 4].

Операторы с непустым существенным спектром, к которым принадлежит оператор $\mathscr{L}$, аналитически зависящие от спектрального параметра, исследовались в [3—8]. В частности, ряд результатов для системы уравнений кинетики ядерного реактора получен в [7, 8].

2. Очевидно, Λ: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ линейный ограниченный оператор; A: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — замкнутый неограниченный оператор с плотной в $\mathscr{H}$ областью определения. Спектр $\sigma(A) = \sigma_p(-aL) \cup \sigma_p(-\alpha^{-1} l) \cup \sigma_e(A)$; $\sigma_p(B)\ (\equiv \{-\lambda_j(B)\})$, $\sigma_e(B)$ — множество изолированных точек дискретного спектра и существенный спектр оператора B, причем множество $\{-z_k\}$ исчерпывает $\sigma_e(A)$. Оператор A порождает C_0 — полугруппу $T_t(A)$ с оценкой

$$\| T_t(A) \| \leqslant \exp(-\mu t), \quad \mu = \min\{\lambda_1(-aL), \min_{1 \leqslant k \leqslant p}\{-z_k\}, \lambda_1(-\alpha^{-1} l)\}. \tag{1}$$

Лемма 1. *В указанных предположениях ограниченный в* $\mathscr{H}$ *оператор* $R_\lambda(A)\Lambda$ $(\equiv (\lambda I - A)^{-1}\Lambda)$, $\lambda \notin \sigma(A)$, *обладает свойствами*: 1) *аналитичен по* $\lambda \notin \sigma(A)$; 2) *справедливы оценки* $\| R_\lambda(A) \Lambda \| \leqslant \| \Lambda \| / | \lambda + \mu |$, $\operatorname{Re} \lambda > -\mu$; $\| R_\lambda(A) \Lambda \| \leqslant \| \Lambda \| / \operatorname{Im} \lambda$, $\{\operatorname{Re} \lambda \leqslant -\mu\} \setminus \{\operatorname{Im} \lambda = 0\}$; 3) *оператор* $\{R_\lambda(A)\Lambda\}^2$ *вполне непрерывен из* $\mathscr{H}$ *в* $\mathscr{H}_\infty$ $(= L_\infty^m(V) \times L_\infty^{p+1}(V))$.

Пусть конус K в $L_2(V)$ воспроизводящий, нормальный и миниэдральный [9]. В $L_2^m(V)$ введем конус $K_p\ (= K \times \ldots \times K)$, $p = m$, неотрицательных функций; аналогично вводится конус K_p^∞, $p = m$, в $L_\infty^m(V)$, а также $\mathscr{K}\ (= \bigoplus_{i=1}^{m+p+1} K_i)$ $(K_\infty = \bigoplus_{i=1}^{m+p+1} K_i^\infty)$ — конус неотрицательных функций в $\mathscr{H}\ (\mathscr{H}_\infty)$. Введем матрицу $P_1^{\max}$ с элементами $\{P_1^{\max}\}_{ij} = \max_{x \in V} p_{ij}^1(x)$, $i, j = 1, \ldots, m$.

Лемма 2. *Пусть* $P_2 K_m \subset K_m$ *и* $P_1^{\max}$ — *неразложимая матрица*, q — *степень минимального многочлена* $P_1^{\max}$ [10]. *Тогда*: 1) $\{R_\beta(A)\Lambda\}$, $\beta > -\mu$ (*сильно*) *положителен относительно конуса* $\mathscr{K}\ (\mathscr{K}_\infty)$; 2) $\{R_{\beta_1}(A)\Lambda\}\psi \geqslant \{R_{\beta_2}(A)\Lambda\}\psi$, $-\mu < \beta_1 < \beta_2$, $\psi \in \mathscr{K}$; 3) *существует* $u_0, -u_0 \notin \mathscr{K}_\infty$, *такая, что в проколотой окрестности точки* $(-\mu)$ $\{R_\beta(A)\Lambda\}^n u_0 \geqslant \alpha(\beta) u_0$, *где* $n \geqslant 3$, $q < 3$; $n \geqslant q$, $q > 3$, *и* $(0 <)\, \alpha(\beta) \to \infty$ *при* $\beta \to -\mu + 0$.

Доказательство п. 1) основано на (сильной) положительности $R_\lambda(-aL)$, $R_\lambda(\alpha^{-1}l)$ относительно K_m и K (K_m^∞, K^∞) (см. [2], § 25; [3]), откуда вытекает (сильная) положительность $R_\beta(A)$, $\beta > -\mu$, относительно $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}_\infty$). Далее с помощью леммы 1, свойств Λ и условий леммы устанавливается п. 1). Пункт 2) леммы следует из тождества Гильберта и п. 1). Доказательство п. 3) опирается на простоту в. с. зн. операторов $-aL$ и $-\alpha^{-1}l$, справедливость п. 1) и условий леммы. Существование простого положительного с. зн. для 1-й краевой задачи с эллиптическим уравнением 2-го порядка установлено в [10] с помощью метода барьерной оценки (см. также [2, 4]).

Из лемм 1 и 2 вытекает следующий результат.

Лемма 3. *В условиях леммы 2* $\sigma(R_\lambda(A)\Lambda) = \{\mu_j(\lambda)\} \cup \{0\}$, $\lambda \notin \sigma(A)$; *существует простое с. зн.* $(0 <)\ \mu_0(\lambda) > |\mu_j(\lambda)|$, $\lambda = \beta > -\mu$, $j = 1, 2, \ldots$, *которому отвечает единственный собственный вектор (с. в.)* $\psi_0 \in \mathcal{K}_\infty$. *Множество* $\{\mu_j(\lambda)\}$ *счетно.*

3. Полученные предварительные результаты позволяют изучить свойства оператора $\mathcal{L}$. В частности, из леммы I и оценки (I) следует

Теорема 1. $\mathcal{L}$ *— замкнутый линейный неограниченный оператор со всюду плотной в* $\mathcal{H}$ *областью определения, порождает* C_0 *— полугруппу* $T_t(\mathcal{L})$ *с оценкой* $\|T_t(\mathcal{L})\| \leqslant \exp(\|\Lambda\| - \mu)\,t$. *Спектр оператора* $\mathcal{L}$ *в области* $\{\operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\Lambda\| - \mu\} \setminus \sigma(A)$ *состоит из конечного или, быть может, счетного множества изолированных точек* $\{\lambda_j\}$, $\operatorname{Im}\lambda_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$ $T_t(\mathcal{L})$, $t > 0$, *имеет в* $\mathcal{K}_\infty$ *единственный (нормированный) с.в.* $\varphi_0 \in \mathcal{K}_\infty$ *такой, что соответствующее ему с. зн.* z_0 *является ведущим.*

Замечание. В условиях теоремы с помощью результатов работы ([6], теорема 3) устанавливается асимптотика и локализация спектра оператора $\mathcal{L}$. В случае одномерной геометрии (сфера, пластина, цилиндр) в спектре существует счетное подмножество простых действительных чисел.

4. Рассмотренная задача возникает при анализе динамической системы

$$\begin{cases} a^{-1}\,\partial\varphi/\partial t = (-L + P_1(x;\,T_*))\,\varphi + \sum\limits_{k=1}^{p} z_k\chi_k C_k + P_2(x;\,T_*)\,\tau\Phi_*, \\ \partial C/\partial t = -zC + \beta f_1\varphi + \beta f_2\tau\Phi_*; \quad \alpha\partial\tau/\partial t = -l\tau + kf_3\varphi + kf_4\tau\Phi_*, \end{cases} \tag{2}$$

полученной линеаризацией некоторой нелинейной системы в окрестности стационарного положительного решения [3] Φ_* $(= \operatorname{col}\{\Phi_*^1(x), \ldots, \Phi_*^m(x)\}$, C_k^*, T_*, $k = 1, \ldots, p)$ этой системы. Здесь $C = \operatorname{col}\{C_1(x, t), \ldots, C_p(x, t)\}$, $\beta = \operatorname{col}\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$; $\chi_k = \operatorname{col}(\{\chi_k^1, \ldots, \chi_k^m\}$; $f_l = \operatorname{col}\{f_l^1(x;\,T_*), \ldots, f_l^m(x;\,T_*)\}'$, $z = \operatorname{diag}\{z_k\}$; β_k, χ_k^j — вещественные положительные константы; $f_l^j(x, T_*)\,(\geqslant 0)$, $P_{ji\nu}(x;\,T_*)$, $x \in V$, $l = 1, \ldots, 4$; $T_* \in R^1$ — константы взаимодействия нейтронов со средой; $k = 1, \ldots, p$; $i_2, j = 1, \ldots, m$; $i_1 = m + p + 1$; $\nu = 1, 2$. На коэффициенты системы (2) наложены известные условия [1, 2], гарантирующие существование и единственность решения. К системе (2) присоединяются начальные и граничные условия [1, 2]. Теорема 1, лемма 2, 3 и замечание обобщают результаты [1—4, 8, 7] о спектре операторов диффузионного типа в теории реакторов. Полученные результаты позволяют установить ряд новых свойств в поведении нелинейной системы (2), в частности, свойство универсальности Фейгенбаума [12]. В [13] это свойство установлено численным экспериментом для одной простой модели.

Автор благодарит С. Б. Шихова за постановку вопросов и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крянев А. В., Шихов С. Б.* Вопросы математической теории реакторов. Нелинейный анализ. М.: Энергоатомиздат, 1983. 2. *Новиков В. М., Шихов С. Б.* Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов. М.: Энергоатомиздат, 1982. 3. *Кузнецов Ю. А., Шашков В. В.* // Дифференциальные и интегральные уравнения Вып. 3. Горький: Изд. ГГУ, 1979.— С. 163—169. 4. *Макин Р. С.* // Функцион. анализ и его прил.— 1984. Т. 18, вып. 4.— С. 88—89. 5. *Авакян В. А.* // Функцион. анализ и его прил.—1978. Т. 12, вып. 1.— С. 66—67. 6. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* // Функцион. анализ и его прил.— 1979. Т. 13, вып. 3.— С. 93—94. 7. *Grubb G., Geymonat G.* // Bull. Unione Mat. Ital. 1979. V, B16, № 3.— P. 1032—1048. 8. *Левендорский С. З.* // ДАН СССР.— 1983. Т. 272, № 6.— С. 1314—1317. 9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М.: Физматгиз, 1962. 10 *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1953. 11. *Красносельский М. А., Соболевский П. Е.* // УМН — 1961. Т. 16, вып. 1.— С. 197—198. 12. *Feigenbaum M. J.* // J. Stat. Phys.— 1978. V. 19, № 1.— P. 15—52. 13. *March-Leuba J.* e. a.// Nucl. Sci. Eng.—1984. V. 86, № 4.— P. 401—404.

Государственный Комитет
по использованию атомной энергии СССР

Поступило в редакцию
7 сентября 1984 г.